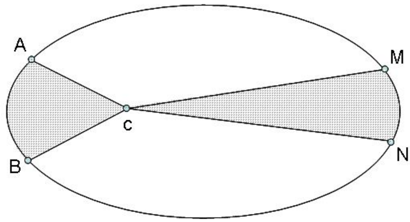
Закони Кеплера

63. Доведіть, що $\frac{\upsilon_n}{\upsilon_A} = \frac{r_A}{r_n}$, де υ_n, υ_A і r_n, r_A - відповідно модулі швидкостей і відстані Землі від Сонця в перигелії і афелії. (2014 р. II е. 11 к.)

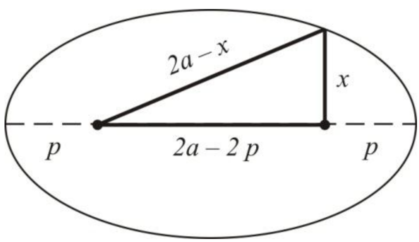
Розв'язок. Площі фігур CAB і CMN за другим законом Кеплера, рівні.

Отже $\frac{1}{2}\upsilon_n \cdot \Delta t r_n = \frac{1}{2}\upsilon_a \Delta t r_a$, де вкрай мала величина Δt – час, за який радіус-вектор планети описує відповідні площі. Із записаної рівності випливає $\frac{\upsilon_n}{\upsilon_A} = \frac{r_A}{r_n}$.



64. Швидкість руху Землі у перигелії, у якому перебувала Земля 03.01.2016 року, становила υ_p=30,27 км/с. Оцінити швидкість руху Землі у момент, коли її радіус-вектор буде перпендикулярним до великої осі еліптичної орбіти. Вважати, що відстань від Землі до Сонця у перигелії p=0,983 а.о. (2016 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Оскільки сумарна відстань від будь-якої точки еліпса до фокусів є величиною сталою і дорівнює $2a$, де a=1 а.о., то як випливає із трикутника $(2a-2p)^2 + x^2 = (2a-x)^2$, де x – відстань, яка дорівнює значенню радіус-вектора, перпендикулярного до великої осі еліптичної орбіти. Звідси: $x = \frac{(2a-p)p}{a}$.

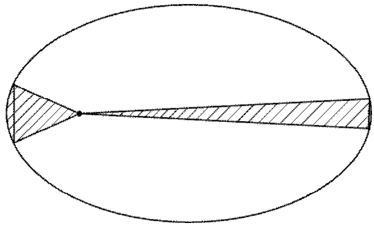


Розглянемо дуже маленькі площі, які описує радіус-вектор p і радіус-вектор x за дуже маленький час Δt. Можна вважати, що за цей малий час p не змінюється і x не змінюється. Виходячи із другого закону Кеплера, що радіус-вектор планети за однакові інтервали часу описує рівні площі, можна записати $\frac{1}{2}\upsilon_p \cdot \Delta t \cdot p = \frac{1}{2}\upsilon_x \Delta t \cdot x$. Тоді $\upsilon_x = \frac{\upsilon_p \cdot p}{x}$. Враховуючи значення x, отримаємо: $\upsilon_x = \frac{\upsilon_p \cdot a}{2a-p}$. Підставляючи значення, одержимо υ_x =29,76 км/с.

65. Земляни запустили автоматичну міжпланетну станцію (АМС) на орбіту Марса. АМС стартувала з земної орбіти і летить до орбіти Марса по гоманівському еліпсу (це еліпс, який в перигелії дотикається орбіти Землі, а в афелії - орбіти Марса). У момент старту з орбіти Землі АМС мала швидкість 33 км/с відносно Сонця. Яку швидкість необхідно додатково надати АМС, коли вона досягне орбіти Марса, щоб в подальшому вона стала рухатися по круговій орбіті навколо Сонця? (2020 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Скористаємося ІІ законом Кеплера для орбіти АМС в перигелії (на орбіті Землі) і в афелії (на орбіті Марса). ("за рівні проміжки часу радіус-вектор АМС описує рівні площі").

На схематичному малюнку показано заштриховані площі, пройдені по еліптичній орбіті за одиницю часу. Площі секторів можна вважати приблизно рівними площам відповідних трикутників. Оскільки час одиничний, то основи трикутників (хорди, що стягують заштриховані сектори) чисельно рівні швидкостям в перигелії і афелії, а висоти трикутників - перигелийній і афелійній відстані.



З рівності площ робимо висновок: $\upsilon_a \cdot r_a = \upsilon_n \cdot r_n$, де індексами a позначені швидкість і відстань в афелії (на орбіті Марса), а індексами n – швидкість і відстань в перигелії (на орбіті Землі).

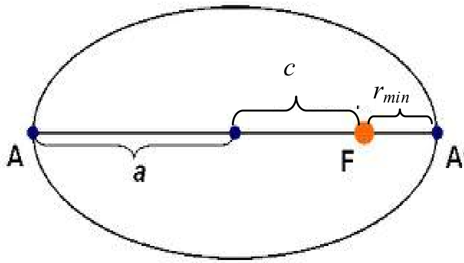
У нашому випадку відомо, що $\upsilon_п$=33 км/с, $r_п$=1 а.о., $r_а$=1,52 а.о. Звідси отримуємо, що $\upsilon_а$=21,7 км/с – таку швидкість буде мати АМС, що підлетіла до орбіти Марса.

Знайдемо кругову швидкість на орбіті Марса. Скористаємося для цього ІІ з-ном Ньютона і законом всесвітнього тяжіння. Для Марса. $m_M \dfrac{\upsilon_M^2}{r_M} = G\dfrac{M_C \cdot m_M}{r_M^2}$. Для Землі $m_M \dfrac{\upsilon_З^2}{r_З} = G\dfrac{M_C \cdot m_З}{r_З^2}$. Звідси $\dfrac{\upsilon_З^2}{\upsilon_M^2} = \dfrac{r_M}{r_З}$, де r – великі півосі їх орбіт, які вважаємо коловими, υ – кругові швидкості руху по відповідних орбітах.

(Або за ІІІ законом Кеплера: $\dfrac{T_M^2}{T_З^2} = \dfrac{r_M^3}{r_З^2}$, де T – періоди обертання навколо Сонця. Оскільки $T = \dfrac{2\pi r}{\upsilon}$, то $\dfrac{\upsilon_З^2}{\upsilon_M^2} = \dfrac{r_M}{r_З}$).

Відомо, що $\upsilon_З$=30 км/с, звідси $\upsilon_M = \upsilon_З\sqrt{\dfrac{r_З}{r_M}}$ ≈ 24,3 км/с. Отже, при підльоті до орбіти Марса АМС потрібно надати додаткову швидкість. 24,3 км/с – 21,7 км/с = 2,6 км/с.

66. Астероїд Амур рухається по еліпсу з ексцентриситетом 0,43. Чи може цей астероїд зіткнутися із Землею, якщо його період обертання навколо Сонця дорівнює 2,66 року? Відповідь обґрунтуйте розрахунками. (2013 р. III е. 11 к.)



Розв'язок. Астероїд може зустрітися з Землею, якщо він перетнеться з орбітою Землі, тобто якщо відстань у перигелії $r_{\min} \le 1$ а.о. За III законом Кеплера визначаємо велику піввісь орбіти астероїда $\dfrac{T_1^2}{T_З^2} = \dfrac{a_1^3}{a_З^3}$. Звідки $a_1 = 1{,}92$ а.о.

$a=c+r_{\min}$, $c=ea$. Звідси $r_{\min} = a(1-e)$ $r_{\min}$=1,09 а.о. Отже, не перетне орбіту Землі.

67. Астероїд Ікар проходить перигелій своєї орбіти кожні 409 доби, наближаючись до Сонця на відстань 0,187 а.о. Як далеко може віддалятися від Сонця Ікар? (2014 р. III е. 11 к.)

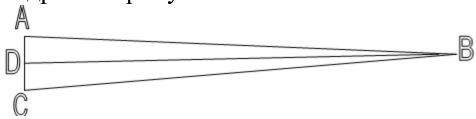
Розв'язок. За третім законом Кеплера визначимо велику піввісь орбіти Ікара: $a^3 = T^2$, де $T = 409$ діб = 1,12 р. Тоді $a = 1{,}078$ а.о.

Велика вісь орбіти відповідно буде рівною 2,156 а.о. Максимальне віддалення Ікара від Сонця (відстань у афелії) знаходимо як різницю великої осі і перигелійної (найближчої) його відстані від Сонця: 2,156 а.о. – 0,187 а.о. = 1,969 а.о.

68. Коли Земля (4 січня) знаходиться в перигелії, Сонце зміщується по небу відносно зір з кутовою швидкістю 61′ за добу, а 4 липня, коли Земля в афелії – 57′ за добу. Визначити ексцентриситет земної орбіти. (2019 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Кути зміщення Сонця по небу відносно зір відповідають кутам зміщення Землі по орбіті. За другим законом Кеплера, площі, описані радіусом – вектором Землі за добу в перигелії і в афелії мають бути рівними.

Враховуючи малі значення кутів, ці площі можна представити у вигляді рівнобедрених трикутників.



Кут при вершині B трикутника ABC – кут зміщення Землі по орбіті, відрізок BD – перигелійна чи афелійна відстань. Відрізок AD = 0,5AC = $DB \cdot tg\dfrac{B}{2}$. Площа трикутника ACB $S = AD \cdot DB = DB^2 \cdot tg\dfrac{B}{2}$. Враховуючи, що площі таких трикутників в перигелії та в афелії рівні між собою, і те що перигелійна і афелійна відстані відповідно: $r_{\min} = a - ea = a(1-e)$; $r_{\max} = a + ea = a(1+e)$, отримаємо:

$S = r_{\min}^2 \cdot tg30{,}5' = r_{\max}^2 \cdot tg28{,}5'$ або: $a^2(1-e)^2 \cdot tg30{,}5' = a^2(1+e)^2 \cdot tg28{,}5'$.

Після скорочень остання рівність набирає вигляду: $\dfrac{1+e}{1-e} = \sqrt{\dfrac{tg30{,}5'}{tg28{,}5'}}$.

Враховуючи, що при малих кутах $tg\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ (в радіанах), можна виразити чисельник і знаменник підкореневого виразу в радіанах. Але оскільки це відношення, то вірною буде рівність $\dfrac{1+e}{1-e} = \sqrt{\dfrac{30{,}5}{28{,}5}} \approx 1{,}0345$.

Остаточно $e = \dfrac{0{,}0345}{2{,}0345} = 0{,}017$.

69. Комета рухається навколо Сонця таким чином, що її орбіта дотикається орбіт Землі і Юпітера (не перетинаючи їх). Визначте:

а) період обертання комети навколо Сонця.

б) ексцентриситет орбіти комети.

Орбіти Землі і Юпітера вважати коловими. Радіус орбіти Землі 1 а.о., радіус орбіти Юпітера 5 а.о. (2017 р. ІІ е. 11 к.)

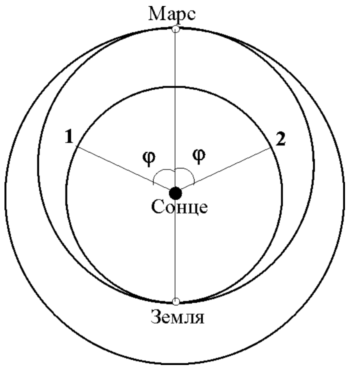
Розв'язок. З умови дотичності орбіт обох планет слідує, що на відстані 1 а.о. від Сонця комета буває в перигелії своєї орбіти (найближче до Сонця), а на відстані 5 а.о. в афелії (найдальше від Сонця). Отже, $r_{\min}+r_{\max}$= 1 а.о + 5 а.о. = 6 а.о. – велика вісь орбіти комети, а 3 а.о. – велика піввісь орбіти a. Для визначення періоду скористаємося ІІІ законом Кеплера. $\dfrac{T_З^2}{T_к^2} = \dfrac{a_З^3}{a_к^3}$, де $T_З$= 1 рік, $a_З$= 1а.о. Тоді $T_к = \sqrt{27}$. $T_к$≈5,2 років.

З означення еліпса, його фокусів та ексцентриситету

r_{max}–r_{min}=2c, де 2c – відстань між фокусами, а ексцентриситет $e = \frac{c}{a}$.

Отже 2c=5 а.о. –1 а.о.=4 а.о. $e = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$.

70. Космічний корабель здійснює переліт від Землі до Марса по оманівській орбіті (в перигелії ця орбіта дотикається до орбіти Землі, а в афелії – орбіти Марса). Знайдіть час такого польоту, а також мінімальний час, протягом якого космонавтам доведеться чекати моменту відправлення в зворотній шлях по орбіті такої ж форми. Орбіти планет вважати коловими і такими, що лежать в одній площині. (2015 р. III е. 11 к.)



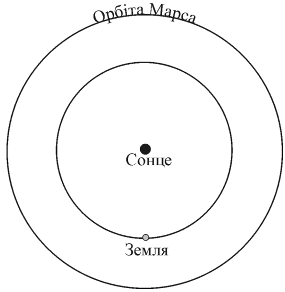
Розв'язок. Велика піввісь гоманівської орбіти дорівнює півсумі радіусів орбіт Марса і Землі. $a_{к.к.} = \frac{a_З + a_М}{2} = 1{,}26$ а.о. Період обертання космічного корабля $T_{к.к.}$ по цій орбіті знайдемо з третього закону Кеплера.

$\frac{T_З^2}{T_{к.к.}^2} = \frac{a_1^3}{a_{к.к.}^3}$, де $T_З$= 1 рік, $a_З$= 1 а.о. Тоді $T_{к.к.}$=1,414 року ≈ 516 діб. Отже час польоту із Землі на Марс $t = \frac{T}{2} \approx 259$ діб.

В момент прильоту космічного корабля на Марс Земля буде знаходитися в положенні 1 і випереджатиме Марс на кут $\varphi = \omega_З t - \pi$, де $\omega_З = \frac{2\pi}{T_З}$ – кутова швидкість Землі. В момент відправлення Земля повинна відставати на такий же кут φ і знаходитися в положенні 2 по відношенню до Марса. Отже час очікування дорівнює часу, за який Земля пройде кутову відстань 2π–2φ за умови нерухомого Марса. Цей час $\tau = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_З - \omega_М}$, де ($\omega_З$–$\omega_М$) – відносна кутова швидкість Землі і Марса. Після підстановки

$$\tau = \frac{4\pi(1 - \frac{t}{T_З})}{\frac{2\pi}{T_З} - \frac{2\pi}{T_М}} = \frac{2(1 - \frac{t}{T_З})}{\frac{1}{T_З} - \frac{1}{T_М}} \approx 457 \text{ діб.}$$

71. На малюнку, що відображає орбіти Землі і Марса, показано положення Землі у момент запуску до Марса автоматичної міжпланетної станції (АМС). Запуск здійснюється по найбільш економічній напівеліптичній траєкторії (гоманівській), яка у перигелії дотикається до орбіти Землі, в афелії – орбіти Марса. Вважаючи орбіти планет коловими:

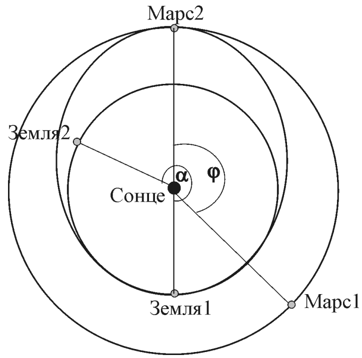


а) визначити час польоту АМС до Марса;

б) визначити положення Землі (кутову відстань Земля-Сонце-Марс) у момент зближення АМС із Марсом;

в) визначити положення Марса (кутову відстань Земля-Сонце-Марс) у момент запуску АМС;

г) відобразити ситуацію на малюнку, вказавши положення планет у момент запуску АМС і в момент зближення АМС з Марсом. (2018 р. ІІІ е. 11 к.)



Розв'язок. Час польоту $t\approx$ 259 діб (визначено в попередній задачі)

За цей час Земля пройде кутову відстань α, яку визначимо із співвідношення: $\frac{360^0}{1}=\frac{\alpha}{0{,}71}$. Звідси $\alpha\approx255^0$. Тоді положення Землі (Земля 2) у момент зближення АМС із Марсом (кутова відстань Земля-Сонце-Марс ЗСМ)$=255^0-180^0=75^0$.

Враховуючи, що період обертання Марса дорівнює 1,88 року, визначаємо кут повороту φ: $\frac{360^0}{1{,}88}=\frac{\varphi}{0{,}71}$ і відповідно $\varphi\approx136^0$. Тоді положення Марса (Марс 1) у момент запуску АМС (кутова відстань Земля-Сонце-Марс ЗСМ)$=180^0-136^0=44^0$.

72. Космічний корабель рухається навколо Землі в напрямку її обертання по коловій орбіті в площині екватора на відстані 460 км від поверхні. У результаті короткочасного гальмування над точкою Землі з координатами 0^0 широти і 0^0 довготи він почав рухатися по еліптичній орбіті, яка у точці, протилежній до точки гальмування дотикається до поверхні Землі. Визначити найменший час, через який корабель досягне поверхні Землі і координати цієї точки. (2019 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Знайдемо швидкість руху Землі по коловій орбіті. Нехай $r=R_З+h$

$$\frac{m\upsilon^2}{r}=G\frac{M_Зm}{r^2};\ \upsilon^2=G\frac{M_З}{r}$$

Враховуючи, що $g=G\frac{M_З}{R_З^2}$, отримаємо: $\upsilon^2=\frac{gR_З^2}{r}$.

Період обертання по цій орбіті $T=\frac{2\pi r}{\upsilon}$ або $T^2=\frac{4\pi^2r^2}{\upsilon^2}=\frac{4\pi^2r^3}{gR_З^2}$.

Щоб знайти період обертання по еліптичній орбіті $T_е$ скористаємося ІІІ законом Кеплера

Велика піввісь цієї орбіти $a=\frac{R_З+r}{2}$. Тоді $\frac{T_e^2}{T^2}=\frac{a^3}{r^3}=\left(\frac{R_З+r}{2r}\right)^3$.

$$T_e^2=T^2\cdot\left(\frac{R_З+r}{2r}\right)^3;\ T_e^2=\frac{4\pi^2r^3}{gR_З^2}\cdot\left(\frac{R_З+r}{2r}\right)^3=\frac{4\pi^2}{gR_З^2}\cdot\left(\frac{R_З+r}{2}\right)^3.$$

$T_e=\frac{2\pi}{R_З}\cdot\sqrt{\frac{(2R_З+h)^3}{8g}}$. Після підстановки $T_е\approx5286$ с. Тоді час польоту – це половина періоду t=2643 с.

Якби Земля не оберталась, то приземлення відбулося б у точці з координатами 0^0 широти і 180^0 довготи. За 2643 с руху корабля Земля повернеться на деякий кут. На 360^0 вона повертається за 24 год, то за 2643 с Земля повернеться на 11^0. Оскільки рух корабля відбувається в напрямку обертання Землі, то координати точки приземлення 0^0 широти і 169^0 східної довготи.

73. У січні 2010 року відбулося протистояння Марса. Оцінити час найближчої повторної такої ж конфігурації планети і тривалість року на планеті, якщо її середня відстань від Сонця 1,524 а.о. (2012 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Третій закон Кеплера $\frac{T_З^2}{T_М^2}=\frac{a_З^3}{a_М^3}$. Звідси $T_М=T_З\sqrt{\frac{a_М^3}{a_З^3}}$.

T=1,881 земних років.

$\frac{1}{S}=\frac{1}{T_З}-\frac{1}{T_М}$. Звідси $S=\frac{T_ЗT_М}{T_М-T_З}$ = 780 земних діб.

74. Карликова планета обертається навколо Сонця по коловій орбіті в площині екліптики. Її синодичний період складає 2 роки. Знайти радіус орбіти планети. (2013 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Відразу можна сказати, що планета обертається навколо Сонця в тому ж напрямі, що і Земля. Інакше, рухаючись назустріч Землі, вона виявлялася б на лінії Сонце-Земля частіше ніж за рік, а тим більше за два роки, незалежно від того, внутрішня ця планета чи зовнішня.

Синодичний період планети S, що обертається навколо Сонця в тому ж напрямі, що і Земля: $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_з} \pm \frac{1}{S}$. Звідси, якщо планета внутрішня, то

$\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{2}$. T_1=2/3 року, якщо планета зовнішня $\frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{2}$. T_2=2 роки.

Радіус орбіти планети a, виражений в астрономічних одиницях, обчислюється в роках за III законом Кеплера: $\frac{T_1^2}{T_3^2} = \frac{a_1^3}{a_3^3}$. T_3= 1 рік, $a_з$=1 а.о.

Звідси $a_1^3 = 4/9$, a≈0,765 а.о. Аналогічно $a_2^3 = 4$, a≈1,58 а.о.

75. Астероїд обертається навколо Сонця по круговій орбіті, що лежить в площині екліптики. За дивовижним збігом в кожне протистояння Марса цей астероїд теж виявляється в протистоянні з Сонцем. Чому дорівнює радіус його орбіти? Орбіти Землі і Марса вважати круговими. (2018 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. У задачі відразу ж напрошується тривіальний розв'язок – радіус орбіти астероїда дорівнює радіусу орбіти Марса. Однак він не може реалізуватися практично, так як в цьому випадку астероїд і Марс опиняться в одній точці простору. Знайдемо інші розв'язки.

Синодичний період зовнішньої планети S (а нас цікавлять тільки такі, раз мова йде про протистояння) пов'язаний з періодом обертання цієї планети T і Землі T_0=1 рік співвідношенням $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}$ або $S = \frac{T_0 T}{T - T_0}$. Однак потрібно відразу обумовити, що ця формула справедлива для планети або астероїда, що обертається навколо Сонця в тому ж напрямку, що і Земля. Марс цю умову задовольняє. Визначимо синодичний період Марса:

$$S = \frac{T_0 T_\text{M}}{T_M - T_0} = 2{,}136 \text{ р.}$$

Для виконання умови задачі синодичний період астероїда S_1 не обов'язково має дорівнювати синодичному періоду Марса S. Він може бути меншим в ціле число разів: $S_1 = S/n$.

Тоді період обертання астероїда навколо Сонця $T_1 = \frac{T_0 S_1}{S_1 - T_0} = \frac{T_0 S}{S - nT_0}$

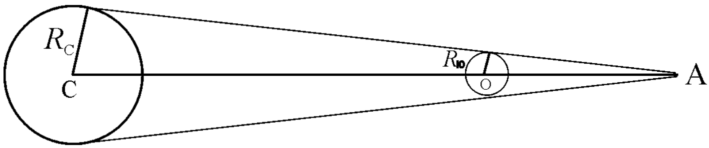
Випадок $n = 1$ відповідає згаданому вище тривіальному розв'язку, який не може бути реалізованим, а при $n = 2$ ми отримуємо період обертання астероїда 15,7 років. За III законом Кеплера радіус його орбіти буде рівним $a = \sqrt[3]{T_1^2} = \sqrt[3]{246{,}49} \approx 6{,}3$ а.о. Якщо $n \geq 3$, то значення періоду T_1 від'ємні.

Це означає, що реалізується випадок зворотного напрямку обертання астероїда, для якого остання формула буде мати вигляд: $T_1 = \dfrac{T_0 S_1}{T_0 - S_1} = \dfrac{T_0 S}{nT_0 - S}$.

При цьому, оскільки астероїд є зовнішнім небесним тілом, то його період T_1 повинен перевищувати один рік. Цю умову задовольняють випадки $n = 3$ і $n = 4$. Період обертання астероїда для цих випадків становить відповідно 2,47 і 1,14 року, а радіус орбіти – 1,82 і 1,09 а.о.

76. З деякого астероїда періодично можна спостерігати повне затемнення Сонця, викликане проходженням по диску Сонця планети Юпітер. При цьому повне затемнення триває трохи більше хвилини. Скільки часу проходить між двома такими послідовними затемненнями? Орбіти Юпітера і астероїда вважати круговими і такими, що лежать в одній площині. Вважати, що радіус Сонця більший за радіус Юпітера в 10 разів. Період обертання Юпітера навколо Сонця прийняти рівним 12 років. (2016 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Очевидно, що орбіта астероїда розташовується далі від Сонця, ніж орбіта Юпітера, і затемнення трапляються в ті моменти, коли Юпітер для астероїда знаходиться в нижньому сполученні, а астероїд для



Юпітера – у протистоянні. З умови, що затемнення тривають не більше хвилини, слідує за аналогією з повними сонячними затемненнями на Землі, що Юпітер і Сонце з астероїда в моменти затемнень видно під одним і тим же кутом. Отже, відстань від Юпітера до астероїда в момент затемнення L=AO в стільки ж разів менша радіуса орбіти астероїда a_a=AC, у скільки разів лінійний радіус Юпітера $R_Ю$ менший лінійного радіуса Сонця $R_С$. $\dfrac{L}{a_a} = \dfrac{R_Ю}{R_C}$. В момент затемнення відстань L дорівнює різниці радіусів їхніх орбіт

L=AC–AO=a_a–$a_Ю$. Отже $\dfrac{a_a - a_Ю}{a_a} = \dfrac{R_Ю}{R_C}$; $\dfrac{a_Ю}{a_a} = 1 - \dfrac{R_Ю}{R_C}$; $\dfrac{a_Ю}{a_a} = \dfrac{9}{10}$.

Знаючи відношення радіусів орбіт за III законом Кеплера отримаємо сидеричний період астероїда. $\frac{T_Ю^2}{T_a^2}=\frac{a_Ю^3}{a_a^3}$. Звідси $T_a^2=T_Ю^2\cdot\frac{a_a^3}{a_Ю^3}$. $T_a\approx 14{,}05$ років.

Оскільки орбіти кругові і лежать в одній площині, затемнення відбуватиметься кожне нижнє сполучення Юпітера, тобто між затемненнями пройде рівно один синодичний період.

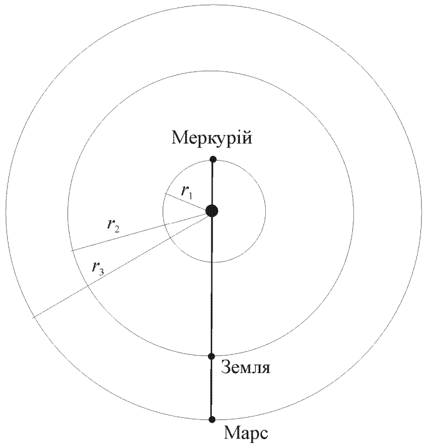
$\frac{1}{S}=\frac{1}{T_Ю}-\frac{1}{T_a}$. Звідси $S=\frac{T_Ю\cdot T_a}{T_a-T_Ю}\approx 82$ роки.

77. В деякий момент часу Земля знаходилась у верхньому сполученні з Меркурієм і в протистоянні з Марсом.

а) Зобразіть це на малюнку.

б) Визначте сидеричні і синодичні періоди Меркурія та Марса.

в) Через який приблизно час така ж конфігурація планет повториться? (під час обчислень заокруглюйте до сотих). (2017 р. III е. 11 к.)



Розв'язок. Нехай r_1 =0,39 а.о. – відстань від Меркурія до Сонця, r_2 =1 а.о. – відстань від Землі до Сонця, r_3=1,52 а.о. – відстань від Марса до Сонця. Тоді для даної конфігурації відстань від Землі до Меркурія становить1,39 а.о, відстань від Землі до Марса 0,52 а.о.

Сидеричні періоди Марса і Меркурія знайдемо з III закону Кеплера $\frac{T_З^2}{T_{пл}^2}=\frac{a_З^3}{a_{пл}^3}$. Звідси $T_{Мер}=\sqrt{a_{Мер}^3}\approx 0{,}24$ р. $T_{Мар}=\sqrt{a_{Мар}^3}\approx 1{,}87$ р.

Знайдемо повторення конфігурації для Землі і Меркурія (синодичний період).

$\frac{1}{S_1}=\frac{1}{T_{Мер}}-\frac{1}{T_З}$. Звідси $S_1=\frac{T_З\cdot T_{Мер}}{T_З-T_{Мер}}\approx 0{,}32$ р.

Знайдемо повторення конфігурації для Землі і Марса (синодичний період).

$\frac{1}{S_2}=\frac{1}{T_З}-\frac{1}{T_{Мар}}$. Звідси $S_2=\frac{T_{Мар}\cdot T_З}{T_{Мар}-T_З}\approx 2{,}15$ р.

Очевидно, що для того щоб конфігурації повторилися, потрібно щоб відбулося ціле число конфігурацій Землі і Меркурія і ціле число конфігурацій

Землі і Марса. Перемножимо синодичні періоди і, оскільки в них дві цифри після коми, то в результаті кому перенесемо теж на дві цифри вправо. $S_1 \cdot S_2$=0,688. Тоді S=68,8 років. Перевіримо це. $\frac{68,8}{0,32}=215$; $\frac{68,8}{2,15}=32$. Отже сполучень Меркурія і Землі відбудеться 215, протистоянь Марса і Землі – 32, а разом їхня конфігурація повториться через 68,8 років.

78. Обчисліть масу Нептуна відносно маси Землі, знаючи, що його супутник знаходиться на відстані 354 000 км від центра планети та період його обертання 5 діб 21 год. Обчислення провести, зіставляючи рух супутника Нептуна з рухом Місяця навколо Землі. (2011 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Запишемо уточнений ІІІ закон Кеплера: $\frac{a_{суп}^3}{T_{суп}^2 M_н}=\frac{a_M^3}{T_M^2 M_З}$.

Середня відстань від Місяця до Землі 384400 км, період обертання Місяця навколо Землі 27,32 доби. Тоді $\frac{M_H}{M_З}=\frac{a_{суп}^3}{a_M^3}\cdot\frac{T_M^2}{T_{суп}^2}$.

Після підстановки $M_H \approx 16,9 M_З$.

Час і календар

79. Відомо, що доба на Землі збільшується на 2 мс за 100 років. Як далеко від нас та епоха, в якій юліанський календар був максимально точним (тобто рік юліанського календаря найбільш близький до тропічного року). В 1900 році тривалість тропічного року була 31 556 926 секунд або 365,242199 діб. Тривалість року юліанського календаря 365,25 діб (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Тривалість року юліанського календаря рівна 365,25 діб. У 1900 році тривалість тропічного року була на 0,007801 доби менше. Оскільки тривалість доби безперервно збільшується, то в році їх стає менше, а значить, юліанський календар був справедливий у минулому. Визначимо, як давно. Різниця в 0,007801 доби відповідає приблизно 674 секундам 1900 року (так звана ефемеридна секунда). Цей час повинен "набігти" за $\frac{674\cdot 100}{0,002}=33,7$ мільйонів років.

80. В яких найближчих роках до 2011 року (попередніх і наступних) у лютому було і буде найбільше вихідних днів (субота і неділя)? (2011 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Якщо рік невисокосний, то у лютому 28 днів і рівно 7 тижнів, отже 8 вихідних (4 суботи і 4 неділі). Максимальна кількість вихідних буде у високосному році при умові, що 1 лютого або субота (5 субот і 4 неділі) або неділя (4 суботи і 5 неділь). 1 лютого 2011 року було у вівторок. У найближчому 2012 високосному буде у середу (зміщення відбувається на 1 день (365/7=52 і 1 в остачі). Між високосними роками відбувається зміщення днів на 5 вперед (Кожен рік зміщення на 1 день вперед, а у високосному на два 366/7=52 і 2 в остачі), або це те саме, що на 2 назад. Отже, 2016 – понеділок, 2020 – субота.

Якщо рахувати назад, то 2008 – п'ятниця, 2004 – неділя.

Отже найбільше люди відпочивали у лютому 2004 року і будуть відпочивати у лютому 2020 року.

81. В деякому році 1 січня припадає на понеділок. Знайдіть мінімально можливу і максимально можливу кількість років, які можуть пройти до наступного 1 січня, яке також попадає на понеділок. (2015 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Рік залежно від того високосний чи ні містить 365 або 366 днів. Це складає 52 повних тижні і один або два дні (два для високосного). Тому можливі варіанти будуть 1+1+1+2+1+1 (6 років) 2+1+1+1+2 (5 років)

1+1+2+1+1+1 (6 років) 1+2+1+1+1+2+1+1+1+2+1 (10 років)

Тому мінімальна кількість років 5, а максимальна 10.

82. Якою може бути максимальна кількість місяців в році, таких що одна і та ж фаза Місяця протягом кожного з цих місяців повторюється по два рази? Які це місяці? (2013 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Очевидно, що фази Місяця не можуть повторюватися в лютому – його тривалість навіть у високосні роки менша, ніж найменше можливе значення синодичного місяця. Всі останні місяці в календарі, навпаки, завжди довші за синодичний місяць, тому в кожному з цих місяців можуть існувати фази Місяця, що повторюються по два рази. Це буде для 1 числа місяця і 1+29,5=30 числа місяця, або для 2 і 31. Якщо це буде січень, то завдяки, тому, що в лютому 28 або 29 днів, такої фази в лютому не буде. (для високосного року обов'язково випадок для січня 2 і 31 число) і така ж фаза повториться у березні 1 і 30 числа, або 2 і 31 (для невисокосного року у випадку для січня 2 і 31 число). Тобто одна і та ж фаза по два рази повториться в двох календарних місяцях: січні і березні. Інших таких місяців бути не може. Причому такі випадки реалізуються в кожному році, звичайно для різних фаз Місяця.

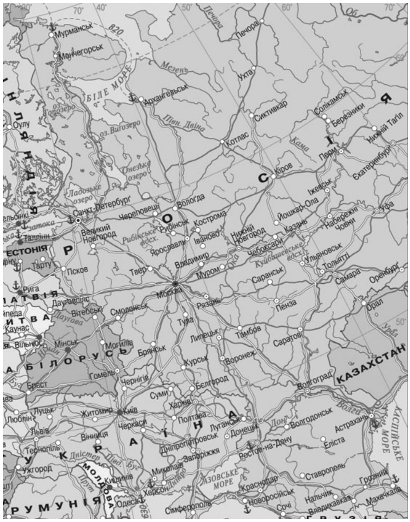
83. Скільки зоряних діб у столітті? (2015 р. ІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Сонячна доба довша від зоряної на 3 хв. 56,55 с. За рік ця різниця складає цілу добу. Отже середня тривалість року становить 365,25 сонячних або 366,25 зоряних діб. У столітті налічується 366, 25 зоряних діб.

84. Здійснивши навколосвітню подорож (1522 р.) команда Магеллана прибула до Іспанії в п'ятницю, хоча за корабельним журналом, який ретельно вівся щодня, був четвер. Поясніть, чому так сталося. (2014 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. Експедиція Магеллана переміщалась зі сходу на захід. Тому через кожні 15° Сонце для неї сходило і заходило сьогодні на 1 год. раніше, ніж учора. За весь час подорожі це відбувалось 24 рази. В результаті відставання часу становило цілу добу.

85. Дві людини, один в Києві, другий в Росії одночасно спостерігали істинний полудень. На наступний день кожен з них перемістився на 200 км на захід і один із них спостерігав істинний полудень дещо раніше за іншого. Хто це був, киянин чи росіянин? Поблизу якого з міст, нанесених на карті міг перебувати спостерігач з Росії? Для якого із спостерігачів Сонце опівдні було на більшій висоті? Поясніть. (2015 р. III е. 10 к.)



Розв'язок. Одночасно можна спостерігати істинний полудень, знаходячись на одному меридіані. Отже в Росії це було біля Санкт-Петербурга. Після 200 кілометрового переїзду один з них спостерігав полудень раніше, отже він знаходився східніше за іншого, а значить довгота в нього змінилася менше. Подивившись на карту бачимо, що лінії довготи розширюються з північного полюса до екватора. Отже раніше полудень спостерігав киянин, і оскільки він знаходиться південніше, то висота Сонця опівдні в нього була вищою.

86. І в Лондоні, і в Канберрі (столиці Австралії) час на літній період переводиться на одну годину вперед у порівнянні з зимовим часом. На скільки годин може відрізнятися час у цих двох містах, якщо довгота Канберри складає 150^0 східної довготи? (2018 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. Лондон знаходиться в нульовому годинному поясі. Оскільки ширина одного годинного пояса складає 15^0, то Канберра знаходиться в 10 годинному поясі. При переході на літній час до поясного часу додається 1 година. Оскільки Лондон знаходиться у Північній півкулі, а Канберра – у Південній, то початок літа в цих місцях наступає з різницею у півроку. Коли в Лондоні годинник переводять на літній час, в Канберрі, навпаки, на зимовий. Лондон житиме по часові 1-го годинного пояса, а Канберра – по часу 10-го годинного пояса. Час у вказаних містах різнитиметься на 9 годин. Через півроку Лондон переходить на зимовий час і використовує час 0-го пояса, а Канберра переходить на літній час і використовує час 11-го пояса. Різниця досягає 11 годин.

87. 1 січня 2013 року в Зарічному Сонце зійшло в 8 годин 22 хвилини, а в Форосі (Крим) в 7 годин 20 хвилин. Захід же Сонця в Зарічному і в Форосі відбувся в один і той же час - в 16 годин 16 хвилин. Чому моменти сходу відрізняються, а моменти заходу співпадають? (2013 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Різна тривалість світлового дня в Зарічному і у Форосі пояснюється тим, що ці міста знаходяться на різних широтах. Зарічне північніше від Фороса, тому взимку тривалість дня в Зарічному менша. "Несиметричність" зменшення тривалості світлового дня обумовлена тим, що Зарічне і Форос, хоча і знаходяться в одному часовому поясі, розташовані на істотно різних довготах. Форос на схід від Зарічного, тому моменти сходу і заходу в Форосі за інших рівних умов наступають раніше, ніж в Зарічному.

У результаті і перший, і другий чинник зміщують час сходу в Форосі в порівнянні з Зарічним вперед (на раніший момент часу), а ось час заходу перший чинник зміщує назад (на пізніший момент), а другий – вперед, і їх вплив компенсується.

88. 20 січня 2017 року о 20 годині за місцевим часом з міста з координатами 0^0 широти 120^0 східної довготи на схід одночасно вирушили корабель і літак. Через деякий час літак приземлився в місті з координатами 0^0 широти, 60^0 західної довготи. Знайдіть дату і місцевий час в місті прибуття в момент приземлення літака, а також дату і місцевий час на кораблі в той же момент. Вважати, що і літак, і корабель рухаються рівномірно і прямолінійно, швидкість літака дорівнює 1000 км/год, швидкість корабля – 25 км/год. (2017 р. ІІІ е. 11 к.)

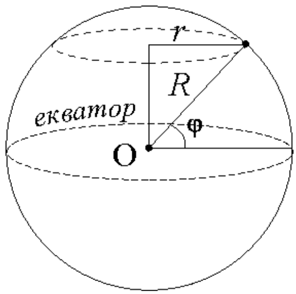
Розв'язок. Знайдемо відстань, яку пролетів літак. Оскільки і початкова, і кінцева точки його маршруту знаходяться на екваторі (широта обох дорівнює нулю), то він і рухався по екватору. Порівнявши довготи початкової і кінцевої точок, можна побачити, що відрізняються вони на 180^0, тобто літак пролетів рівно половину кола земного екватора. Обчисливши довжину екватора за відомим радіусом Землі $l = 2\pi R$, отримуємо, що літак пролетів приблизно 20 000 км і, оскільки рухався зі швидкістю 1000 км/год, то витратив на це 20 годин.

Тепер з'ясуємо, наскільки відрізняється місцевий час на початку і в кінці шляху літака. Оскільки знаходяться вони в діаметрально протилежних точках Землі, відповідь досить очевидна – на 12 годин. Починався політ в східній півкулі, а закінчився – в західній, тому час в кінці шляху відстає від часу на початку на 12 годин (літак під час руху перетнув лінію зміни дат). Тому місцевий час в точці прильоту в момент прильоту літака буде на 20 – 12 = 8 годин більший, ніж місцевий час в точці старту в момент старту, і літак приземлиться о 4 годині 21 січня за місцевим часом.

За ті ж 20 годин корабель встиг проплисти всього лише 25 · 20 = 500 км. В градусній мірі це відповідає $4^0,5$ (360^0 відповідає довжина екватора 40 000 км). Так як він теж рухається на схід, то місцевий час в тій точці, в яку він прибуде, буде обганяти місцевий час в точці старту (корабель лінію зміни дат перетнути не встигне). Оцінимо, наскільки. Так як все коло земного екватора (360^0) відповідає 24 годинам, то 1^0 відповідає 4 хвилинам, а $4^0,5$ відповідає 18 хвилинам. Отже місцевий час в початковій і кінцевій точках його плавання відрізняється на 18 хвилин.

Отже, в кінцевій точці плавання корабля місцеві дата і час будуть такими: 16 годин 18 хвилин 21 січня.

89. Літак, виконуючи чартерний рейс Анкоридж – Магадан, вилітає з американського міста Анкориджа (60^0 пн.ш., 150^0 зх.д.) 5 червня о 8.00 за місцевим часом. У російському місті Магадан (60^0 пн.ш., 150^0 сх.д.) літак приземлився 6 червня о 7.30 за місцевим часом. Ураховуючи, що рейс виконувався уздовж паралелі 60^0 пн.ш., визначте швидкість літака. (2020 р. ІІІ е. 10 к.)



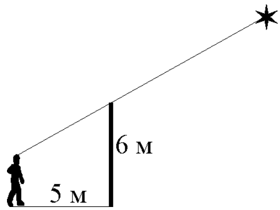
Розв'язок. Між Магаданом і Анкориджем, які лежать відповідно у східній і західній півкулях, різниця у місцевому часі складає 20 год (різниця довгот – 300^0, а 15^0 відповідають 1 годині різниці у часі). Відлік часу ведеться із заходу на схід, тому на момент вильоту літака з Анкориджа в Магадані було 4 год ранку, але вже 6 червня (слід пам’ятати про лінію зміни дат). Оскільки літак приземлився о 7.30 за місцевим часом Магадана, то політ триває 3,5 год. (7.30 – 4.00). Знайдемо довжину паралелі 60^0: Її радіус $r = R\cos\varphi$, де R – радіус Землі. Тоді довжина $s = 2\pi \cdot R\cos 60^0 \approx 20000$ км. Літак пролетить в градусній мірі $360^0 - 300^0 = 60^0$. В кілометрах це становитиме $l = \frac{s}{360^0} \cdot 60^0 \approx 3333$ км. Поділивши цю відстань на тривалість польоту (3333:3,5), одержимо швидкість літака – приблизно 950 км/год.

90. 24 січня 2014 року в населеному пункті поблизу Києва ($50^0\ 25'$ північної широти, $30^0\ 30'$ східної довготи) Сонце зайде о 16 годині 37 хв. О котрій годині зайде Сонце поблизу Львова ($50^0\ 25'$ північної широти, 24^0 східної довготи) та поблизу польського міста Жешува ($50^0\ 25'$ північної широти, 22^0 східної довготи)? Чи може пілот літака, рухаючись між цими містами постійно бачити як заходить Сонце? Якщо може, то в якому напрямку і з якою швидкістю повинен летіти літак? (2014 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. Переведемо довготи, враховуючи, що 360^0=24 години, тобто $1^0 = 4хв$, $1' = 4сек$. Для Києва: $30^0 \cdot 4$ хв=120 хв = 2^h; $30' \cdot 4$ сек=120 сек=2^m. Отже $\lambda=2^h\ 02^m$. Аналогічно для Львова $24^0 \cdot 4$ хв=96 хв= 1 год 36 хв. $\lambda=1^h\ 36^m$, для Жешува $\lambda=1^h\ 28^m$. Ці міста знаходяться на захід від Києва, тому в Львові Сонце зайде на 26 хв пізніше, тобто о 17 год 03 хв, у Жешуві на 34 хв пізніше, тобто о 17 год 11 хв за Київським часом, але Жешув знаходиться в I годинному поясі, а Київ у II, тому в Жешуві в момент заходу Сонця годинник показуватиме 16 год 11 хв.

Може, якщо рухатиметься у бік обертання Землі з швидкістю обертання Землі на даній паралелі. Літак повинен летіти із сходу на захід, тобто з Києва до Жешува. Знайдемо цю швидкість.

Період обертання Землі T=24 год. Оскільки політ відбувається на 50-й паралелі, то радіус кола, по якому рухається літак $r = R \cdot \cos\varphi$, де R=6400 км (радіус Землі) $\varphi=50^0$. Тоді швидкість обертання Землі на 50-й паралелі $\upsilon = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi R \cdot \cos\varphi}{T} \approx 1071$ км/год.



91. Учень Микола, який проживає в Рівному ($50^0\ 35'$ північної широти $26^0\ 8'$ східної довготи, 2 годинниковий пояс) на астрономічному зльоті познайомився з Джовані, який проживає в Римі (41^0 53' північної широти 12^0 29' східної довготи, 1 годинниковий пояс). В один з січневих вечорів Джовані зателефонував Миколі і розповів, що в нього місцевий середній сонячний час становить $22^h\ 00^m$, він спостерігає за Полярною зіркою і бачить її, спрямувавши погляд на вершину телеграфного стовпа (h=6 м), який знаходиться на відстані 5 м від нього. Микола теж подивився на Полярну зірку так, щоб погляд був спрямований на вершину стовпа (h=6 м) і зауважив, що відстань від нього до стовпа інша. Визначити цю відстань і вказати місцевий середній сонячний час у Миколи в момент, коли відбувалась розмова, а також час, який показували годинники на мобільних телефонах у хлопців. Відстань від Землі до очей хлопців вважати однаковою. (2014 р. III е. 11 к.)

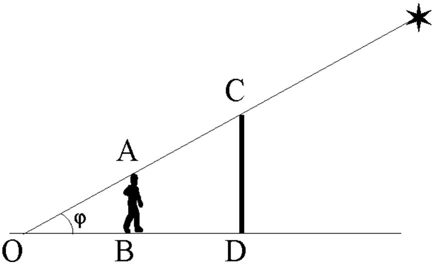
Розв'язок. Висота полюса світу (Полярної зорі) практично дорівнює географічній широті місця спостереження. Отже для Джовані $\varphi=h=41^0$ 53'=$41{,}88^0$. З прямокутного трикутника ODC: $OD = \dfrac{CD}{tg\varphi} = \dfrac{6}{0{,}9} = 6{,}66\ м$. Тоді OB=1,66 м. З прямокутного трикутника OBA: $AB = OB \cdot tg\varphi \approx 1{,}5\ м$.

Для Миколи $\varphi=h=50^0$ $35'=50,58^0$. Тоді

$$OD=\frac{CD}{tg\varphi}=\frac{6}{1,22}=4,92\ м,$$

$$OB=\frac{AB}{tg\varphi}=\frac{1,5}{1,22}=1,22\ м.$$ Тоді

відстань до стовпа BD= 3,7 м.



Використаємо співвідношення між місцевим і всесвітнім часом $T_м=T_0+\lambda$, λ – географічна довгота, виражена в годинах і хвилинах. Переведемо довготи, враховуючи, що $1^0=\frac{1}{15}h$: Для Риму: $\lambda=12^0\ 29'=12,48^0=0,83h=0^h\ 50^m$. Для Рівного: $\lambda=26^0\ 8'=26,13^0=1,74\ h=1^h\ 44^m$.

Отже всесвітній час $T_0=22^h-0^h\ 50^m=21^h\ 10^m$. Середній місцевий час у Рівному $T_м=21^h\ 10^m+1^h\ 44^m=22^h\ 54^m$.

Поясний час у Римі (час на мобільному телефоні Джовані, Рим у I поясі): $T_п=T_0+n=22^h\ 10^m$. Поясний час у Рівному (час на мобільному телефоні Миколи, Рівне у II поясі): $23^h\ 10^m$.

92. 22 червня 2014 року під час аварійної посадки космічного корабля ви катапультувались і успішно приземлились. Виявилось, що в місцевості Вашого приземлення полудень наступив о 7 год 42 хв київського часу, а висота Сонця над горизонтом при цьому становила 72^0. Визначте географічні координати Вашого приземлення. (2015 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Схилення Сонця в день літнього сонцестояння 22 червня 23^0 $27'$. Сонце опівдні на висоті 72^0 може знаходитись як на Південь від зеніту, так і на Північ. В першому випадку

$h=90^0-\varphi+\delta$. Звідси $\varphi=41^0\ 27'$. В другому випадку $h=90^0-\delta+\varphi$. Звідси $\varphi=5^0$ $27'$.

Оскільки полудень (місцевий час 12 год) наступив о 7 год 42 хв Київського часу, то за Грінвичем це становить 4 год 42 хв (2 год різниці поясного часу і 1 год літнього). Отже пункт приземлення знаходиться на схід і різниця в часі з Грінвичем 7 год 18 хв. В градусах це становить: $109^0\ 30'$ (1 год = 15^0, 1 хв = $15'$). Отже можливі дві точки приземлення: $41^0\ 27'$ пн.ш, 109^0 $30'$ сх.д, $5^0\ 27'$ пн.ш, $109^0\ 30'$ сх.д,

93. Турист, перетинаючи екватор помітив Сонце точно в зеніті. В цей момент він подивився на годинник, який показував київський час (6 год 50 хв) і час по Гринвічу (3 год 50 хв). Визначте дату його подорожі і довготу його місцезнаходження. (2016 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. На екваторі Сонце може перебувати в зеніті о 12 год місцевого часу двічі на рік: 21 березня і 23 вересня. Оскільки різниця між київським і гринвіцьким часом 3 год, це означає, що в Києві (2 пояс) літній час, отже дата подорожі 23 вересня. Різниця між місцевим часом і гринвіцьким 8 год 10 хв. Переведемо цей час в градуси. В градусах це становить: $122^0\ 30'$ (1 год = 15^0, 1 хв = $15'$). Отже довгота перетину екватора $122^0\ 30'$ східної довготи.

94. Український фанат футболу, будучи на виїзному матчі своєї команди помітив, що Сонце 22 червня було в найвищій точці о 15 год 15 хв за київським часом, а висота Полярної зірки над горизонтом опівночі становила 40^0. Після матчу він вирішив здійснити подорож на південь вздовж меридіану і проїхав 223 км.

а) Визначте географічні координати місця, в яке приїхав турист після подорожі.

б) На якій висоті над горизонтом тут буде Полярна зірка о 3 годині ранку? (2017 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. Оскільки події відбувалися влітку, то у Києві літній час відрізняється від Гринвіцького на 3 год. Отже Всесвітній час 12 год 15 хв, а Сонце в найвищій точці буває о 12 годині за місцевим часом. Це означає, що довгота перебування туриста $3^0 45'$ західної довготи ($1^0 \to 4$ хв). Висота Полярної зірки визначає географічну широту місця перебування. Оскільки у південній півкулі цієї зорі не видно, то широта місця, де був футбольний матч 40^0 пн.ш. (До речі, це Мадрид). Під час руху на південь вздовж меридіану довгота не змінюється, а широта зменшується. З географії відомо, що 1^0 довготи відповідає приблизно x=111,5 км (або знаючи радіус Землі, довжина меридіана $l=2\pi R \approx 40192$ км. Тоді $x = \dfrac{40192}{360^0} \approx 111{,}5$ км). Отже турист змістився на 2^0. Його координати тепер 38^0 пн.ш., $3^0 45'$ зх.д. Положення Полярної зірки для даної широти практично не змінюється, тому незалежно від часу доби її висота буде 38^0.

95. Широта Осло 60^0 пн.ш., а довгота $10^0 45'$сх.д. Широта Риги 57^0 пн.ш., а довгота $24^0 6'$ сх.д.

а) В якому з міст Сонце в істинний полудень знаходиться вище? На скільки градусів?

б) Який час показуватиме годинник жителя Осло в той момент, коли в Ризі Сонце знаходиться найвище над горизонтом? (2017 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. а) Сонце знаходиться вище в Ризі на 3^0.

б) Переведемо довготу Риги в години. $24^0 = 24 \cdot 4^m = 96^m = 1^h 36^m$. $6' = 6 \cdot 4^s = 24^s$. Отже довгота Риги $1^h 36^m 24^s$. Оскільки в Ризі Сонце найвище над горизонтом, то це означає, що в Ризі 12^h за місцевим часом. В Гринвічі в цей момент

$12^h–1^h36^m24^s=10^h23^m36^s$. Довгота Осло $10^0 45'$сх.д., отже Осло знаходиться в I годинному поясі, тому годинник жителя Осло покаже $10^h23^m36^s+1^h=11^h23^m36^s$.

в) Сонце максимально опускається під горизонт у нижній кульмінації. Висота Сонця в нижній кульмінації $h = -90^0 + \varphi + \delta$, де δ – схилення Сонця, яке може бути максимальним $23^0 27'$. Для Риги $h= -9^0 33'$, для Осло $h= -6^0 33'$. Отже для Осло можливе короткочасне настання «білих ночей», а для Риги – ні.

96. Широта Осло 60^0 пн.ш., а довгота $10^0\ 46'$ сх.д. Широта Риги 57^0 пн.ш., а довгота $24^0\ 6'$ сх.д.

а) Визначте відстань між містами.

б) Який час показуватиме годинник жителя Риги в той момент, коли в Осло Сонце знаходиться найвище над горизонтом?

в) Чи можливі «білі ночі» в цих містах? Поясніть розрахунками. («Білі ночі» наступають тоді, коли Сонце ховається під горизонт не більше, ніж на 7^0) (2018 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. а) Неважко визначити, що Рига знаходиться на 3^0 південніше і на $13^0 20'$ східніше, ніж Осло. Оскільки міста знаходяться не далеко одне від одного, то кривизною земної поверхні можна знехтувати і визначити відстань за теоремою Піфагора. Однак довжини дуг 1^0 по меридіану і по паралелі співпадають лише на екваторі.

Використаємо з курсу географії, що дуга 1^0 земного меридіана приблизно дорівнює 111 км. Або обчислимо, що довжина всього меридіана $l = 2\pi R = 6{,}28 \cdot 6378 = 40053{,}8$ км, що відповідає 360^0. Тоді 1^0 відповідає 40053,8/360≈111 км. Отже 3^0 відповідає 333 км.

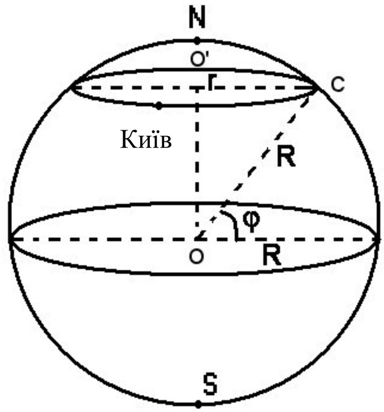
На широті 60^0 радіус кола паралелі вдвічі менший, ніж радіус кола екватора, (радіус кола екватора дорівнює радіусу Землі R, а радіус кола 60 паралелі $r=R\cdot\cos 60^0=R/2$), отже довжина кола шістдесятої паралелі теж вдвічі менша за довжину кола екватора. Це означає, що 1^0 шістдесятої паралелі відповідає довжина ≈55,5 км. $13^0 20'$ відповідає 740 км. За теоремою Піфагора відстань між містами $l = \sqrt{333^2 + 740^2} \approx 811{,}5$ км .

б) Переведемо довготу Осло в години. $10^0=10\cdot 4^m=40^m$, $46'=46\cdot 4^s=184^s=3^m4^s$.

Отже довгота Осло 43^m4^s. Оскільки в Осло Сонце найвище над горизонтом, то це означає, що в Осло 12^h за місцевим часом. В Гринвічі в цей момент $12^h–43^m4^s=11^h16^m56^s$. Довгота Риги $24^0\ 6'$сх.д., отже Рига знаходиться в II годинному поясі, тому годинник жителя Риги покаже $11^h16^m56^s+2^h=13^h16^m56^s$.

в) Сонце максимально опускається під горизонт у нижній кульмінації. Висота Сонця в нижній кульмінації $h = -90^0 + \varphi + \delta$, де δ – схилення Сонця, яке може бути максимальним $23^0 27'$ в день літнього сонцестояння. Для Риги $h= -9^0 33'$, для Осло $h= -6^0 33'$. Отже для Осло можливе короткочасне настання «білих ночей» поблизу 22 червня, а для Риги – ні.

97. Оцінити, наскільки може відрізнятися місцевий час в межах Києва (протяжність Києва з заходу на схід 56 км). (2019 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок. Як відомо, місцевий час різний на різних меридіанах (географічних довготах) і $\Delta t = t_1 - t_2 = \lambda_1 - \lambda_2$ (якщо довготи виражені в одиницях часу). Потрібно оцінити кутову відстань $\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$ між крайньою західною S_1 і крайньою східної S_2 точками Києва. З умови задачі $S_1 S_2 = 56$ км. Для малих відстаней її можна вважати дугою кола $S_1 S_2$. Кутова відстань α пов'язана з довжиною дуги $S_1 S_2$ наступним чином: $\frac{\alpha}{360^0} = \frac{S_1 S_2}{2\pi r}$. Тут α вимірюється в градусах, а r – радіус малого кола – паралелі, на якій лежить Київ (широта $\varphi \approx 50^0$). З малюнка, отримуємо $r = R \cdot \cos\varphi$, де R – радіус Землі. Отже, $r = 6370 \cdot \cos 50^0 \approx 4100$ км.

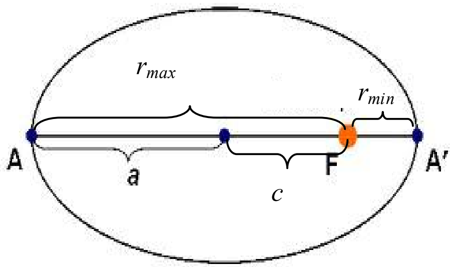
$$\alpha = \frac{360^0 \cdot 56 \text{ км}}{2\pi \cdot 4100 \text{ км}} \approx 0{,}8^0 .$$

Оскільки одна година часу відповідає 15^0 в кутовій мірі, то різниця часу на різних кінцях Києва $\Delta t = \frac{\alpha}{15^0} \approx 0{,}05$ год або приблизно 3 хвилини.

Зоряні величини

98. Оцініть, скільки зір таких як Канопус (α Кіля – друга по яскравості зірка нічного неба, зоряна величина -1^m) потрібно зібрати разом, щоб вони світили так само яскраво як повний Місяць (зоряна величина $-12{,}7^m$)? (2012 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Щоб розв'язати цю задачу, необхідно знати, що зоряні величини не можна додавати. Додаються лише освітленості, створювані світилами на Землі. Тому, аби порахувати кількість зірок, необхідно від зоряних величин перейти до освітленостей. Зв’язок між зоряною величиною і освітленістю виражається формулами: $m = -2{,}5\lg(E) + const$ або $E = 10^{0{,}4(const-m)}$. Оскільки за умовою деяка кількість "Канопусів" повинна світити як повний Місяць, то повинно



виконуватися співвідношення $E_M = N \cdot E_{can}$, де N – шукане число зірок. Тоді

$$N = \frac{10^{0{,}4(const-m_M)}}{10^{0{,}4(const-m_{can})}} = 10^{0{,}4(m_{can}-m_M)} = 10^{4{,}7} \approx 5 \cdot 10^4 \ .$$

99. Знайти різницю видимих зоряних величин Сонця взимку і влітку, якщо ексцентриситет земної орбіти 0,017. (2015 р. III е. 11 к.)

Розв’язок. Точку перигелію A′ Земля проходить взимку, а точку афелію A – влітку.

$c=ea$. Тоді $r_{min} = a-c = a(1-e)$,

$r_{max} = a+c = a(1+e)$,

Видимі зоряні величини: $m_{max}=M+5-5\lg r_{min}$; $m_{min}=M+5-5\lg r_{max}$ Тоді різниця зоряних величин $\Delta m = m_{max} - m_{min} = 5\lg r_{max} - 5\lg r_{min}$.

$$\Delta m = 5\lg\frac{1+e}{1-e} \approx 0{,}074 \ .$$

100. Що яскравіше освітлює Землю: Сіріус ($-1{,}5^m$) чи всі зорі ($\approx 5{,}5^m$), яких на півсфері нічного неба біля 1600? (можливо знадобиться,що lg 1600=3,2; lg 2,512=0,4 (2015 р. II е. 11 к.)

Розв’язок. Приймемо середню яскравість вказаних слабких зірок за $m_1=5{,}5^m$. Тоді їх сумарний блиск відповідає одній зорі, яка у 1600 разів яскравіша за m_1, тобто $\frac{I_m}{I_{m1}} = 1600$. У формулу $m = m_1 - 2{,}5\lg\left(\frac{I_m}{I_{m1}}\right)$ підставимо значення і отримаємо: $m = 5{,}5 - 2{,}5\lg(1600) = -2{,}5^m$. Отже відмінність у зоряних величинах даних зір і Сіріуса 1, що відповідає відмінності у видимому блиску у 2,5 разів. Тобто зорі від 5^m до 6^m освітлюють Землю у 2,5 рази яскравіше, ніж один Сіріус.

101. Яку зоряну величину має зоря, що створює такий самий блиск, як і зорі потрійної системи, що складається із зірок 5, 6 і 8 зоряної величини? (2016 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Нехай зірка 8^m створює на Землі освітленість E. Тоді зірка 6^m створить освітленість $2.512^2 \cdot E$, а зірка 5^m – освітленість $2,512^3 \cdot E$. Сумарна освітленість від трьох зірок буде дорівнює $E_0 = E + 2,512^2 \cdot E + 2,512^3 \cdot E = 23,16 \cdot E$. Згідно формули Погсона $\frac{E_0}{E} = 2,512^{m-m_0}$.

$\lg 23,16 = (m - m_0)\lg 2,512$. $m - m_0 = \frac{1,36}{0,4}$. $m_0 \approx 8-3,4=4,6^m$. (Формулу Погсона можна записати у вигляді $m - m_0 = 2,5\lg\frac{E_0}{E}$ і отримається аналогічний результат). Зоряна величина потрійної системи буде дорівнює $4,6^m$.

102. Фазою небесного тіла називається відношення площі освітленої області видимого диска небесного тіла до площі повного диска. При якій фазі Місяця його видима зоряна величина буде на $2^m,5$ більша, ніж у повні? Поверхневу яскравість освітленої частини диска Місяця вважати постійною. (2017 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Відомо, що зміна освітленості, створюваної об'єктом в 100 разів, означає зміну його зоряної величини на 5^m. Оскільки в даному випадку зоряна величина змінилася на $2,5^m$, тобто вдвічі, то це означає, що освітленість зменшилася (порівняно з освітленістю в повному місяці) в $\sqrt{100} = 10$ разів. (Або різниця на 1 зоряну величину означає відмінність у видимому блиску в 2,512 разів. Тоді відмінність на $2,5^m$ змінює блиск або освітленість в $2,512^{2,5}=10$). Отже, повинна бути освітлена 0,1 частина диска, тобто фаза Місяця дорівнює 0,1.

103. З поверхні якої планети Сонячної системи Земля буде виглядати найбільш яскравою і який у неї буде при цьому блиск? Блиск повної Землі з поверхні Місяці дорівнює -17^m. (2018 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Блиск Землі буде тим більший, чим ближче вона буде розташовуватися до пункту спостереження, і чим більша у неї буде при цьому фаза. Тому ми можемо навіть не розглядати планети-гіганти, які знаходяться дуже далеко від Землі. Досить близько до Землі під час своїх великих протистоянь може підійти Марс, але в цей час Земля буде повернута до нього своєю неосвітленою стороною, і її блиск буде далекий від максимального. Поблизу свого верхнього сполучення з Сонцем Земля буде мати практично повну фазу, але знову-таки буде віддалена від Марса більш ніж на 2 а.о. Набагато ближче Земля в повній фазі може розташовуватися до Меркурія і Венери під час своїх протистоянь на цих планетах. Але Венера оповита щільними хмарами, і з її поверхні ми не зможемо побачити Землю, якою яскравою вона б не була. В результаті, найяскравіше Земля виглядає з поверхні Меркурія, коли обидві планети перебувають по одну сторону від

Сонця. Середня відстань від Меркурія до Сонця 0,39 а.о, тоді від Меркурія до Землі 0,61 а.о. або 0,61·149600000 км ≈ 91,3 млн.км.

Формула Погсона $\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{m_1-m_2}$ або $\frac{E_2}{E_1} = 10^{0{,}4(m_1-m_2)}$. Враховуючи, що освітленість обернено пропорційна квадрату відстані, цю формулу можна записати: $\frac{r_1^2}{r_2^2} = 10^{0{,}4(m_1-m_2)}$, $2\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 0{,}4(m_1-m_2)$, $5\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = m_1-m_2$

Якщо з відстані Місяця в 384400 км Земля має блиск -17^m, то з відстані Меркурія він буде дорівнювати

$m_1 = m_2 + 5\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = -17^m + 5\lg\left(\frac{91300000}{384400}\right) \approx -5{,}1^m$. (Якщо Меркурій при цьому знаходиться поблизу точки афелію своєї витягнутої орбіти, то його відстань від Сонця складає 0,47 а.о., а від Землі – близько 0,53 а.о. або 79,3 млн. км. Тоді блиск Землі $-5{,}4^m$)

104. Що яскравіше при спостереженні оком – одна зоря 1^m, три зорі 2^m, чи п'ять зір 3^m? (2018 р. ІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Одна зоря 1-ї зоряної величини у 2,512 рази більш яскрава за зорю 2-ї, і в 6,3 за зорю 3-ї. Отже, три зорі 2-ї будуть яскравішими, а п'ять зір 3-ї слабшими від зорі 1-ї зоряної величини.

(При порівнянні яскравостей, порівнюються їх загальні блиски (освітленості) E. Із формули Погсона $\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{m_1-m_2}$, де E_2 – блиск зорі m_2=2 зоряної величини, E_1 – блиск зорі m_1=1 зоряної величини. Тоді E_1=2,512 E_2. Три зорі другої зоряної величини створюють блиск $3E_2$, що більше за 2,512 E_2, тобто за E_1. Аналогічно E_1=$2{,}512^2$ $\cdot E_3$=6,31 E_3 . П'ять зір третьої зоряної величини створюють блиск $5E_3$, що менше за 6,31 E_3, тобто за E_1.)

105. Затемнювано-змінна складається з двох зір з однаковим блиском 6^m і температурами поверхні 5000 К і 10000 К. Чому дорівнює блиск змінної в моменти головного і вторинного мінімумів блиску і поза затемненнями? Вважати, що поверхнева яскравість зорі однакова по всьому її диску, а Земля знаходиться точно в площині орбіт зірок. (2019 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Відстані до обох зірок можна вважати однаковими, значить однакові і світності зірок. При цьому одна з них вдвічі гарячіша (температура вдвічі більша), тобто, випромінює в 16 разів більше енергії з одиниці площі. Отже, із закону Стефана-Больцмана ($L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4$) більш гаряча зоря в 4 рази менша за розмірами. Поза мінімумами ми бачимо обидві зорі 6-ї величини (m_1=6), і можемо знайти їх сумарний блиск m: $\frac{E_1+E_1}{E_1}=2{,}512^{m_1-m}$;

$\lg 2{,}512^{m_1-m}=\lg 2$; $0{,}4\cdot(m_1-m)=\lg 2$; $m_1-m=2{,}5\lg 2$; m = 6 – 0,75 = 5,25.

Оскільки Земля знаходиться в площині орбіт, то в певний момент більш холодна зоря, маючи більші розміри, може повністю закрити більш гарячу зірку. Відомий блиск змінної на нашому небі складе m_1 = 6, і це буде головний мінімум. Під час вторинного мінімуму гаряча зірка пройде перед холодною. Оскільки її радіус в 4 рази менший, то площа поверхні менша в 16 разів ($S=4\pi R^2$) і тому вона закриє лише 1/16 диска холодної зорі. У цей час ми будемо реєструвати все випромінювання однієї зірки 6^m і 15/16 випромінювання другої зірки того ж блиску. Знайдемо блиск змінної:

$$\frac{E_1+\frac{15}{16}E_1}{E_1}=2{,}512^{m_1-m_2}\ .\ 0{,}4\cdot(m_1-m_2)=\lg\frac{31}{16};\ m_1-m_2=2{,}5\lg\frac{31}{16};$$

m_2 = 6 – 0,72 = 5,28.

106. Дві зорі мають однакові маси і світності, але поверхня однієї з них удвічі гарячіша, ніж поверхня іншої. У якої з зір середня густина більша? У скільки разів? (2014 р. ІІІ е. 11 к.)

Згідно формули $\frac{R}{R_c}=(L)^{0,5}\cdot\frac{T_c^2}{T^2}$ світність $L\sim R^2T^4$. (Або за законом Стефана-Больцмана $L=4\pi R^2\sigma T^4$). Світність зорі прямо пропорційна квадрату радіуса і четвертому степеню температури. Рівність світностей при температурах, відмінних в два рази, означає, що холодніша зоря має радіус, в 4 рази більший, ніж у гарячої зорі

Оскільки маси однакові, а $M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$, то густина холоднішої зорі в 64 рази менша, ніж гарячої.

107. Аналіз спектра зорі Вега дозволив визначити прискорення вільного падіння на її поверхні: g=150 м/с^2. Використовуючи дані з таблиць визначити: відстань до зорі, абсолютну зоряну величину, світність, радіус, масу. (2013 р. ІІІ е. 11 к.)

Відстань до зорі $r=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}123}=8{,}13$ пк, де p – річний паралакс, який беремо з таблиці. Абсолютна зоряна величина $M=m+5-5\lg r=0{,}03+5-5\cdot 0{,}91=0{,}48$, де m – видима зоряна величина, яку беремо з таблиці.

Світність у світностях Сонця $L = 10^{0,4(5-M)} = 10^{0,4(5-0,48)} = 10^{1,808} = 64,3L_{сонця}$, де $L_{Сонця}$ – світність Сонця, яку беремо з табличних даних. Тоді світність у ватах $L = 257,2 \cdot 10^{26}$ Вт.

Якщо світність взяти у ватах, то із закону Стефана-Больцмана $L = E = 4\pi R^2 \sigma T^4$, де E – потужність випромінювання зорі, R – радіус зорі, σ – стала Стефана-Больцмана, T – температура зорі. Тоді радіус зорі $R = \sqrt{\dfrac{L}{4\pi\sigma T^4}}$. σ, T беремо з табличних даних. Після підстановки

$R \approx 1,6 \cdot 10^9$ м. ($R = (L)^{0,5} \cdot \dfrac{T_c^2}{T^2} \cdot R_c = (64,5)^{0,5} \cdot \dfrac{6000^2}{11000^2} \cdot 6,96 \cdot 10^8 \approx 1,6 \cdot 10^9$ м.

Із закону Всесвітнього тяжіння $mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$. Звідси маса зорі

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{150 \cdot (1,6 \cdot 10^9)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,75 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Карта зоряного неба

108. Визначити час сходу і заходу Сонця для Севастополя (λ=$2^h 14^m$ 10 лютого (змін схилення Сонця і рівняння часу протягом доби не враховувати) (2012 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Знаходимо положення Сонця на екліптиці для даної календарної дати. Для цього сумістимо дату 10 лютого шкали "місяців-дат" з цифрою 12^h годинної шкали накладного круга. Точка перетину небесного меридіану з екліптикою визначає положення Сонця на екліптиці. У нашому випадку Сонце перебуває у сузір'ї Козерога.

Повертаючи карту підводимо знайдену на екліптиці точку до східної частини горизонту. Пряма проведена через Північний полюс світу, точку, що відповідає положенню Сонця на екліптиці і дату перетинає годинний лімб накладного круга у точці 7^h 40^m. Це значення відповідає сходу сонця за місцевим часом $T_m = 7^h\ 40^m$. Переходимо до часу на годиннику (поясного) за співвідношенням: $T_п = T_m + n - \lambda = 7^h\ 40^m + 2^h - 2^h 14^m = 7^h\ 26^m$. Отже у Севастополі 10 лютого Сонце сходить о $7^h\ 26^m$ поясного часу.

Повертаючи карту підводимо точку на екліптиці, яка відповідає положенню Сонця, до західної частини горизонту. Пряма "Північний полюс-Сонце-дата" перетинає шкалу годинного лімба у точці, що відповідає $T_m = 16^h$ 30^m

Час заходу Сонця у Севастополі 10 лютого на годиннику становить***:***

$T_п = T_m + n - \lambda = 16^h\ 30^m + 2^h - 2^h 14^m = 16^h\ 16^m$.

109. Визначити, о котрій годині у Рівному за поясним (Київським) часом зоря α-Візничого сьогодні кульмінує поблизу зеніту? Яка з яскравих зір, наведених у таблиці також кульмінує в цей момент? Скільки часу іде світло від цієї зорі до зорі α-Візничого? (2013 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Знаходимо на зоряній карті зорю α-Візничого (Капелла) і обертаючи рухому частину карти суміщуємо зорю з меридіаном (лінія північ-південь). Бачимо, що кульмінація відбувається якраз поблизу зеніту. На лімбі дат бачимо, що штрих, який відповідає 25 січня суміщається з позначкою 21 год місцевого часу. Переходимо до поясного часу. $T_m = T_0 + \lambda$, $T_n = T_0 + n$, де T_m – місцевий час, T_0 – місцевий час гринвіцького меридіану (всесвітній час), λ – географічна довгота Рівного (λ=1 год 44 хв), n – помер пояса (n=2) $T_n = T_m - \lambda + n$ = 21 год 16 хв. Дивимось на напря північ-південь на рухомій частині карти і бачимо, що в цей момент кульмінує яскрава зоря β-Оріона (Рігель). Користуючись картою зоряного неба оцінюємо або користуючись таблицями схилень зір визначаємо, що кут між напрямками на зорі Капелла і Рігель $45^0\ 57' - (-08^0\ 15') = 53^0\ 72' = 54^0\ 12' = 54{,}2^0$. За формулою $r = \dfrac{1}{p}$ знаходимо відстань до зір. Паралакс беремо з таблиці. Відстань до Капелли: $r_1 = \dfrac{1}{p_1} = \dfrac{1}{0{,}072} \approx 13{,}9$ пк , до Рігеля: $r_2 = \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{0{,}004} = 250$ пк . Тоді відстань між зорями можна знайти з трикутника за теоремою косинусів. $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos 54{,}2^0$.

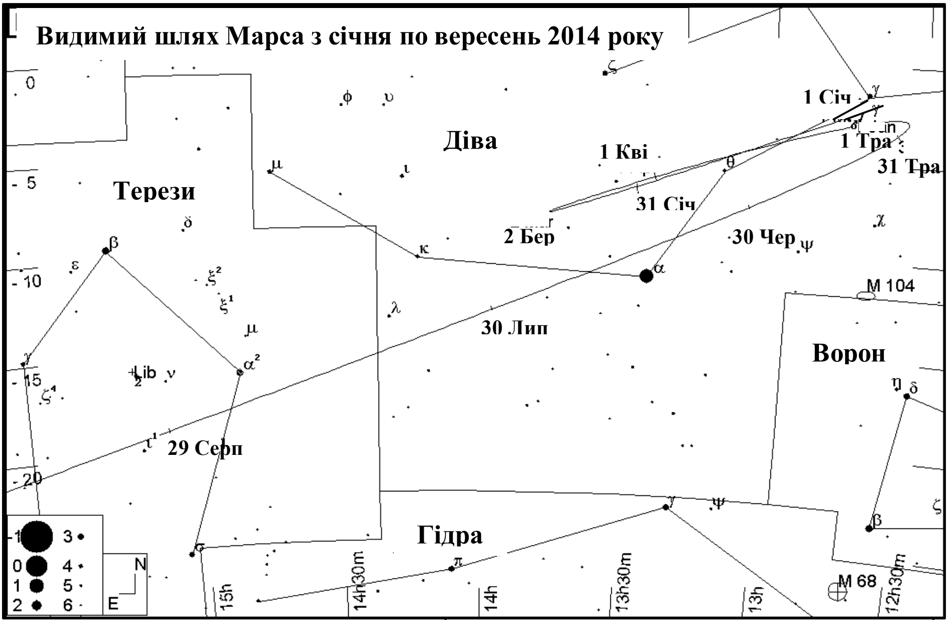
Після підстановки r=242,2 пк. $r=242{,}2 \cdot 3{,}09 \cdot 10^{16} = 7{,}48 \cdot 10^{18}$ м. Тоді час, за який світло йде від зорі до зорі $t = \dfrac{r}{c} = \dfrac{7{,}48 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^8} = 2{,}49 \cdot 10^{10}$ с .

110. На карті зображено видимий шлях Марса з січня по вересень 2014 року.

а) Вказати приблизну дату, коли відбудеться протистояння Марса за картою і за таблицею. Пояснити способи визначення.

б) Визначити відстань від Землі до Марса в астрономічних одиницях під час протистояння.

в) За допомогою рухомої карти зоряного неба вказати наближено з якої по яку годину 26 січня 2014 року можна спостерігати Марс на небі (вважати можливістю спостереження час, коли Сонце знаходиться під горизонтом). (2014 р. ІІІ е. 11 к.)



Видимий шлях Марса з січня по вересень 2014 року

__Розв'язок.__ а) За картою: Бачимо, що до 2 березня Марс рухається в прямому напрямку, потім приблизно до 25 травня в зворотному і знову в прямому. Отже, стояння 2 березня і 25 травня, а протистояння відбувається посередині між цими датами, тому приблизно це буде 13 квітня.

За таблицями: В день протистояння у Марса найбільший кутовий діаметр. Бачимо, що це відбудеться приблизно 16 квітня (немає даних в ближчі до цієї дати дні).

Дата			Пряме сходження		Схилення		Кутовий діаметр
Рік	міс	д	h	m	о	'	"
2014	Jan	1	12	45	- 2	31	6.9
2014	Jan	6	12	53	- 3	19	7.1
2014	Jan	11	13	1	- 4	3	7.4
2014	Jan	16	13	8	- 4	45	7.7
2014	Jan	21	13	15	- 5	23	8.0
2014	Jan	26	13	21	- 5	57	8.4
2014	Jan	31	13	27	- 6	28	8.8
2014	Feb	5	13	32	- 6	54	9.2
2014	Feb	10	13	37	- 7	16	9.6
2014	Feb	15	13	40	- 7	33	10.1
2014	Feb	20	13	43	- 7	45	10.6
2014	Feb	25	13	45	- 7	52	11.1
2014	Mar	2	13	45	- 7	52	11.7
2014	Mar	7	13	44	- 7	47	12.2
2014	Mar	12	13	43	- 7	36	12.8
2014	Mar	17	13	40	- 7	19	13.4
2014	Mar	22	13	35	- 6	57	13.9
2014	Mar	27	13	30	- 6	29	14.3
2014	Apr	1	13	24	- 5	57	14.7
2014	Apr	6	13	17	- 5	23	15.0
2014	Apr	11	13	9	- 4	48	15.1
2014	Apr	16	13	2	- 4	14	15.2
2014	Apr	21	12	55	- 3	43	15.1
2014	Apr	26	12	49	- 3	17	14.8
2014	May	1	12	43	- 2	57	14.5
2014	May	6	12	39	- 2	44	14.2
2014	May	11	12	36	- 2	38	13.7
2014	May	16	12	34	- 2	39	13.3
2014	May	21	12	33	- 2	48	12.8
2014	May	26	12	34	- 3	4	12.3
2014	May	31	12	35	- 3	26	11.9

б) Відстань до планети $d = \dfrac{R}{\sin r}$ або $d = \dfrac{R}{r}$, де R – радіус планети, r – кутовий радіус в радіанах. Кутовий діаметр Марса в день протистояння 15,2″отже кутовий радіус 7,6 ″.

Переводимо в радіани $1'' = \dfrac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$ рад. 7,6″=$3{,}68 \cdot 10^{-5}$ рад. Радіус Марса беремо з таблиці. Тоді d=$92{,}2 \cdot 10^{6}$ км або $\dfrac{92{,}2 \cdot 10^{6}}{149{,}6 \cdot 10^{6}} = 0{,}61$ а.о.

в) Згідно карти видимого шляху Марса знаходимо його положення 26 січня (або визначаємо схилення і пряме сходження з таблиці). Обертаємо рухому карту зоряного неба так, щоб до цієї точки наблизився вирізний круг(східний горизонт). Записуємо час сходу Марса ≈23 год 40 хв. Підводимо західний горизонт і бачимо, що час заходу ≈10 год 00 хв. Тепер знаходимо на екліптиці, де в цей день перебуває Сонце і аналогічно визначаємо час сходу і заходу Сонця. (Схід ≈7 год 40 хв, захід 15 год 50 хв). Отже Марс буде видимим з 23 год 40 хв до 7 год 40 хв за місцевим часом. Оскільки для Рівного $\lambda=1^{h}\ 44^{m}$, n=2 то з формули $T_{п}= T_{m}+n-\lambda$ Марс видно з 23 год 26 хв до 7 год 26 хв за поясним часом.

111. Під час повного місячного затемнення відбулось центральне покриття зорі Регул (α Лева) Місяцем.

а) Скільки часу тривало покриття?

б) Використовуючи карту зоряного неба вкажіть наближено дату події. В якому сузір'ї знаходилось в цей день Сонце та які його наближені екваторіальні координати? Відповідь обґрунтуйте. (2017 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Місяць здійснює повний оберт по небесній сфері за так званий сидеричний місяць (27,3 доби). Отже його кутова швидкість $\varphi = \dfrac{360^{0}}{27{,}3} \approx 13^{0}$ / доба . Протягом покриття (від заходу зорі за один край Місяця і виходу з іншого) Місяцю потрібно зміститись на свій діаметр ($0{,}5^{0}$).

Отже покриття зорі триватиме $\dfrac{0{,}5^{0}}{13^{0}\ /\ \text{доба}} = \dfrac{1}{26}$ доби ≈ 55 хв.

Під час повного місячного затемнення Місяць знаходиться в протистоянні, а отже Сонце – в діаметрально протилежній точці екліптики. За допомогою карти неба з'ясовуємо, що Сонце буде в сузір'ї Водолія, а його наближені координати наступні: $\alpha = 22^{h}10^{m}$, $\delta = -10^{0}$. Згідно з картою неба таке положення Сонця буде приблизно 22 лютого.

112. За допомогою рухомої карти зоряного неба визначити час сходу і заходу Сонця 20 грудня у м.Рівному (λ=1^h 44^m) і тривалість видимості зорі Альтаїр (α Орла) цієї доби (вважати, що зорю видно тоді, коли Сонце під горизонтом). (2017 р. ІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Час сходу Сонця: ≈8 год 10 хв місцевого часу або $T_n = T_m - \lambda + n$ = 8 год 26 хв. Час заходу Сонця: ≈15 год 30 хв місцевого часу або $T_n = T_m - \lambda + n$ = 15 год 46 хв.

Альтаїр сходить о ≈7 год 20 хв місцевого часу і заходить о ≈20 год 40 хв місцевого часу, тому її видно 50 хв вранці до сходу Сонця і 5 год 10 хв після заходу Сонця.

113. Скористайтесь рухомою картою зоряного неба і визначте:

а) в якому сузір'ї перебуває Місяць 26 січня о 21^{00} за київським часом? Екваторіальні координати Місяця у цей момент часу є такими: α=4^h 00^m, δ=15^0 20′;

б) які приблизно екваторіальні координати Сонця в цей день;

в) фазу Місяця (чверть та кількість днів, які минули від нового Місяця) на цей момент; (2018 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. а) в сузір'ї Тельця

б) α=20^h 20^m, δ=–19^0.

в) пряме сходження Сонця в цей день α=20^h 20^m. Таким чином, кутова відстань між Сонцем і Місяцем вздовж місячного шляху становить ~7год 40 хв, що становить 115^0.

Оскільки за добу відносно Сонця Місяць зміщується на $\dfrac{360^0}{29{,}5\ \text{діб}} \approx 12{,}2^0$,

то з моменту нового Місяця пройшло $\dfrac{115^0}{12{,}2^0} \approx 9{,}4$ доби. Тобто Місяць є у другій чверті.

114. Астроном, що знаходиться в Києві (φ≈50^0), опівночі спостерігає зірку α Лебедя поблизу зеніту.

а) в який день це відбувається?

б) визначити схилення цієї зірки.

в) в цей же момент інший астроном, що знаходиться на цьому ж меридіані спостерігає цю ж зірку поблизу горизонту. Оцінити географічну широту цього міста і відстань між містами. (2019 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Використовуючи карту зоряного неба, знаходимо, що поблизу зеніту опівночі зоря α Лебедя знаходиться приблизно 1 серпня.

Оскільки дана зоря проходить поблизу зеніту ($h \approx 90^0$), то це означає, що вона перебуває у верхній кульмінації. Згідно формули $h = 90^0 - \varphi + \delta$ (1), де $\varphi = 50^0$, отримуємо, що схилення зорі $\delta \approx 50^0$ (знак наближено ставимо тому, що зоря не точно в зеніті). (наближене значення схилення зорі можна також знайти за картою зоряного неба). Для всіх точок Землі на меридіані Києва, вона також буде кульмінувати, але на різних висотах. В умові сказано, що для іншого астронома вона кульмінує на горизонті, отже $h=0$.

Використання формули (1) приведе до відповіді $\varphi_1 = 140^0$, що неможливо, тому застосуємо формулу $h = 90^0 + \varphi - \delta$. З неї $\varphi_1 = -40^0$, отже астроном знаходиться в південній півкулі на широті 40^0 пд.ш. (Це можна визначити без використання формул: Оскільки обидва астронома спостерігають одну й ту ж далеку зірку, то напрямок на неї з обох міст має збігатися. Однак в Києві цей напрям збігається з напрямком радіуса Землі, проведеного до міста, а в іншому місті перпендикулярно до нього. Отже, радіуси, проведені до Києва і іншого міста перпендикулярні один до одного, а значить широта відрізняється на 90^0. А оскільки міста знаходяться на одному меридіані, то астроном знаходиться в південній півкулі на широті 40^0 пд.ш.)

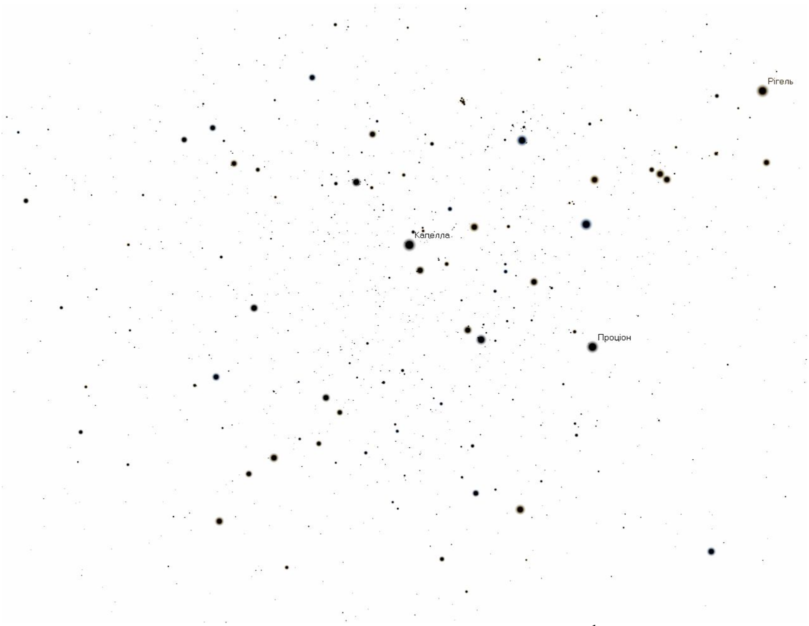
Знаючи з курсу географії, що довжина дуги меридіана в 1^0 становить 111 км (або обчислимо, що довжина всього меридіана $l = 2\pi R = 6{,}28 \cdot 6371 = 40009{,}9$ км, що відповідає 360^0. Тоді 1^0 відповідає 40009,9/360≈111 км.), отримуємо, що відстань між містами 90·111=9990 км.

115. На малюнку зображено фрагмент зоряного неба над м.Рівне (26^0 сх.д.) сьогодні на момент місцевого часу 22:20. Позначена на рисунку зоря Капелла має наступні екваторіальні координати: ($\alpha = 05^h 16^m 41^s$, $\delta = +45^\circ 59' 53''$). Дослідіть це зображення і виконайте наступні завдання:

а) Який час буде показувати в цей момент годинник на вашому мобільному телефоні, якщо він іде правильно?

б) Знайдіть і позначте на малюнку відомі Вам сузір’я. Вкажіть їхні назви.

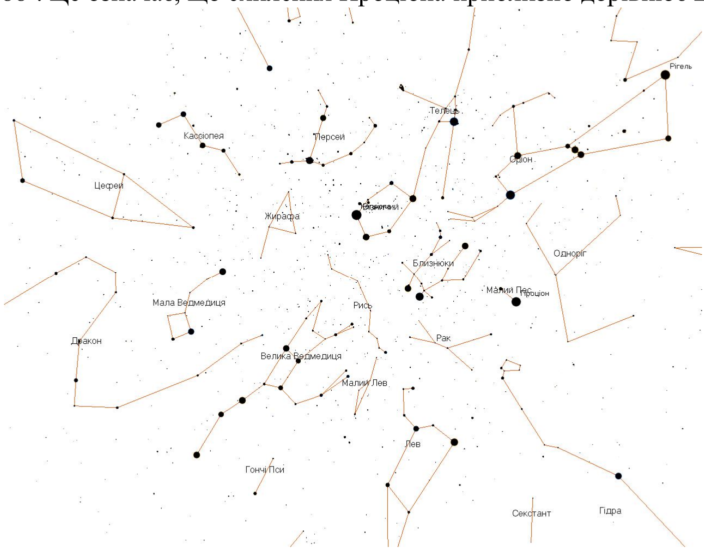
в) За допомогою лінійки оцініть приблизне значення схилення зорі Процион і пряме сходження зорі Рігель. (2016 р. ІІІ е. 11 к.)



Розв'язок. 1. Довгота Рівного $\lambda = 1^h44^m$. $T_п = T_м + n - \lambda$; $T_п = 22^h20^m + 2^h - 1^h44^m = 22^h36^m$.

2. Дивись малюнок.

3. Оскільки відстань від Капелли до Полярної зорі 4 см, а різниця схилень приблизно $90^0 - 46^0 = 44^0$, то на один сантиметр припадає 11 градусів. Відстань до Проціона 8 см, тому його «кутова» довжина від Полярної зірки складає 88^0. Це означає, що схилення Проціона приблизно дорівнює 2^0.



Зорі Полярна, Капелла і Рігель лежать на одній прямій, а це означає що пряме сходження Капелли і Рігеля однакові, отже $\alpha = 05^h 16^m 41^s$.

116. Скористайтесь рухомою картою зоряного неба і визначте:

а) в якому сузір'ї перебуває Місяць 26 січня о 21^{00}? Екваторіальні координати Місяця у цей момент часу є такими: $\alpha=4^h\ 00^m$, $\delta=15^0\ 20'$.

б) фазу Місяця (чверть та кількість днів, які минули від нового Місяця) на цей момент.

в) скільки часу пройде від моменту верхньої кульмінації Місяця в Рівному до моменту верхньої кульмінації Місяця в Нью-Йорку? Прийняти, що довгота Рівного 26^0 східної довготи, довгота Нью-Йорка 74^0 західної довготи. (2018 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. а) в сузір'ї Тельця

б) пряме сходження Сонця в цей день $\alpha=20^h\ 20^m$. Таким чином, кутова відстань між Сонцем і Місяцем вздовж місячного шляху становить $\approx$7 год 40 хв, що становить 115^0. Оскільки за добу Місяць зміщується на $\frac{360^0}{29{,}5 \text{ діб}} \approx 12{,}2^0$, то з моменту нового Місяця пройшло $\frac{115^0}{12{,}2^0} \approx 9{,}4 \text{ доби}$.

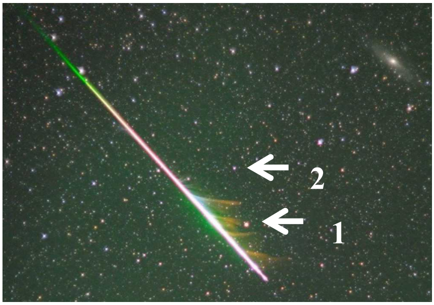
Тобто Місяць є у другій чверті.

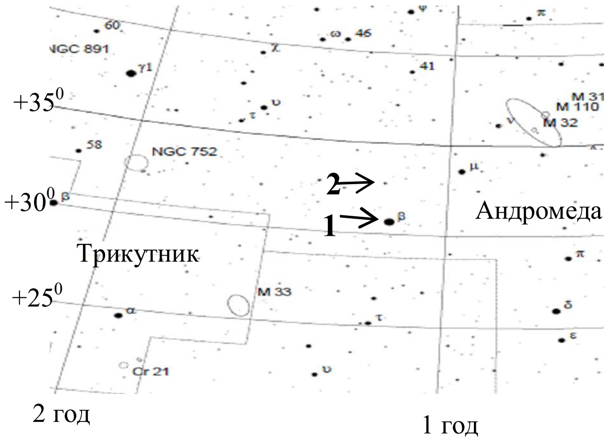
в) різниця в часі між верхніми кульмінаціями зір у Рівному і Нью-Йорку визначається різницями довгот. $26^0+74^0=100^0$. Або в хвилинах $100^0 \cdot 4$ хв=400 хв. Але положення зір за добу практично не змінюється, а положення Місяця відносно зір за рахунок його руху змінюється.

Оскільки Місяць за добу зміщується на $\frac{360^0}{27{,}3} \approx 13^0$ проти добового обертання неба, то через добу він буде східніше від того положення, де він був в попередню добу, отже його верхня кульмінація в тому ж пункті через добу (24 год=1440 хв) відбудеться пізніше на $13^0 \cdot 4$ хв=52 хв. Тоді в Нью-Йорку запізнення кульмінації Місяця за рахунок його руху відбудеться на $\frac{400}{1440} \cdot 52 \approx 14{,}44$ хв пізніше, отже від моменту верхньої кульмінації Місяця в Рівному до моменту верхньої кульмінації Місяця в Нью-Йорку пройде 400 хв+14,44 хв=414,44 хв=6 год 54 хв 27 с.

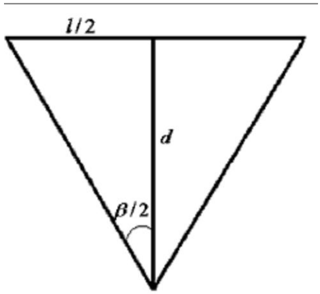
117. Вам дано знімок метеора і фрагмент карти зоряного неба. Відомо, що траєкторія метеора лежить в картинній площині. Відстань до середньої точки траєкторії 250 км. Вважаючи, що тривалість польоту метеора 1 секунда, оцінити його середню швидкість на цій ділянці шляху. Намалюйте приблизний шлях метеора на фрагменті карти. (2019 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. За фрагментом карти зоряного неба можна визначити кутову відстань між двома точками на малюнку. Для цього співставимо карту і малюнок і знайдемо дві зорі 1 і 2 на малюнку, які розміщені майже вздовж одного меридіана, тобто пряме сходження їх однакове. Тоді кутова відстань між цими зорями φ – це різниця схилень. 5^0 схилення на карті відповідає відстань 1,6 см, отже відстані 0,7 см на карті між позначеними зорями відповідає кутова відстань $\varphi \approx 2{,}2^0$. (Якщо використовувати зорі з різним прямим сходженням, то для знаходження кутової відстані між ними потрібно використовувати закони сферичної геометрії)





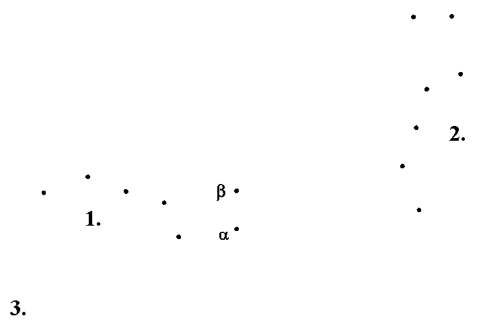
Порівнявши по фотографії відстані, виміряні лінійкою, між зорями (точками 1 і 2) $l_З$ та початком і кінцем сліду метеора $l_М$, можна отримати наступну пропорцію: $\frac{l_З}{l_M} = \frac{\varphi}{\beta}$. $\beta = \frac{l_M \cdot \varphi}{l_З} = \frac{7{,}8\,\text{см} \cdot 2{,}2^0}{1{,}3\,\text{см}} \approx 13^0$.



Можемо вважати, що точка спостереження і точки кінця і початку траєкторії утворюють рівнобедрений трикутник, в якому відома бісектриса d і кут при вершині β. Схематично зобразимо його, і позначимо на ньому потрібні нам величини: l – дійсна довжина траєкторії метеора, β – його кутова відстань, d – відстань від спостерігача до середини траєкторії.

Тоді з трикутника отримуємо, що довжина траєкторії дорівнює: $l = 2d \cdot tg\frac{\beta}{2} \approx 57$ км. Тоді середня швидкість на цьому відрізку шляху дорівнює 57 км/с.

118. На схематичному малюнку перше положення сузір'я Великої Ведмедиці відповідає 19 годинам. Якому часу цього ж дня відповідає друге положення? Раніше чи пізніше воно наступає? Використовуючи лінійку, визначте географічну широту місця спостереження, якщо кутова відстань між зорями α і β Великої Ведмедиці становить $5{,}5^0$. Цифрою 3 позначено лінію горизонту. (2015 р. III е. 10 к.)



Розв'язок. Як видно з малюнка, положення 2 сузір'я Великої Ведмедиці повернуто відносно положення 1 на 90^0 проти годинникової стрілки. Обертання небесної сфери відбувається проти годинникової стрілки, отже положення 2 отримується через 6 годин після положення 1, тобто о 1 годині ночі, але це вже буде наступний день. А в цей самий день це положення було теж о 1 годині ночі, але на 18 годин раніше. Відомо, що північний полюс світу знаходиться на лінії, що сполучає α і β Великої Ведмедиці. Провівши лінію на обох положеннях і знайшовши їх перетин, отримаємо північний полюс світу. Вимірюємо лінійну відстань h між α і β Великої Ведмедиці.

Вона відповідає кутовій відстані $\gamma = 5{,}5^0$. Тоді вимірюємо лінійну відстань H від горизонту до північного полюса світу. Тоді $\varphi = \dfrac{H \cdot \gamma}{h}$.

119. В таблиці наведені дані про фазу, кутовий радіус, екваторіальні координати Місяця в момент його верхньої кульмінації для деяких 20 днів січня 2015 року, які йдуть підряд (дані взяті з астрономічного календаря).

Використовуючи карту зоряного неба, визначити приблизно дату та екваторіальні координати Сонця в момент, коли для Місяця наступила остання чверть.

Знайти час сходу, заходу Сонця та його висоту у верхній кульмінації в цей день для Рівного ($\varphi=50^0\ 39'$ пн.ш, $\lambda=1^h\ 44^m$).

Знайти найбільшу і найменшу відстань від Землі до Місяця в січні. Радіус Місяця 1738 км. (2015 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Виписуємо з таблиці пряме піднесення і схилення Місяця, коли його фаза найближча до останньої чверті. **0,52 13:17,3 -08°18′**

0,42 14:06,8 -11°52′

фаза	радіус	α (ВК)	δ(ВК)
0,99	14′57″	07:42,1	+15°47′
0,97	14′51″	08:33,2	+13°26′
0,92	14′47″	09:22,5	+10°27′
0,86	14′45″	10:10,2	+07°02′
0,79	14′44″	10:56,9	+03°18′
0,71	14′47″	11:43,1	-00°35′
0,62	14′52″	12:29,7	-04°29′
0,52	14′60″	13:17,3	-08°18′
0,42	15′11″	14:06,8	-11°52′
0,32	15′24″	14:58,9	-14°59′
0,22	15′39″	15:54,1	-17°28′
0,13	15′55″	16:52,7	-19°03′
0,07	16′10″	17:54,1	-19°31′
0,02	16′23″	18:57,5	-18°42′
0,00	16′32″	20:01,3	-16°33′
0,02	16′37″	21:04,3	-13°14′
0,06	16′35″	22:05,6	-09°02′
0,13	16′29″	23:05,0	-04°19′
0,23	16′20″	00:02,8	+00°33′
0,34	16′08″	00:59,3	+05°13′

Вважаємо рух Місяця рівномірним. В момент останньої чверті фаза Місяця 0,5. Тоді його пряме піднесення буде $\approx 13^h35^m$. Коли Місяць в останній чверті, то він сходить раніше за Сонце, яке знаходиться від нього на кутовій відстані 90^0 і має пряме піднесення на 6 год більше, тобто $\alpha=19^h35^m$. Оскільки Сонце перебуває на екліптиці, то його схилення $\delta \approx -22^0$. По карті зоряного неба бачимо, що ця дата приблизно 13 січня.

13 січня за місцевим часом Сонце сходить о 8^h, заходить о 15^h45^m. За київським часом схід Сонця $T_n=T_м+n-\lambda = 8^h16^m$, тоді захід Сонця $T_n=16^h01^m$. Висота Сонця у верхній кульмінації обчислюється за формулою $h=90^0-\varphi+\delta=90^0-50^0\ 39'-22^0 \approx 17^021'$.

Найбільший радіус Місяця 16′37″. В цей момент відстань до нього мінімальна. Переведемо цю кутову відстань в радіани. $1' = \dfrac{\pi}{180 \cdot 60}$;

$1'' = \dfrac{\pi}{180 \cdot 3600}$; $16'37'' = \dfrac{16\pi}{180 \cdot 60} + \dfrac{37\pi}{180 \cdot 3600} = \dfrac{997\pi}{180 \cdot 3600}$. Тоді відстань до Місяця $d = \dfrac{R}{p}$, де p – кутовий радіус Місяця в радіанах. $d = \dfrac{1{,}738 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot 180 \cdot 3600}{997\pi} \approx 359749 \text{км}$. Аналогічно найменший кутовий радіус $14'44''$. $14'44'' = \dfrac{884\pi}{180 \cdot 3600}$. $d = \dfrac{1{,}738 \cdot 10^6 \text{ м} \cdot 180 \cdot 3600}{884\pi} \approx 405735 \text{ км}$.