
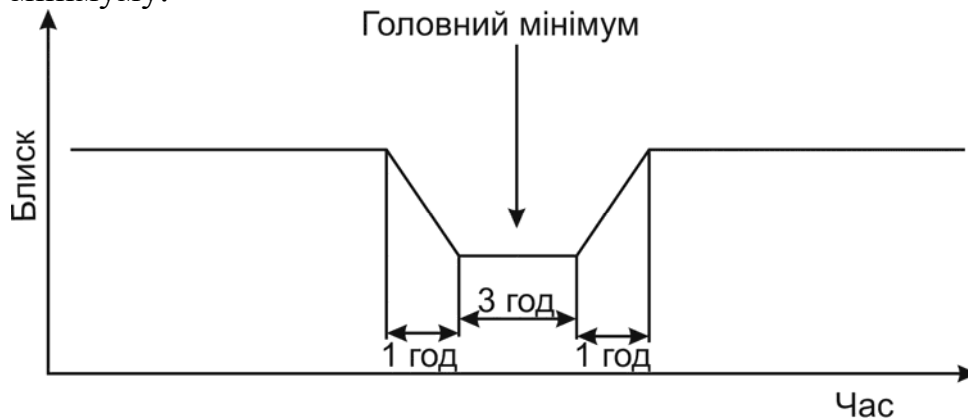


<b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b>		<b>Теоретичний тур</b>  <b>11 клас</b>
м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.		

**1.Затемнювана подвійна зоря.** Затемнювана подвійна зоря має період зміни блиску 3 доби. Сумарна маса компонент 4 сонячні. Орбіта колова і розташована так, що промінь зору лежить у її площині. Затемнення головної зорі зорею-супутником продовжується 5 годин, з них по 1 годині блиск зменшується та зростає (часткове затемнення) і 3 години залишається незмінним (повне затемнення, див. малюнок). Знайти радіуси компонент подвійної зорі (вважаючи зорею-супутник темною у порівнянні з головною зорею) та амплітуду змін блиску впродовж головного мінімуму.



### *Розв'язання*


Знаючи період та суму мас, за третім уточненим законом Кеплера (порівнюючи з рухом Землі навколо Сонця) знаходимо велику піввісь орбіти зорі-супутника відносно головної зорі:

$$\frac{a^3}{a_{\oplus}^3} = \frac{M}{M_{\oplus}} \frac{T^2}{365,25^2}, \quad a = 0,064 \text{ а.о.} = 9,69 \cdot 10^6 \text{ км}$$

Оскільки орбіта колова, то лінійна швидкість руху

$$V = \frac{2\pi a}{T} = 8,45 \cdot 10^5 \text{ км/год}$$

Часткове затемнення починається, коли менший компонент торкається зовні до краю більшого, і закінчується, коли він торкається внутрішнього краю. Отже він проходить за цей час шлях

<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

в два своїй радіуси  $2R_2$ . За час повного затемнення він проходить шлях  $2(R_1 - R_2)$ . (Може бути пояснення за малюнком).


Отже:

$$R_2 = \frac{\Delta t_q V}{2} = 4,23 \cdot 10^5 \text{ км}, \quad R_1 = \frac{\Delta t_n V}{2} + R_2 = 16,91 \cdot 10^5 \text{ км}.$$

Де  $\Delta t_q = 1$  год – тривалість часткового затемнення (спаду або зростання блиску),  $\Delta t_n = 3$  год – тривалість повного затемнення.

Якщо вважати зорю-супутник темною у порівнянні з головною зорею, то амплітуда змін блиску буде

$$\Delta m = -2,5 \lg \frac{\pi R_1^2 - \pi R_2^2}{\pi R_1^2} = -2,5 \lg \left( 1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) = 0,07^m$$

<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

2. У 2012 році виповниться 50 років з моменту історичного польоту першого українця в космос — П.Р. Поповича, а також 15 років польоту першого космонавта незалежної України Л.К.Каденюка.


Корабель-супутник «Восток 4», на якому П.Р. Попович 12 серпня 1962 року здійснив свій перший політ, обертався навколо Землі по еліптичній орбіті з висотою перигею 179,8 км і висотою апогею 236,7 км. Середній радіус Землі прийняти 6371 км. Політ тривав 70 годин 44 хвилини.

- знайти віддаль перигею від фокуса орбіти;
- знайти віддаль апогею від фокуса орбіти;
- знайти велику піввісь орбіти корабля;
- визначити ексцентриситет орбіти корабля;
- обчислити його період обертання;
- обчислити середню швидкість руху по орбіті;
- швидкість в перигеї та апогеї;
- яку віддаль подолав на космічному кораблі «Восток4» П.Р. Попович;
- скільки кругосвітніх подорожей було здійснено?
- на основі параметрів орбіти корабля «Восток 4», визначити масу Землі.

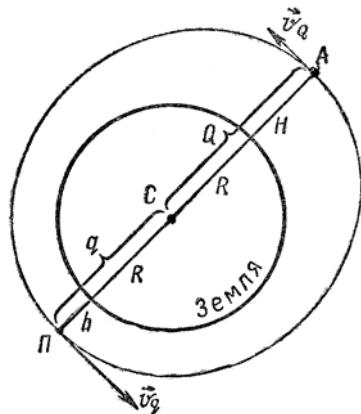
### ***Розв'язання***

У відповідності з першим законом Кеплера в одному з фокусів орбіти корабля – супутника лежить центр Землі С (див. мал.). Найближча до поверхні Землі точка П називається перигеєм, а найбільш віддалена точка А – апогеєм. Позначимо висоту перигею над поверхнею Землі через  $h$ , висоту апогею через  $H$  і радіус Землі – через  $R$ . За умовою задачі  $h = 179,8$  км,  $H = 236,7$  км і  $R = 6371$  км.

Віддаль перигею від фокуса орбіти (від центра Землі С) :

<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

$$q = R+h, \quad q = 6371 \text{ км} + 179,8 \text{ км} = 6550,8 \text{ км},$$



А віддаль апогею від фокуса орбіти:

$$Q = R+H, \quad Q = 6371 \text{ км} + 236,7 \text{ км} = 6607,7 \text{ км},$$

і тоді велика піввісь орбіти:

$$a = (q + Q)/2, \quad a = (6550,8 + 6607,7)/2 = 6579,25 \text{ км}.$$

Оскільки  $q = a(1-e)$ , то ексцентриситет орбіти:

$$e = 1 - (q/a), \quad e = 1 - (6550,8 \text{ км} / 6579,25 \text{ км}) = 0,0044.$$

Період обертання  $T$  супутника зв'язаний із значенням великої півосі  $a$  його орбіти третім узагальненим законом Кеплера і якщо виразити  $T$  в хвилинах,  $a$  в кілометрах, масу  $M$  центрального тіла в масах Землі, то

$$T^2 = 2,752 \cdot 10^{-8} a^3/M \quad \text{і} \quad T = 1,659 \cdot 10^{-4} a \sqrt{a/M}$$


Так як корабель «Восток 4» обертався навколо Землі, то  $M = 1$  і тоді його період обертання :

$$T = 1,659 \cdot 10^{-4} \cdot 6579,25 \cdot \sqrt{6579,25}, \quad T = 88 \text{ хв}.$$

Середня швидкість обертання корабля:

$$V_c = 2\pi a/T, \quad V_c = (2 \cdot 3,1416 \cdot 6579,25 \text{ км}) / 88 \cdot 60 \text{ с} = 7,82 \text{ км/с}.$$

Швидкість в перигеї:

<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

$$V_q = V_c \sqrt{Q/q}, \quad V_q = 7,8 \text{ км/с} \cdot \sqrt{6607,7 \text{ км} / 6550,8 \text{ км}} = 7,83 \text{ км/с}$$

Швидкість в апогеї:


$$V_Q = V_c \sqrt{q/Q}, \quad V_Q = 7,8 \text{ км/с} \cdot \sqrt{6550,8 \text{ км} / 6607,7 \text{ км}} = 7,76 \text{ км/с}$$

$$S(\text{км}) = v \cdot c \cdot t, \quad S = 7,82 \text{ км/с} \cdot 254640 \text{ с} = 19912848 \text{ км} = 19,9 \text{ млн. км}$$

$$N (\text{обертів}) = T/t. \quad T = 70 \text{ год} 44 \text{ хв} = (70 \cdot 60) + 44 = 4200 + 44 = 4244 \text{ хв.} \\ t = 88 \text{ хв.} \quad N = 4244/88 = 48, 2 \text{ обертів.}$$

Маса Землі  $M = v^2 r / G$ .

$$M = (7830)^2 \text{ м/с} \cdot 6579250 \text{ м} / (6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2) = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг,} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

<b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b>		<b>Теоретичний тур</b>  <b>11 клас</b>
м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.		

**3. Сонячна енергія.** На якій орбіті перебуватиме Земля, якщо видима із її поверхні зоряна величина Сонця буде більшою на одиницю? Як і на скільки при цьому зміняться середні значення температури, тиску і густини повітря на її поверхні?

Примітка: Середня температура на поверхні Землі становить 20°C, тиск 10<sup>5</sup> Па. Молярна маса повітря  $\mu=29$  г/моль. Теплом, яке надходить з надр Землі, і вологістю повітря знехтувати.

### *Розв'язання*

1) Із формули Погсона

$$R'_3 = \sqrt{2.512} \cdot R_3 \approx 1.585 \text{ а.о.}$$

Орбіта Землі має бути близькою до орбіти Марса (для Марса апогей 1.67 а.о., перигей 1.38 а.о.)

2) Із формули Погсона

$$\frac{E_1}{E_2} = 2.512^{m_2 - m_1}$$

знаходимо, що енергетичний потік від Сонця зменшився у 2.512 рази:


$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2.512}.$$

Висока температура повітря біля поверхні Землі зумовлена тепловіддачею земної поверхні, яка поглинає сонячне світло. При енергетичному балансі кількість поглинутої енергії рівна кількості випроміненої енергії. Випромінювальна здатність нагрітого тіла за законом Стефана-Больцмана пропорційна четвертому степені температури, тому:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^4 = \frac{1}{2.512}$$

Підставляючи  $T_1 \approx 293$  К, знаходимо, що

$$T_2 = \frac{T_1}{(2.512)^{1/4}} \approx 233 \text{ К}$$

<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

або  $-40^{\circ}\text{C}$ . Отже температура зменшиться на  $60^{\circ}$ . Зауважте, що знайдена температура є близькою до середньої температури Марса  $227\text{ K}$ .

*Примітка: При такій температурі атмосферна вологість вкриє земну поверхню шаром снігу. При цьому альbedo земної поверхні зросте суттєво знизивши кількість поглинутої сонячної енергії. Тому середня температура повітря насправді буде нижчою від отриманої величини.*

3) Тиск на поверхні не зміниться, оскільки визначається масою атмосфери Землі  $m_A$ , яка залишається сталою.

$$P = \frac{m_A g}{4\pi R_3^2},$$

де  $R_3$  – радіус Землі.


4) З рівняння для ідеального газу  $P=nkT$  матимемо, що

$$\rho_2 = \frac{\mu}{N_A} n_2 = \frac{\mu}{N_A} \frac{P}{kT_2} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{6 \cdot 10^{23} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 233} \approx 1.5 \text{ кг/м}^3$$

$N_A k = R = 8,314 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$  - універсальна газова стала

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} \approx \frac{293}{233} \approx 1.26$$

Отже густина повітря збільшиться на 26 %.

<p>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p>Теоретичний тур</p> <p>11 клас</p>
---	---	---------------------------------------

4. **Чи видно куди летіти?** Якщо через два тижні після завершення II Всеукраїнської олімпіади з астрономії з поверхні Землі запустити міжпланетний космічний апарат на орбіту, яка в крайніх точках торкається орбіт Землі та певної планети, то через 146 земних діб він попаде чітко на обрану планету. Що це за планета? Чи можна сьогодні спостерігати цю планету? Якщо так, то де і як довго? Як скоро настане наступний момент найкращої видимості даної планети для мешканців північної півкулі Землі?

#### *Розв'язання*

Період руху такою орбітою в роках буде задаватися формулою

$$T = \sqrt{\left(\frac{a_{Pl} + 1 \text{ а.о.}}{2}\right)^3} \text{ років} .$$

Переліт до іншої планети займе як раз половину цього часу, а отже, знаючи час перельоту можемо знайти відстань планети від Сонця і, відповідно, ідентифікувати саму планету.

$$a_{Pl} = \left(2\sqrt{4T_{SC}^2} - 1\right) \text{ а.о.}$$

Звідки

$$a_{Pl} = \left(2\sqrt{4 \cdot \left(\frac{146}{365}\right)^2} - 1\right) \text{ а.о.} \approx 0.72 \text{ а.о.}$$

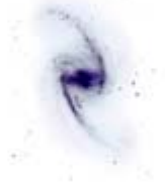
Отже, це Венера.

За час перельоту Венера встигне зміститися на кут

$$\alpha = \frac{146^d}{224.7^d} \cdot 360^\circ \approx 234^\circ .$$

Отже, для того, щоб космічний апарат потрапив на планету, в момент запуску Венера повинна знаходитися на кутовій відстані  $234^\circ$  від точки призначення (яка знаходиться в діаметрально протилежно до положення Землі в момент запуску), а отже кут Земля-Сонце-Венера в момент запуску дорівнює  $234^\circ - 180^\circ = 54^\circ$ .



<b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b>		<b>Теоретичний тур</b>  <b>11 клас</b>
<b>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</b>		

Далі простіше відповісти на питання, чи можна спостерігати цю планету сьогодні. За два-три тижні положення Венери на небосхилі суттєво не зміниться, а отже, знайдемо умови видності Венери в момент запуску. Для цього спочатку знайдемо відстань від Землі до Венери за теоремою косинусів, а потім, скориставшись теоремою синусів – кутову відстань між Сонцем і Венерою (кут Сонце-Земля-Венера)

$$l_{ЗВ} = \sqrt{l_{ЗС}^2 + l_{ВС}^2 - 2l_{ЗС}l_{ВС} \cos(\alpha - 180^\circ)} \approx 0,82 \text{ а.о.}$$

$$\sin \beta = \sin(\alpha - 180^\circ) \frac{l_{ВС}}{l_{ЗВ}} = \sin 34^\circ \frac{0,72}{0,57} = 0.7104$$

$$\beta \approx 45^\circ.$$

Отже, елонгація Венери в момент запуску складатиме  $45^\circ$ , а це майже максимально можливе значення (макс. елонгація складає  $48^\circ$ - $49^\circ$ ). Причому Венера знаходиться в західній елонгації, а отже спостерігатися буде ввечері після заходу Сонця. Це означає, що Венера в момент запуску та під час олімпіади буде мати найкращі умови для спостереження на звечора на заході впродовж 3-4 годин (що, до речі, можна перевірити на власні очі).


Тепер знайдемо синодичний період обертання Венери:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_3}$$

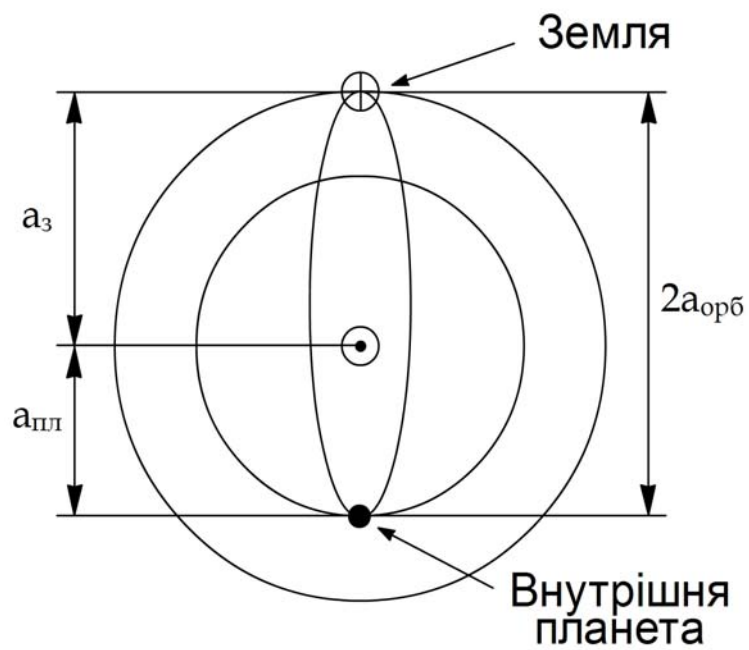
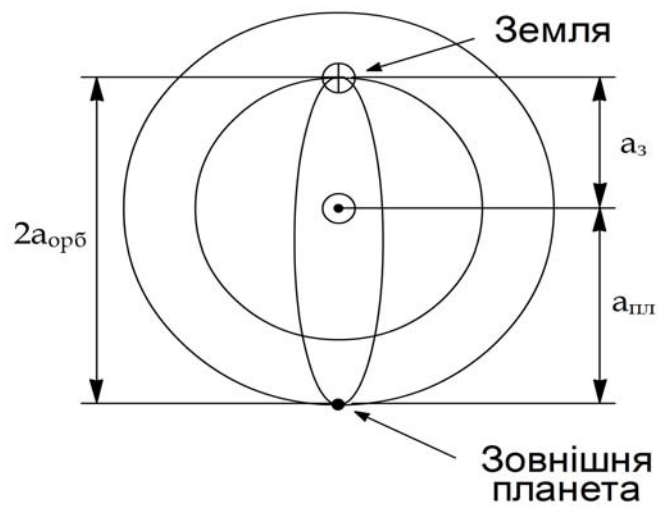
$$S = \frac{T_B T_3}{T_3 - T_B} \approx 584 \text{ доби}$$

Наступний момент найкращої вечірньої видності настане приблизно через 584 доби після проведення олімпіади. Проте буде ще момент ранкової видності. Для цього Венера має опинитися по інший бік від Сонця приблизно на той самий кут Сонце-Земля-Венера. Тобто відносно положення Землі та Венери має зміститися на  $68^\circ$ . На це знадобиться:

$$t = S \frac{108^\circ}{360^\circ} \approx 175 \text{ діб}$$

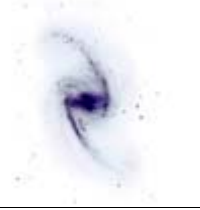
<p>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p>Теоретичний тур</p> <p>11 клас</p>
---	---	---------------------------------------

Після розрахунку дати отримаємо кінець вересня – початок ЖОВТНЯ.



II Всеукраїнська учнівська  
олімпіада з астрономії


м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.



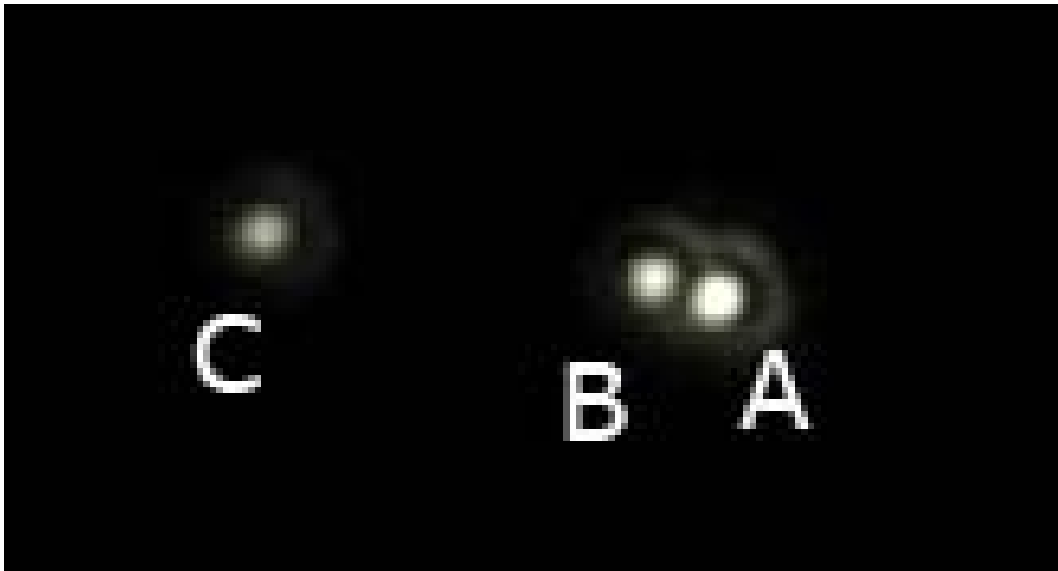
Теоретичний тур

11 клас



<p>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p>Теоретичний тур</p> <p>11 клас</p>
---	---	---------------------------------------

5. **Потрійна система.** На зображенні, отриманому Дайманом Пічем із застосуванням методики Lucky Image (Щасливе, Вдале зображення) в місці з хорошим астрокліматом, видно потрійну систему Зета Рака (Zeta Cancri). В цій системі зорі А та В знаходяться на кутовій відстані 0,8", маси компонент становлять 1,28 та 1,18 мас Сонця відповідно, період обертання цієї системи складає 59,6 років. Знайдіть відстань до системи та період обертання зорі С відносно зір А та В, якщо маса зорі С на 2,5% менша за масу зорі В. Під час розв'язку знехтувати ефектами проекції.



### *Розв'язання*

Користуючись уточненим третім законом Кеплера знайдемо відстань між зірками:


$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad \text{– в системі СІ.}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{GT^2(m_1 + m_2)}{4\pi^2}}$$

$$a = \sqrt[3]{T^2(m_1 + m_2)} \quad \text{– в системі а.о., років, мас Сонця.}$$

Після розрахунків отримаємо  $a \approx 20,5$  а.о.

Відстань до системи буде дорівнювати:

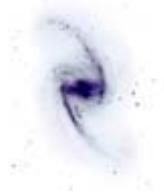
<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

$$l = \frac{a}{0,8} \text{ пк} \approx 25,6 \text{ пк}$$

Знаходимо масу зорі С. 2,5% від її маси це приблизно 0,03 Мас Сонця. Отже маса зорі С – 1,15 мас Сонця.

За допомогою лінійки вимірюємо відстань між зорями А та В – приблизно 1 см та між зорею С і центром системи А та В – приблизно 5,7 см. З пропорції знаходимо відстань між зорею С та системою А та В на зображенні: 117 а.о. Період обертання знаходимо за наступною формулою (для спрощення вважаємо, що відстань між зорями А та В значно менша ніж відстань від них до зорі С. В результаті ми розглядаємо подвійну систему з зір, які мають маси  $m_c$  та  $m_a + m_b$ ):

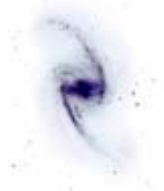
$$T = \sqrt{\frac{a_c^3}{(m_A + m_B) + m_C}} = 665 \text{ років}$$

<b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b>		<b>Теоретичний тур</b>  <b>11 клас</b>
м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.		

**6. Зустріч Венери і Юпітера.** На рисунку показано ділянку неба над Ужгородом 14 березня 2012 року, коли можна було спостерігати сполучення Венери та Юпітера (показано також горизонтальну систему координат та орбіту Венери). Знайти кутову відстань між Венерою та Юпітером на небі Меркурія в цей час. Видимі та абсолютні зоряні величини планет на цей час вказано в таблиці.  
(10 балів)

Планета	Видима зоряна величина, $m$	Абсолютна зоряна величина, $M$
Меркурій	2.24	34.60
Венера	-4.18	27.87
Юпітер	-1.96	25.85



<b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b>		<b>Теоретичний тур</b>  <b>11 клас</b>
м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.		

***Розв'язання.***

На рисунку в умові задачі показано орбіту Венери. Отже, планети розташовані в площині екліптики як показано на рисунку 1:



Рис.1

Зі співвідношення

$$M = m + 5 - 5 \lg r$$

можна знайти абсолютні відстані від Землі до планет в парсеках:

$$r_M = 3.37 \cdot 10^{-6} \text{ пк,}$$


$$r_V = 3.89 \cdot 10^{-6} \text{ пк,}$$

$$r_{Ю} = 2.74 \cdot 10^{-5} \text{ пк.}$$

Проте зручніше розв'язувати задачу у відносних одиницях

$$r_M / r_{Ю} = 0.123,$$

$$r_V / r_{Ю} = 0.142.$$

<b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b>		<b>Теоретичний тур</b>  <b>11 клас</b>
м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.		

З рисунка 2 видно, що слід знайти кут  $\gamma$ . Кутові відстані між Венерою і Меркурієм  $\alpha$  та Венерою і Юпітером  $\beta$  знаходимо із рисунку в умові задачі:

$$\alpha = 33.6^\circ = 0.586 \text{ рад,}$$

$$\beta = 3.2^\circ = 0.056 \text{ рад.}$$

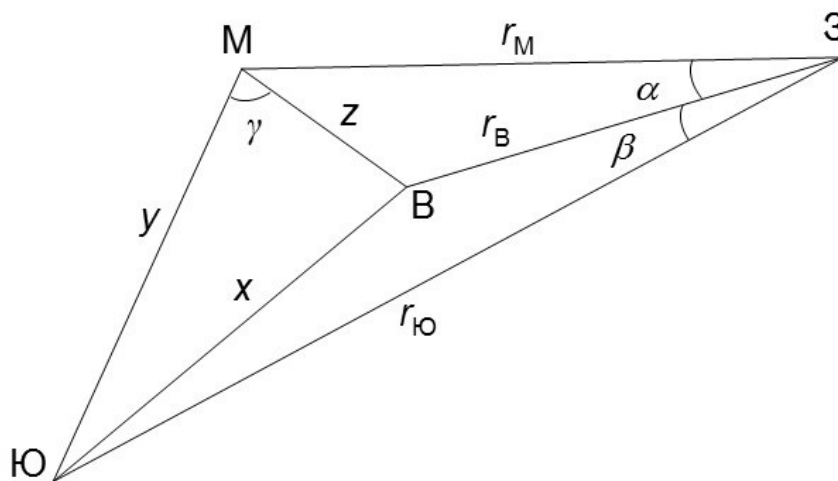


Рис.2

Із рисунку 2 за теоремою косинусів:


$$\left(\frac{x}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r_{\text{В}}}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 - 2 \frac{r_{\text{В}}}{r_{\text{Ю}}} \cos \beta$$

$$\left(\frac{y}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r_{\text{М}}}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 - 2 \frac{r_{\text{М}}}{r_{\text{Ю}}} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\left(\frac{z}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 = \left(\frac{r_{\text{М}}}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 + \left(\frac{r_{\text{В}}}{r_{\text{Ю}}}\right)^2 - 2 \frac{r_{\text{М}} r_{\text{В}}}{r_{\text{Ю}}^2} \cos \alpha$$

знаходимо:  $(x/r_{\text{Ю}})^2 = 0.737$ ,  $(y/r_{\text{Ю}})^2 = 0.818$ ,  $(z/r_{\text{Ю}})^2 = 0.0062$ .



<p><b>II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії</b></p> <p>м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.</p>		<p><b>Теоретичний тур</b></p> <p><b>11 клас</b></p>
--	---	---

Кутову відстань між Венерою і Юпітером на небі Меркурія шукаємо із рівності

$$\left(\frac{x}{r_{Ю}}\right)^2 = \left(\frac{y}{r_{Ю}}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_{Ю}}\right)^2 - 2\frac{yz}{r_{Ю}^2} \cos\gamma$$

З останнього виразу знаходимо  $\cos \gamma = 0.616$ , а кут

$$\gamma = 0.907 \text{ рад} = 52^\circ.$$