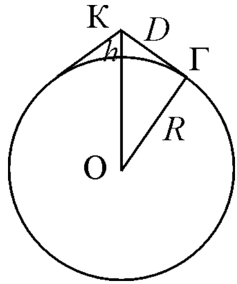
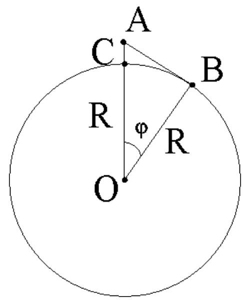
Земля і Місяць

1. Яку частину земної поверхні може охопити поглядом космонавт з висоти 400 км? (2012 р. III е. 10 к.)



Розв'язок. Хай точка О – центр Землі, К – космонавт і Г – горизонт. Позначимо довжини відрізків: ОГ через R і КГ через D. Тоді довжина відрізка КО буде рівна $R + h$, де $h = 400$ км – висота орбіти. Відстань до горизонту визначимо з прямокутного трикутника ГОК за теоремою Піфагора: $(R + h)^2 = D^2 + R^2$, звідки $D^2 = 2Rh + h^2 = 2Rh(1 + h/2R)$. Оскільки $h << R$, другий доданок в цій формулі набагато менший за перший, тому ним можна знехтувати. В результаті отримуємо формулу для відстані до горизонту при висоті спостерігача $h << R$: $D = \sqrt{2Rh}$. Оскільки $D << R$, площу поверхні Землі, доступну погляду космонавта можна обчислити як площу круга: $S = \pi D^2$. Оскільки повна площа поверхні Землі обчислюється як площа кулі: $S' = 4\pi R^2$, то відношення цих площ складає $\frac{S}{S'} = \frac{h}{2R} = 0{,}03$ (тобто 3 %).

2. Невпізнаний літаючий об'єкт, висадивши інопланетян, піднявся вертикально вгору і завис над поверхнею Землі на відстані 10 км. На яку максимальну відстань від точки висадки можуть відійти інопланетяни, щоб НЛО був для них у полі прямого зору. Землю вважати кулею радіусом 6400 км. (2013 р. II е. 10 к.)



Розв'язок. Нехай НЛО знаходиться в точці А. Тоді відстань OA=AC+R. Інопланетяни можуть відійти максимально так, щоб напрям на НЛО співпадав з дотичною до кола (Землі), тобто в точку В. З прямокутного трикутника OAB: $\cos\varphi = \frac{OB}{OA} = \frac{6400\text{ км}}{6410\text{ км}} = 0{,}9984$. $\varphi \approx 3^0$. Відстань, на яку відійдуть інопланетяни дорівнює дузі кола СВ. $\frac{CB}{\varphi} = \frac{2\pi R}{360^0}$.

$$CB = \frac{2\pi \cdot 6400}{120} \approx 335\text{ км}.$$

3. Поясніть, чому на Землі буває зима і літо, і чому на Землі буває день і ніч. За яких умов на планеті не відбувається зміна пір року і зміна дня і ночі. (2015 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Оскільки земна вісь завжди нахилена в один бік, сонячні промені падають на Землю під різним кутом. А це означає, що під час руху Землі навколо Сонця протягом року сонячні промені нерівномірно освітлюють та нагрівають Північну та Південну півкулі. Це є причиною зміни пір року. А що стосується відстані від Землі до Сонця, то вона дійсно змінюється, але несуттєво: коли в Північній півкулі зима, наша планета трошки ближча до Сонця; це не відміняє нашу зиму, але робить її трохи м'якшою. У Південній півкулі навпаки – взимку Земля трохи далі від Сонця, що підсилює відмінність зимової і літньої температури.

Земля, обертаючись навколо власної осі, підставляє Сонцю то один, то інший бік. Тобто в певний період руху Землі навколо осі одну її частину освітлює Сонце, а іншу – ні. На освітленій частині триває день, а на іншій – ніч.

Якби земна вісь була б не нахилена, а перпендикулярна площині орбіти Землі, то кількість сонячного тепла на кожній паралелі протягом року, не змінювалася б. Це вказувало б на те, що протягом року тривалість дня завжди дорівнює ночі. Тоді б земна поверхня нагрівалася протягом року однаково і пір року не існувало б.

Щоб ніде на планеті не було зміни дня і ночі, потрібне одночасне виконання трьох умов:

а). Кутові швидкості орбітального і осьового обертання повинні співпадати (іншими словами – тривалість зоряного року і зоряної доби повинна бути однаковою);

б). Вісь обертання планети повинна бути перпендикулярна до площини орбіти (екліптики);

в). Планета повинна мати кругову орбіту, щоб кутова швидкість орбітального

обертання не змінювалася протягом року.

4. а) Чи буде на Землі відбуватися зміна дня і ночі, якщо вона перестане обертатися навколо своєї осі, але продовжить рух навколо Сонця? б) Знайдіть, наскільки змінилася б тривалість сонячної доби, якби Земля стала обертатися навколо своєї осі з тим же періодом, але в протилежному напрямку. (2018 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок. а) Зміна дня і ночі на Землі в цьому випадку відбуватиметься, але при цьому 1 доба дорівнюватиме одному року (період обертання навколо осі співпадає з періодом обертання навколо Сонця).

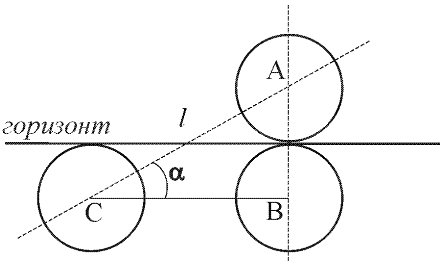
б) Земля, зробивши один повний оберт відносно зір (зоряна доба) не займе того ж положення відносно Сонця (тому що трошки зміститься по своїй орбіті). Для того, щоб зайняти те ж положення відносно Сонця (сонячна доба) потрібно ще 1/365≈ 4 хвилини. (В одному році приблизно 365 сонячних діб). Отже, сонячна доба приблизно на 4 хвилини довша, ніж зоряна доба). Якби напрямок осьового обертання Землі змінився б на протилежний, то сонячна доба, навпаки, стала б коротшою зоряної доби на ті ж 4 хвилини. Отже, якби Земля стала обертатися навколо своєї осі з тим же періодом, але в протилежному напрямку, то тривалість сонячної доби стала б коротшою приблизно на 8 хвилин.

5. Оцінити величину інтервалу часу, протягом якого сходить Сонце (тобто час між моментом появи верхнього краю сонячного диска і моментом, коли диск повністю опиниться над горизонтом) у день рівнодення

а) на екваторі.

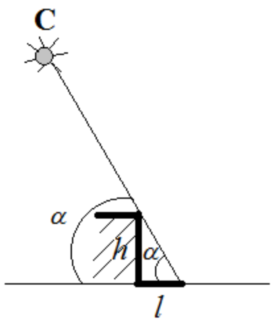
б) на широті 60^0. (2017 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. Добова паралель Сонця в день рівнодення збігається з небесним екватором. Можна вважати, що Сонце рухається по ній рівномірно. Швидкість руху Сонця $\varphi = \dfrac{360^0}{24\text{ год}} \approx 15^0/\text{год} = 0{,}25^0/\text{хв}$. На екваторі Землі небесний екватор розміщений вертикально, тобто під кутом 90^0 до горизонту. Отже, в день рівнодення на земному екваторі Сонцю потрібно пройти шлях АВ, тобто два своїх радіуси або один діаметр *d*. Видимий кутовий діаметр знаходимо в довіднику. $d = 0{,}5^0$.



Час сходу Сонця $t = \dfrac{0{,}5^0}{0{,}25^0/\text{хв}} = 2\text{ хв}$. На широті 60^0 небесний екватор нахилений до горизонту під кутом $\alpha = 90^0 - 60^0 = 30^0$. Сонцю потрібно буде пройти шлях $l = \dfrac{AB}{\sin 30^0} = 2d$. Тоді час сходу Сонця $t_1 = \dfrac{1^0}{0{,}25^0/\text{хв}} = 4\text{ хв}$.

6. У момент, коли Сонце було на висоті 60° над місячним горизонтом, тінь від валу на горизонтальному дні кратера видно з Землі під кутом 2″. Знайдіть висоту валу. Лінійний діаметр Місяця 3476 км, середній кутовий діаметр 31′26″. (2015 р. II е. 10 к.)



Розв'язок. На схематичному рисунку: С – Сонце, α – висота Сонця над горизонтом Місяця, h – висота валу, l – довжина тіні.

З рисунка видно, що $\frac{h}{l} = tg\alpha$.

Звідси $h = l \cdot tg\alpha$ (1). l (в км) знайдемо з пропорції: $\frac{l_{км}}{l''} = \frac{D_{км}}{D''}$. Підставивши цей вираз у формулу (1), отримаємо вираз для обчислення висоти місячного валу: $h = l'' \cdot \frac{D_{км}}{D''} \cdot tg\alpha$

Врахувавши, що 31′26″= 1886″ і підставивши інші числові значення, отримаємо: $h \approx 6{,}4$ км.

7. 28 липня 2017 р. Місяць був у апогеї своєї орбіти (міні-Місяць), а 2 січня 2018 р. – в перигеї (Супермісяць). Кутові розміри Місяця відповідно дорівнювали 29′38″ та 33′15″. Обчислити відстань від Землі до Місяця у перигеї та апогеї. (2018 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Відстані від Місяця до Землі в апогеї та перигеї пов'язані із середньою відстанню співвідношенням $r_{\max} + r_{\min} = 2a = 2 \cdot 384400 \text{ км} = 768800 \text{ км}$

З іншого боку, відношення відстаней дорівнює відношенню кутових розмірів. Отже $\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{33'15''}{29'38''} = \frac{33 \cdot 60 + 15}{29 \cdot 60 + 38} = 1{,}122$

Таким чином одержали систему рівнянь $\begin{cases} r_{\max} + r_{\min} = 768800 \text{ км} \\ r_{\max} = 1{,}122 r_{\min} \end{cases}$

Звідси $r_{\max}$=406500 км; $r_{\min}$=362300 км.

8. На яку відстань потрібно віддалитися від Землі, щоб її видимий кутовий розмір став дорівнювати розміру місячного диска на земному небі? (2018 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. Кут, під яким спостерігається об'єкт, обернено пропорційний відстані до нього (у випадку малих кутів). Радіус Землі в 6371/1738 = 3,67 рази більший радіуса Місяця, отже, кутовий розмір Землі буде дорівнює місячному на відстані, в 3,67 разів більшій відстані від Землі до Місяця.

384 400 · 3,67 ≈ 1,41 млн км.

9. Ви знаходитесь на Місяці. Чи можете Ви спостерігати сонячні затемнення, метеори, комети, північні сяйва, веселку, сріблясті хмари, штучні супутники? Чому на поверхні Місяця температура від дня до ночі міняється на сотні градусів, а на Землі всього лиш на декілька градусів? Відповідь обґрунтуйте. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Можна спостерігати сонячні затемнення (Землею), комети, штучні супутники. Решта всіх явищ (метеори, полярні сяйва, веселка і сріблясті хмари) пов'язана з атмосферою, якої на Місяці немає, так що їх спостерігати не можна.

Основною причиною порівняно невеликого добового перепаду температури на Землі є наявність у неї атмосфери, а точніше парниковий ефект в цій атмосфері. Поверхня планети, нагріта вдень, охолоджується в нічний час, випромінюючи інфрачервоне випромінювання. На Місяці, де атмосфера відсутня, це випромінювання безперешкодно покидає поверхню. На Землі водяна пара і вуглекислий газ, що входять до складу атмосфери, роблять атмосферу малопрозорою для інфрачервоного випромінювання поверхні, значна частина енергії, що випромінюється, затримується атмосферою і перевипромінюється назад до поверхні. Таким чином, Земля в нічний час охолоджується істотно слабше, ніж Місяць.

Другою за значимістю причиною є велика тривалість дня і ночі на Місяці. І та, і інша складають приблизно півмісяця.

10. Чи відбуваються при спостереженні з екватора Місяця:

а) схід і захід Сонця? б) схід і захід Землі?

Якщо ні, то чому? Якщо так, то оцінити, скільки часу тривають ці явища? Лібрації Місяця не враховувати. Видимий середній кутовий діаметр Сонця з Місяця вважати таким же, як і з Землі. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Сонце на Місяці робить один оберт по небосхилу за 29,53 доби (зміна фаз Місяця, видима з Землі, і рух сонячного диска по місячному небу, очевидно, відбуваються синфазно). Тривалість заходу Сонця на екваторі – це час, за який воно переміститься на свій діаметр. Якщо переміщення на 360^0 відбувається за 29,53 діб = 708,7 годин, то на $0,5^0$ – за $708,7 \cdot 0,5^0 / 360^0 \approx 1$ год. Що ж стосується заходу Землі, то вона там ніколи не заходить і не сходить, а висить на одному місці (згадайте, що Місяць повернутий до Землі весь час однією стороною), або не видно (для зворотного боку Місяця).

11. Є загадка про Місяць: «Всю ніч із-за хати світив ліхтар рогатий» Вкажіть астрономічні помилки в цій загадці і на зображеному дитячому малюнку. (2014 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. «Рогатим» Місяць буває, якщо він молодий або старий. Молодий Місяць видно вечорами і він заходить вслід за Сонцем. Старий Місяць сходить перед світанком і видно вранці. Щоб світити всю ніч, Місяць повинен розташовуватися на небесній сфері напроти Сонця і бути повним, а не «рогатим».

На малюнку зображений серп Місяця на фоні зірок. На темній стороні Місяця зображена зірка. Цього не може бути, оскільки Місяць не прозорий для світла.

Оскільки зараз ніч, бо видно зірки, то ріжки Місяця не можуть бути повернутими донизу, адже в такому випадку Сонце розташоване вище Місяця, а насправді Сонце під горизонтом і ріжки повернуті вбік або в крайньому випадку догори, якщо спостереження проводиться поблизу екватора.

12. Любитель астрономії в січні спостерігає молодий Місяць.

а) В якій порі доби це можливо і в якій частині горизонту?

б) Чи можна стверджувати, що протягом двох наступних тижнів де-небудь на Землі відбудеться сонячне затемнення?

в) В якому календарному місяці відбудеться найближча така ж фаза молодого Місяця? (2017 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. а) Молодий Місяць можна спостерігати ввечері в західній частині горизонту.

б) Сонячне затемнення можливе тоді, коли Місяць у фазі новомісяччя. Оскільки Місяць зараз молодий, то новомісяччя було 1-2 дні назад, а оскільки фази Місяця повторюються через 29,5 діб, то в найближчі два тижні сонячного затемнення бути не може.

в) Така ж фаза молодого Місяця відбудеться через 29,5 діб. Якщо дата спостереження 1 січня, то наступна така ж фаза молодого Місяця буде 31 січня, якщо 2 – 29 січня, то наступна фаза буде 1 – 28 лютого, якщо 30 січня і рік високосний, то наступна така ж фаза 29 лютого, якщо 31 січня і рік високосний, то 1 березня, якщо 30 – 31 січня і рік невисокосний – 1,2 березня.

13. В день рівнодення зразу ж після заходу Сонця Місяць можна було бачити таким, яким він показаний на малюнку.

а) В якій частині горизонту він спостерігався?

б) Через який найменший час Місяць можна буде знову спостерігати в тій же точці небесної сфери?

в) В якій фазі буде Місяць через три тижні після цієї дати. В якій частині горизонту його можна буде спостерігати в той же час доби, коли було зроблено фотознімок? Чи існує ймовірність того, що через три тижні відбудеться яке-небудь затемнення? Якщо так, то яке? (2019 р. III е. 10 к.)

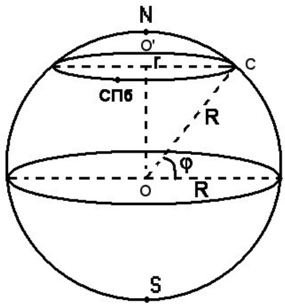
Розв'язок. а) Місяць перебуває у фазі першої чверті. Тому в дні рівнодення під час заходу Сонця він знаходиться на півдні.

б) Повний оберт навколо Землі Місяць робить за 27,3 діб, рухаючись в тому ж напрямку, що і добовий рух Землі. За добу він зміститься на $\frac{360^0}{27,3} \approx 13^0$ на схід. Отже, щоб бути в тому ж місці на небі Місяцю потрібно пройти ці 13^0 зі швидкістю добового обертання Землі. Земля робить повний оберт в 360^0 за 24 години (точніше за 23 год 56 хв – зоряна доба). 13^0 буде пройдено за $\frac{13^0}{360^0} \cdot 24 \cdot 60 \approx 52$ хв . Отже в тому ж місці Місяць буде через 24 год 52 хв.

в) Через три тижні Місяць перебуватиме у фазі нового Місяця і буде знаходитися поблизу Сонця. Отже, під час заходу Сонця він теж буде знаходитися на заході. Через три тижні можливе сонячне затемнення.

14. Пасажир, що летить на літаку з Сургута до Санкт-Петербурга, відмітив, що протягом всього перельоту Місяць практично не міняв своєї висоти над горизонтом. Оцініть швидкість, з якою летів літак. Широта Санкт-Петербурга і Сургута приблизно однакова – 60^0. (2011 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Оскільки Місяць при спостереженні з літака практично не змінював своєї висоти над горизонтом, можна вважати, що кутова швидкість руху літака приблизно дорівнює кутовій швидкості руху Місяця. За кутову швидкість руху Місяця можна прийняти кутову швидкість обертання Землі – 15^0 за годину. При цьому нехтуємо власним рухом Місяця, пов'язаним з обертанням Місяця навколо Землі, але це допустимо (тому що власний рух Місяця ($0,5^0$ за годину) у стільки ж разів менший за кутову швидкість обертання Землі, у скільки тривалість доби менша тривалості місяця, тобто приблизно в 30 разів). Якщо знехтувати висотою польоту в порівнянні з радіусом Землі і вважати, що літак летів уздовж паралелі, то лінійна швидкість, з якою летів літак, дорівнює лінійній швидкості руху вздовж паралелі точки земної поверхні внаслідок обертання Землі.



Так як рух відбувається по 60-й паралелі, то і радіус треба брати відповідний (див. малюнок). Радіус 60-ї паралелі можна обчислити з прямокутного трикутника OO′C, де гіпотенуза OC дорівнює R – радіусу Землі, а катет O′C дорівнює r. $r = R\cos\varphi$. Тоді швидкість літака $\upsilon = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$, де T= 24 год – період обертання Землі, R = 6400 км. Після підстановки $\upsilon \approx 834$ км/год.

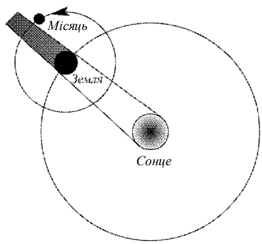
15. Потяг рухається зі швидкістю 60 км/год на захід вздовж паралелі 60^0 північної широти. Яку тривалість світлої частини доби зафіксує пасажир цього потяга 21 березня. Рефракцією знехтувати. (2012 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Швидкість руху Землі навколо своєї осі на цій паралелі $\upsilon = \dfrac{2\pi R\cos\varphi}{T} \approx$ 834 км/год. (див. попередню задачу). Рух поїзда на захід фактично уповільнює цю швидкість до 834 км/год – 60 км/год = 774 км/год. Довгота дня для нерухомого спостерігача 21 березня дорівнює 12 годинам (якщо нехтувати рефракцією), а для пасажира вона зросте обернено пропорційно до падіння швидкості обертання Землі і стане рівною 12,93 год = 12 год 56хв.

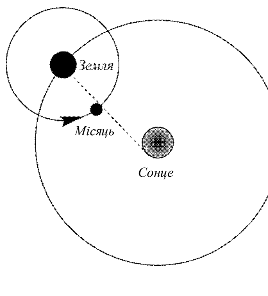
16. Корабель пливе уздовж меридіана. Моряк за допомогою секстанта вимірює висоту Полярної зірки. За добу її висота змінилася з 55^0 до 45^0. З якою швидкістю пливе корабель і в який бік, якщо вважати, що його швидкість постійна? (2018 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Висота Полярної зірки майже точно відповідає поточній широті місцевості. Значить, корабель пливе на південь, і він проплив 10^0. Знаючи з курсу географії, що довжина дуги меридіана в 1^0 становить 111 км (або обчислимо, що довжина всього меридіана $l = 2\pi R = 6{,}28 \cdot 6371 = 40009{,}9$ км, що відповідає 360^0. Тоді 1^0 відповідає 40009,9/360≈111 км.), отримуємо 1110 км. Цю відстань було пройдено за 24 години, значить, швидкість корабля становить 46,25 км/год.

17. З якого краю місячного диска в середніх широтах північної півкулі Землі починається повне місячне затемнення? З якого краю сонячного диска починається сонячне затемнення? Намалюйте схеми, що пояснюють відповіді. Чому сонячні і місячні затемнення не відбуваються щомісяця? (2013 р. ІІІ е. 10 к.)



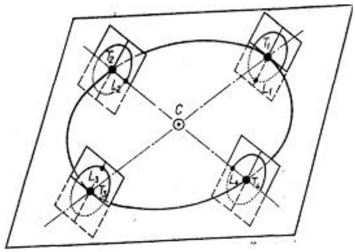
Розв'язок. Якщо дивитися на Сонячну систему "зверху", тобто з боку північного полюса Землі, то рух Землі довкола Сонця, Місяця довкола Землі і обертання Землі довкола своєї осі відбуваються в одну і ту ж сторону – проти годинникової стрілки. Поглянувши на схеми затемнень, легко побачити, що під час місячного затемнення Місяць входить в земну тінь лівим краєм (мал. 1), а на Сонце під час сонячного затемнення Місяць насувається справа, так що за місячним диском першим почне ховатися правий край Сонячного диска.



Якби орбіта Місяця лежала в площині орбіти Землі, кожного місяця (строго кажучи — кожні 29,5 діб) на Землі спостерігалося б одне місячне (у повний місяць) і одне сонячне (у молодику) затемнення. Але нахил місячної орбіти складає близько 5 градусів, тому для затемнення необхідно, щоб Місяць під час молодика або повного місяця проходив поблизу одного з вузлів орбіти (тобто поблизу точки перетину орбіт).

18. У жовтні 2014 року відбудеться два затемнення. Одне з них повне місячне (на жаль не видиме на території України) – 8 жовтня. Вкажіть приблизну дату настання іншого затемнення і його тип (сонячне чи місячне, повне чи часткове). Відповідь обгрунтуйте. На фоні яких сузір'їв спостерігатимуться дані затемнення? (2014 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Сонячні затемнення відбуваються, коли Місяць молодий, а місячні – коли Місяць повний. Оскільки площина орбіти Місяця нахилена до екліптики (площини орбіти Землі), то затемнення можуть відбуватися не кожного місяця, а приблизно 2 рази на рік, коли Місяць в час повного місяця або молодика знаходиться на орбіті поблизу точок її перетину з екліптикою, причому період, сприятливий для затемнень, триває у кожному випадку близько місяця (тобто за місяць може бути два часткових місячних і одне повне сонячне, або навпаки два часткових сонячних і одне повне місячне). Оскільки 8 жовтня повне місячне затемнення, то це означає, що Місяць знаходиться в площині орбіти Землі. Отже наступне затемнення можливе через півмісяця, тобто 23 жовтня і буде воно частковим сонячним.



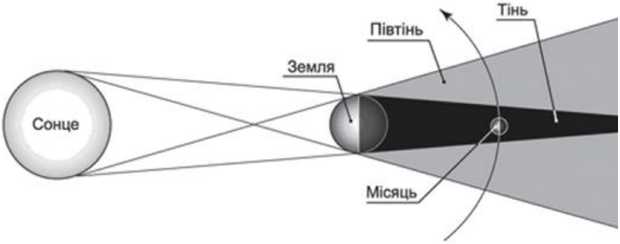
8 жовтня Сонце перебуватиме в сузір'ї Діви, а затемнення місячне, отже Місяць перебуватиме в протилежному сузір'ї, тобто в сузір'ї Риб, 23 жовтня Сонце перебуває ще в Діві, отже на фоні цього сузір'я і відбудеться затемнення.

19. а) Намалюйте схематичний малюнок, який ілюструє місячне затемнення.

б) Поясніть коли відбувається повне місячне затемнення, часткове місячне затемнення і напівтіньове місячне затемнення.

в) Чому під час повного місячного затемнення Місяць все ж видно і він має червоний колір? (2018 р. ІІІ е. 10 к.)

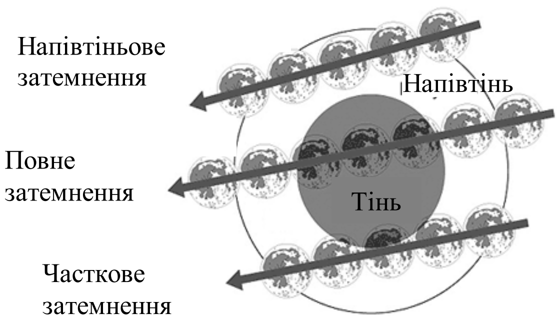
Розв’язок. а)



б) Напівтіньова фаза буває, коли Місяць частково або повністю зайшов у півтінь, але ще не дотикається тіні. Потемніння місячного диска при цьому незначне. Зазвичай цю фазу не спостерігають.

Часткова фаза триває, коли Місяць частково заходить в земну тінь. Її видно чітко, хоча межа трохи розмита через розсіювання світла в земній атмосфері. Розсіяне світло (в основному червона частина спектра) потрапляє в т.ч. і на затінену частину місячного диска, тому там спостерігається слабке червонувате світіння.

Повна фаза триває, коли Місяць повністю заходить в тінь. Місяць при цьому світиться ледве поміт-ним червонуватим світлом.



За наявності у затем-нень вищеописаних фаз їх поділяють на напівтіньові, часткові тіньові і повні тіньові.

Напівтіньове – коли видно лише напівтіньова фаза. Зазвичай такі затемнення не спостерігають.

Часткове тіньове – коли Місяць входить в тінь Землі, але не повністю. Видно напівтіньова фаза на початку і в кінці, а також часткова фаза.

Повне тіньове – коли Місяць входить в тінь Землі повністю. Видно напівтіньова, часткова, повна фази, потім знову часткова і напівтіньова.

в) Під час затемнення на Місяць потрапляє світло, що пройшло крізь атмосферу і заломилося нею. Червоні промені сонячного світла менше за інші розсіюються і поглинаються в земній атмосфері, вони – то в основному і доходять до Місяця крізь земну атмосферу.

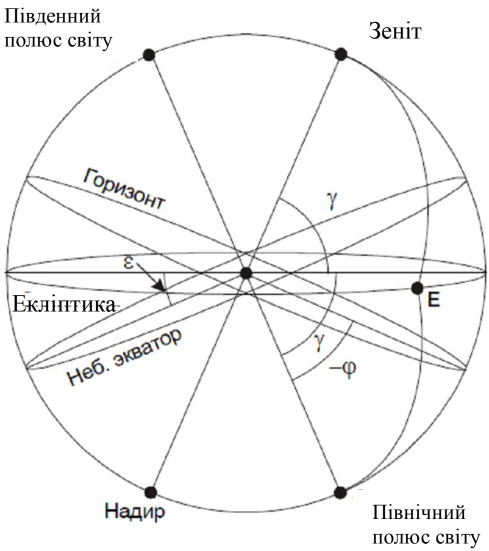
Небесна сфера

20. 22 червня в момент справжнього полудня в північній півкулі тінь стовпця, який стоїть вертикально, дорівнювала висоті стовпця. На якій широті це було? (2017 р. II е. 11 к.)

Розв'язок. Оскільки довжина тіні рівна висоті стовпця, то висота Сонця над горизонтом $h = 45^0$. Враховуючи що 22 червня день літнього сонцестояння, схилення $\delta = 23^0 27'$. З формули $h = 90^0 - \varphi + \delta$ отримаємо, що $\varphi = 90^0 - h + \delta = 68^0 27'$.

21. Спостерігач, який знаходиться в певній точці на поверхні Землі, в деякий момент часу помітив, що для кожної точки екліптики виконується дивна властивість: її кутова відстань від північного полюса світу була рівна її ж зенітній відстані. Визначте широту місця спостереження. Атмосферною рефракцією знехтувати. (2012 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Умова задачі автоматично виконується у будь-який час на Північному полюсі Землі (широта +90°), де Північний полюс світу збігається із зенітом. Проте цей розв'язок не єдиний.



Умова задачі виконується в тому випадку, якщо ці точки будуть симетричні відносно площини екліптики. Відповідність умові задачі видно на малюнку на прикладі точки екліптики E.

Екліптика нахилена до небесного екватора на кут ε, що становить $23{,}4^0$. Отже, кут між напрямком на Північний полюс світу (перпендикулярним до небесного екватора) і площиною екліптики $\gamma = 90^0 - \varepsilon = 66{,}6^0$.

Симетрія Північного полюса і зеніту відносно полюса екліптики означає, що напрям на зеніт утворює такий же кут γ з площиною екліптики, а сама ця площина перпендикулярна до площини, що містить зеніт і обидва полюси світу. Отже, площина небесного меридіану перпендикулярна до горизонту. З цього слідує, що зенітна відстань Північного полюса світу $Z_P = 2\gamma = 133.2°$.

Північний полюс світу буде під горизонтом, отже, пункт спостереження розташовується в південній півкулі Землі. Широта місця спостереження від'ємна і дорівнює по модулю глибині Північного полюса світу під горизонтом: $\varphi = -(Z_p - 90^0) = 90^0 - 2\gamma = -90^0 + 2\varepsilon = -43{,}2^0$.

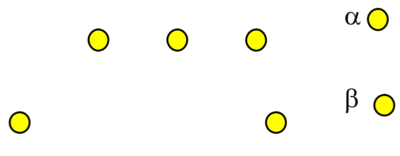
22. Визначте, починаючи з якої широти у північній півкулі 25 січня не настане астрономічна ніч? Рефракцію і розміри Сонця не враховувати. (Астрономічна ніч починається після опускання Сонця на 18 градусів під горизонт). На яку максимальну висоту на цій широті в цей день Сонце підніметься над горизонтом? (2013 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Астрономічна ніч не настане в тих широтах, де Сонце навіть в нижній кульмінації не опуститься нижче 18^0 під горизонт. Висота світила із схиленням δ на широті φ у нижній кульмінації рівна $h=\varphi+\delta-90^0$. Визначимо δ Сонця 25 січня. 22 грудня в день зимового сонцестояння схилення Сонця від'ємне і по модулю чисельно дорівнює куту нахилу екліптики до небесного екватора $23{,}5^0$, тобто $\delta=-23{,}5^0$. 22 березня в день весняного рівнодення схилення дорівнює 0^0. Будемо вважати, що швидкість зміни схилення постійна (це не так, але помилка буде невелика).

Тоді схилення Сонця 25 січня буде приблизно $23{,}5\cdot34/90-23{,}5\approx-14{,}6^0$ (Або оцінюємо за допомогою рухомої зоряної карти). Отже $\varphi=90-\delta+h=90-(-14{,}6)+(-18)=86{,}6^0$. Північніше, глибина погруження Сонця буде менша за 18^0.

Максимальна висота Сонця буде у верхній кульмінації. $h = 90^0 - |\varphi + \delta|$. Оскільки $\varphi>\delta$, то формула набуде виду $h = 90^0 - \varphi + \delta$. $h=90-86{,}6-14{,}6=-11{,}2^0$. А це означає, що Сонце над горизонтом не з'явиться. На цій широті триває полярна ніч.

23. На рисунку зображені сім найбільш яскравих зір сузір'я Великої Ведмедиці. Кутова відстань між зорями «альфа» та «бета» наближено становить $5{,}5^0$. Відомо також, що на продовженні прямої, що проходить через ці зорі на відстані в 5 разів більшій за відстань між ними знаходиться Полярна зірка. Користуючись відомим вам розташуванням цього сузір'я на небесній сфері, обчисліть наближені значення схилення двох зазначених зір. Перевірте обчисленнями, чи заходять ці зорі за горизонт протягом доби в Рівному. ($\varphi_{Рівного} \approx 50{,}5^0$) (2014 р. ІІ е. 11 к.)



Розв'язок. На рисунку зоря «альфа» – крайня справа вгорі, а «бета» – під нею. Отже, кутова відстань від «альфа» до Полярної зорі: $5{,}5^0 \cdot 5 = 27{,}5^0$. В певному наближенні можна вважати, що така кутова відстань зорі і до

Північного полюса світу. Схилення зорі «альфа»: $\delta_1 = 90^0 - 27{,}5^0 = 62{,}5^0$. Так як зорі «альфа та «бета» розташовані приблизно на одній дузі великого кола з Полярною зорею, то це коло є колом схилень для обох зір. Тому схилення зорі «бета» $\delta_2 = 62{,}5^0 - 5{,}5^0 = 57{,}0^0$.

Зоря може заходити за горизонт, якщо її висота в нижній кульмінації $h_н$ менша нуля. Значення $h_н$ визначається за схиленням зорі та географічною широтою місця спостережень φ: $h_н = \delta - 90^0 + \varphi$. Широта Рівного становить приблизно $50{,}5^0$. Для зорі «альфа» $h_{н1} = 62{,}5^0 - 90^0 + 50{,}5^0 = 23^0$. Для зорі «бета»: $h_{н2} = 57{,}0^0 - 90^0 + 50{,}5^0 = 17{,}5^0$. Отже, в Рівному обидві зорі ніколи не заходять за горизонт.

24. Увечері учень спостерігав верхню кульмінацію деякої зорі на висоті $66{,}5^0$ в сторону півночі від зеніту, а виміряна ним висота тієї самої зорі у нижній кульмінації дорівнювала $35{,}7^0$. Знайти схилення цієї зорі та географічну широту місця спостереження. (2015 р. ІІ е. 11 к.)

Розв'язок. $h_в = 90^0 + \varphi - \delta$ (1). $h_н = -90^0 + \varphi + \delta$ (2)

До виразу (1) додаємо (2), отримаємо: $\varphi = \dfrac{h_в + h_н}{2} = 51{,}1^0$ =$51{,}1^0$

Із формули (1) визначимо: $\delta = 90^0 + \varphi - h_в = 74{,}6^0$.

25. Узимку опівночі за місцевим часом у Рівному ($50^0 37'$ північної широти, $26^0 13'$ східної довготи) зоря, що не заходить, спостерігалась у верхній кульмінації на зенітній відстані $10^0 43'$. О котрій годині за київським часом спостерігали зорю та яке її схилення? (2020 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Переведемо довготу в години. $1^0 \rightarrow 4^m$, $1' \rightarrow 4^s$. $\lambda = 26^0\, 13' = 104^m 52^s \approx 1^h\, 45^m$.

Знайдемо поясний час $T_п = T_m - \lambda + n$, де n=2. $T_п = 0^h\, 15^m$.

$h_{в.к.} = 90^0 - z_{в.к.} = 79^0 17'$.

1 вип. $h_{в.к.} = 90^0 - \varphi + \delta$. Звідси $\delta = h_{в.к.} - 90^0 + \varphi = 39^0 54'$.

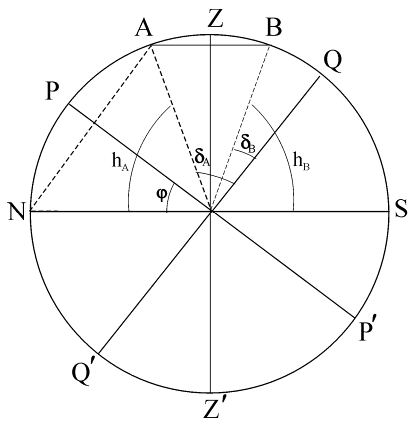
2 вип. $h_{в.к.} = 90^0 - \delta + \varphi$ Звідси $\delta = 90^0 + \varphi - h_{в.к.} = 61^0{,}2'$

За умовою зоря не заходить $\delta \geq 90^0 - \varphi$, отже перший випадок не підходить. Схилення зорі $\delta = 61^0{,}2'$.

26. Схилення зорі А більше, ніж схилення зорі В вдвічі. На якій широті верхня кульмінація цих зір буде відбуватися на одному альмукантараті, якщо нижня кульмінація зорі А відбувається на горизонті? Спостереження проводяться в північній півкулі.

Альмукантарат світила — малий круг небесної сфери, що проходить через світило, площина якого паралельна площині математичного *горизонту.* (2016 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Якщо зорі кульмінують на одному альмукантараті, це означає, що висота світил у верхній кульмінації однакова, але кульмінація зорі з більшим схиленням відбувається на північ від зеніту, а зорі з меншим схиленням – на південь від зеніту.



Отже, для зорі A: $h_A = h_{\max} = 90^0 - \varphi + \delta_A$ (1).

Для зорі B: $h_B = h_{\max} = 90^0 - \delta_B + \varphi$ (2).

Оскільки $h_A = h_B$, то $90^0 - \varphi + \delta_A = 90^0 - \delta_B + \varphi$. Звідси

$2\varphi = \delta_A + \delta_B$. Враховуючи, що $\delta_A = 2\delta_B$, отримаємо $2\varphi = \frac{3}{2}\delta_A$ (3).

Нижня кульмінація зорі A відбувається на горизонті, отже $h_{min\,A}=0$.

$h_{\min A} = -90^0 + \varphi + \delta_A$. Звідси $\delta_A = 90^0 - \varphi$. Підставимо в (3). $2\varphi = \frac{3}{2}(90^0 - \varphi)$. Звідси $\varphi = 38{,}6^0$.

Рух планет

27. Чи можна спостерігати проходження Марса по диску Сонця? Меркурія по диску Сонця? (2011 р. III е. 10 к.)

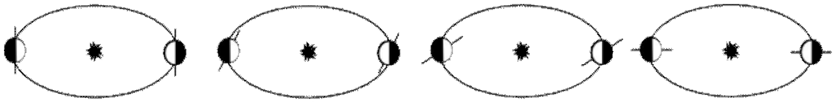
Розв'язок. Меркурія – можна, Марса – ні. Тільки внутрішні планети можуть проходити між Землею і Сонцем.

28. Всі планети обертаються навколо Сонця в одному напрямку (проти стрілки годинника, якщо дивитися з північної півкулі). В певний момент Венера і Юпітер виявились на небі поруч і неподалік від Сонця. В яку сторону відносно Сонця вони будуть переміщуватися по небу для земного спостерігача у північній півкулі? Середня швидкість руху Венери по орбіті 35 км/с, Юпітера – 13 км/с, Землі – 29,8 км/с. (2013 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. Юпітер знаходиться далі від Сонця, ніж Земля, тому якщо він виявився на небі поряд з Сонцем, то це означає, що він знаходиться за Сонцем (у т.з. «верхньому сполученні»). Венера ближча до Сонця, ніж Земля, тому вона у такому разі може виявитися і за Сонцем (у верхньому сполученні), і перед ним (у нижньому сполученні). Для спостерігача, що знаходиться в північній півкулі Землі планета, що знаходиться у верхньому сполученні, рухається вліво, а планета, що знаходиться в нижньому сполученні – управо. Проте сама Земля також рухається навколо Сонця, причому її кутова швидкість менша кутової швидкості Венери, але більша кутової швидкості Юпітера ($\omega = \upsilon R$). Тому Юпітер для земного спостерігача зміщуватиметься направо, а Венера – також направо, якщо вона знаходиться в нижньому сполученні, і наліво, якщо вона знаходиться у верхньому сполученні.

29. На якій планеті Сонячної системи "Заполярря" (область планети, на якій можливі полярні дні і полярні ночі) займає найбільшу площу? Обгрунтуйте відповідь. (2011 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Як відомо, характер освітлення Сонцем поверхні планети залежить від нахилу осі обертання планети до її орбіти. Наочну ілюстрацію цього твердження видно на малюнку.



а б в г

Якщо нахил осі обертання планети до орбіти дорівнює 90^0 (рис. А), то кожну добу на всій поверхні планети рівно половину доби триватиме ніч, половину – день. Можна сказати, що на такій планеті буде вічне рівнодення. Полярного дня або полярної ночі (дня або ночі, що тривають безперервно протягом однієї або більше доби) на такій планеті не буде ніде. "Заполярря" на такій планеті просто немає (його площа дорівнює нулю). Якщо кут нахилу трохи відрізняється від 90^0, то "Заполярря" буде, але площа його буде невелика. Таким чином обертаються Меркурій, Юпітер і Венера.

Якщо нахил осі обертання планети до її орбіти не дорівнює ні 90^0, ні 0^0 (рис. б і в), то полярні дні і ночі можливі в приполярних областях, причому широти полярних кіл рівні куту нахилу осі до орбіти (наприклад, земна вісь нахилена до орбіти Землі на 66^0,5 , тому північний і південний полярні кола розташовані на широтах 66^0,5 пн.ш. і 66^0,5 пд.ш., відповідно). Так що, чим менший кут нахилу осі до орбіти, тим на більш низьких широтах розташовуються полярні кола і тим більше площа планети, зайнята "Заполяррям" (порівняйте рис. б, де вісь планети нахилена під кутом 60^0 і рис. в, де під кутом 30^0) . Осі обертання планет Земля, Марс, Сатурн і Нептун нахилені до їх орбіт на кут близько 30^0.

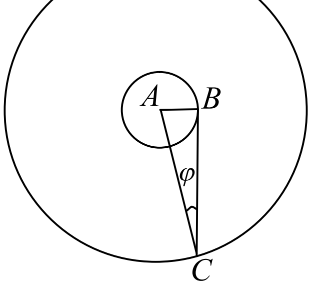
І, нарешті, якщо вісь обертання планети лежить в площині її орбіти (кут нахилу дорівнює 0^0, рис. г), то полярний день і полярна ніч будуть охоплювати (поперемінно) всю поверхню планети (рівно на половині планети полярний день, на половині – полярна ніч). Полярні кола зливаються і "Заполяррям" стає вся планета.

30. Тривалість доби на Марсі 24 год. 37 хв. Один марсіанський рік триває 1,88 земних років. Якою є тривалість марсіанського року в марсіанських добах? (2013 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. Тривалість марсіанського року в земних добах складає $365{,}25 \cdot 1{,}88 \approx 686{,}7$ діб. Тривалість марсіанських діб в земних добах $\dfrac{24 \cdot 60 + 37}{24 \cdot 60} \approx 1{,}029$. Тому тривалість марсіанського року в марсіанських добах складає $\dfrac{686{,}7}{1{,}029} \approx 668$ діб.

31. Момент останнього великого протистояння Марса – 28 серпня 2003 року о 17:30 за всесвітнім часом. Наступна така подія буде у 2018 році. Визначте дату його настання. (2011 р. III е. 11 к.)

Розв'язок. Синодичиний період Марса 779,95 діб. 28 серпня 2018 року настане через 5479 діб від 28 серпня 2003 року, тобто, через 7,0248 синодичних періоди. Причому, 0,0248 відповідає 0,0248 · 779,95=19,34 добам. Відповідно момент протистояння відбувся на 19,34 діб раніше 28 серпня. Це 9 серпня.



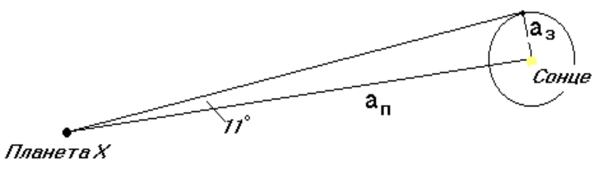
32. Яка максимальна елонгація Землі для спостерігача, який знаходиться на Юпітері? Орбіти планет вважати коловими з середньою відстанню до Сонця (2014 р. II е. 11 к.)

Розв'язок. Побудувавши конфігурацію планет шуканий кут отримаємо з ΔABC ($AB = 1$ а.о., $AC = 5{,}2$ а.о.). $\sin\varphi = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{5{,}2}$.

$\varphi \approx 11^0$

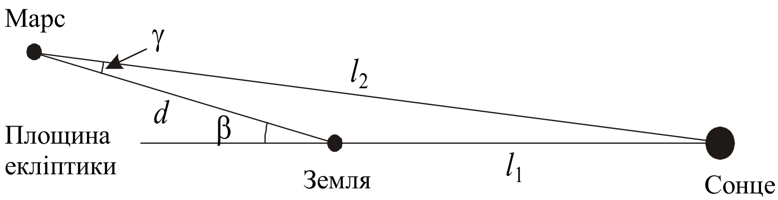
33. Деякий іпопланетянин на основі спостережень встановив, що найбільша елонгація Землі становить 11^0. На якій з планет Сонячної системи знаходився спостерігач? (Відстань від Землі до планет: Меркурія – 0,39 а.о., Венери – 0,72 а.о, Марса – 1,52 а.о., Юпітера – 5,2 а.о., Сатурна – 9,54 а.о., Урана – 19,18 а.о., Нептуна – 30,06 а.о.). (2018 р. II е. 11 к.)

Розв'язок. Для встановлення планети слід визначити яку-небудь її характеристику. Зобразимо на



малюнку взаємне розміщення планети, Сонця і Землі під час елонгації. Пряма, що з'єднує планету і Землю, буде дотичною до орбіти Землі. Позначимо радіуси орбіт Землі і планети як $a_з$ і $a_п$. З прямокутного трикутника визначаємо: $a_п=a_з/\sin 11°$. Враховуючи, що радіус земної орбіти становить 1 а.о., одержимо значення радіуса орбіти планети – 5,2 а.о. Отже, інопланетянин проживає на Юпітері.

34. В одне з протистоянь Марса, він розташовувався на небі на $4{,}6^0$ над екліптикою і мав кутовий діаметр $13{,}9''$. Якою була кутова відстань між Сонцем і Землею при спостереженні з Марса в цей день? (2019 р. ІІІ е. 10 к.)

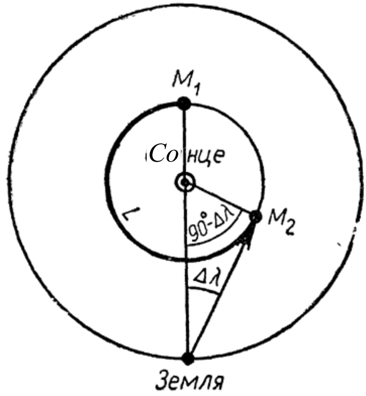


Розв'язок. Марс знаходиться у протистоянні. Це означає, що Сонце, Земля і Марс знаходяться в одній площині, яка перпендикулярна до екліптики. Зобразимо всі три тіла в даній площині. Тут $\beta=4{,}6^0$ згідно умови.

Знаючи кутовий діаметр Марса, можна знайти відстань між Землею і Марсом: $d=\dfrac{D}{\delta}$, де D – діаметр Марса, δ – кутовий діаметр Марса в радіанах $\delta=\dfrac{13{,}9''}{3600}\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{13{,}9''}{206265}$. $d=\dfrac{6780\cdot 206265}{13{,}9}\approx 100{,}8\cdot 10^6$ км $\approx 0{,}67$ а.о. Знаючи відстань від Сонця до Землі l_1=1 а.о., відстань між Сонцем і Марсом l_2, можна обчислити за теоремою косинусів $l_2^2=l_1^2+d^2-2l_1d\cos(180-\beta)=l_1^2+d^2+2l_1d\cos\beta$, але з урахуванням того, що кут β дуже малий, і його косинус дуже близький до одиниці, отримаємо, що $l_2 = l_1 + d = 1{,}67$ а.е. Шукана кутова відстань між Сонцем і Землею на небі Марса обчислюється з теореми синусів: $\dfrac{l_1}{\sin\gamma}=\dfrac{l_2}{\sin(180-\beta)}$. Звідси $\sin\gamma=\dfrac{l_1\cdot\sin\beta}{l_2}\approx 0{,}048$. Тоді $\gamma\approx 2{,}8^0$.

35. Верхнє сполучення Меркурія відбулося 7 березня 2017 р. Коли приблизно наступила найближча найбільша західна елонгація планети (кутова відстань між Сонцем і Меркурієм при спостереженні з Землі в цей момент $\Delta\lambda=26^0$), якщо середній добовий рух Меркурія $\omega=4^0,09$, а Землі − $\omega_0=0^0,99$? (2017 р. II е. 11 к.)

Розв'язок. Меркурій рухається швидше ніж Земля ($\omega>\omega_0$). Зобразимо на малюнку Землю і Меркурій відносно неї в день t_1 верхнього сполучення (M_1) і в день t_2 найближчої найбільшої західної елонгації (M_2). За проміжок часу $\Delta t = t_2-t_1$ Меркурій пройде дугу $L=M_1M_2$ з середнім добовим рухом $\Delta\omega = \omega-\omega_0 = 4^0,09-0^0,99 = 3^0,1$. З малюнка видно, що $L = 180^0+ (90^0-\Delta\lambda) = 270^0-26^0 = 244^0$.



Тоді $\Delta t=L/\Delta\omega=244^0/3^0,1\approx78$ діб і найближча найбільша західна елонгація наступила в день t_2 = 24 травня 2017 року.

36. В один момент часу Венера виявилася в найбільшій східній елонгації як для землян, так і для спостерігачів на Марсі. Зобразіть це на малюнку. На якій кутовій відстані від Сонця було видно Марс із Землі в цей момент і яка відстань від Землі до Марса в цей момент? Орбіти всіх трьох планет вважати круговими. (2020 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. Оскільки Венера перебувала в найбільшій східній елонгації як для Землі, так і для Марса, то ці дві планети розташовувалися в напрямку, перпендикулярному радіусу-вектору Венери (див. малюнок). Кутову відстань Венери від Сонця на Землі під час найбільшої елонгації знайдемо з прямокутного трикутника $ЗBC$. $ЗC$ = 1 а.о., BC = 0,72 а.о..

$$\sin\angle BЗC = \frac{0,72}{1} = 0,72 .$$

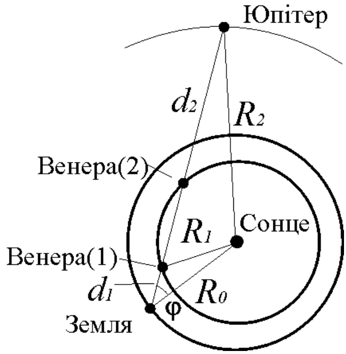
$\angle BЗC \approx 46^0$. Отже, Марс знаходився на 134^0 від Сонця на захід. Відстань від Землі до Венери знайдемо також з трикутника $ЗBC$.

$$ЗB = \sqrt{ЗC^2 - BC^2} \approx 0,69 \text{ а.о.}$$

Відстань від Марса до Венери знайдемо з трикутника MBC. $MB = \sqrt{MC^2 - BC^2} = \sqrt{1,52^2 - 0,72^2} \approx 1,34$ а.о. Тоді відстань від Землі до Марса 0,65 а.о.

37. Для земного спостерігача Юпітер вступає в сполучення з Венерою, маючи однакові екваторіальні кутові розміри з нею. Побудувати малюнок і знайти кутову відстань між Венерою і Сонцем для земного спостерігача в цей момент? Орбіти Венери, Землі і Юпітера вважати круговими і такими, що лежать в одній площині. (2014 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Зобразимо конфігурацію, описану в умові задачі. R_0 –радіус орбіти Землі, R_1 – радіус орбіти Венери, R_2 – радіус орбіти Юпітера, які беруться з таблиці, d_1 – відстань від Землі до Венери, d_1 – відстань від Землі до Юпітера. Венера може знаходитись в одному з двох положень (1 чи 2). φ – шуканий кут.



За теоремою косинусів $R_1^2 = R_0^2 + d_1^2 - 2R_0 d_1 \cos\varphi$ (1)

$R_2^2 = R_0^2 + d_2^2 - 2R_0 d_2 \cos\varphi$ (2). В умові сказано, кутові діаметри Юпітера і Венери однакові $k = \dfrac{d_1}{r_1} = \dfrac{d_2}{r_2}$, де r_1, r_2 – екваторіальні радіуси Венери і Юпітера.

Звідси $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{d_2}{d_1}$. Значення радіусів беремо з таблиці $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{11{,}19}{0{,}95} \approx 11{,}8$. Отже $d_2 = 11{,}8 d_1$

Підставимо в рівняння (2) $R_2^2 = R_0^2 + 139{,}24 d_1^2 - 23{,}6 R_0 d_1 Cos\varphi$ (3). Домножимо рівняння (1) на 11,8: $11{,}8R_1^2 = 11{,}8R_0^2 + 11{,}8 d_1^2 - 23{,}6 R_0 d_1 Cos\varphi$ і віднімемо рівняння (3) $11{,}8R_1^2 - R_2^2 = 10{,}8R_0^2 - 127{,}44 d_1^2$. Звідси $d_1 = \sqrt{\dfrac{10{,}8R_0^2 - 11{,}8R_1^2 + R_2^2}{127{,}44}} \approx 0{,}5$ а.о. Отже Венера може бути лише в положенні 1. Тоді з рівняння (1) $\cos\varphi = \dfrac{R_0^2 + d_1^2 - R_1^2}{2R_0 d_1} = 0{,}75$. $\varphi \approx 41^0$.

38. Для спостерігача на Землі Марс знаходиться в східній квадратурі. Для спостерігача на Марсі Меркурій знаходиться в найбільшій східній елонгації, а Венера вступає в сполучення з Меркурієм, знаходячись за ним. Яка в цей момент відстань від Землі до Венери в а.о.? Орбіти планет вважати коловими і такими, що лежать в одній площині. (2015 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Нехай r_1, r_2, r_3, r_4 – радіуси орбіт Меркурія, Венери, Землі і Марса відповідно, які беремо з таблиці.

Нехай α – кут Марс – Сонце –Земля. Тоді $\cos\alpha = \frac{r_3}{r_4} = \frac{1 a.o.}{1{,}52\, a.o} \approx 0{,}66$

$\alpha \approx 48^0{,}9$.

Нехай β – кут Марс-Сонце-Меркурій. Тоді $\cos\beta = \frac{r_1}{r_4} = \frac{0{,}39\, a.o.}{1{,}52\, a.o} \approx 0{,}26$

$\beta \approx 75^0{,}1$.

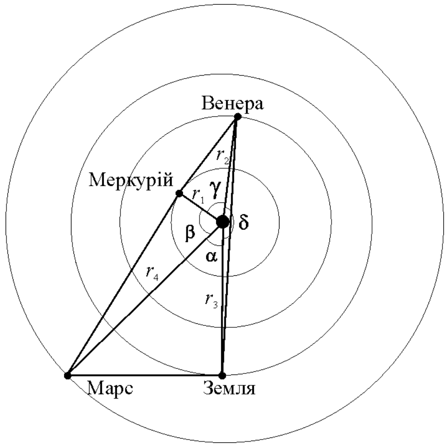
Нехай γ – кут Венера-Сонце-Меркурій. Тоді

$\cos\gamma = \frac{r_1}{r_2} = \frac{0{,}39\, a.o.}{0{,}72\, a.o} \approx 0{,}54$

$\gamma \approx 57^0{,}2$.

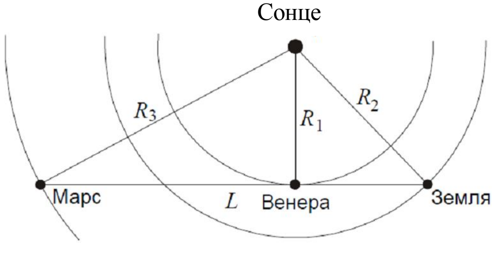
Нехай δ – кут Венера-Сонце-Земля. Тоді $\delta = 360^0 - \alpha - \beta - \gamma = 178^0{,}8$

Тоді за теоремою косинусів $r^2 = r_3^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_3 \cdot r_2 \cdot \cos\delta$. Після підстановок $r \approx 1{,}71$ а.о.



39. В один день Венера опинилася в найбільшій східній елонгації при спостереженні із Землі і найбільшій західній елонгації – при спостереженні з Марса. Знайдіть в цей день відстань від Землі до Марса і видимий кутовий діаметр Марса при спостереженні із Землі. Орбіти всіх планет вважати круговими. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. У разі кругових орбіт найбільша елонгація (кутова відстань від Сонця) внутрішньої планети настає, коли напрям на неї з точки спостереження є дотичною лінією до її орбіти. Найбільша елонгація Венери по умові задачі східна для Землі і західна для Марса, отже, Венера знаходиться на лінії, що з'єднує Землю і Марс. Трикутники Сонце-Венера-Земля (СВЗ) і Сонце-Венера-Марс (СВМ) прямокутні.



Відстань від Землі до Марса

$L = \sqrt{R_3^2 - R_1^2} + \sqrt{R_2^2 - R_1^2} = 2{,}03$ а.о. = =$304{,}5 \cdot 10^6$ км.

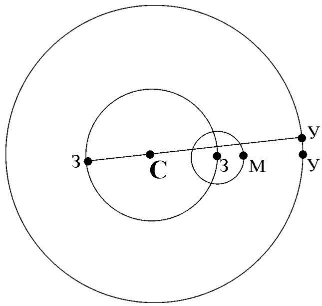
Кутовий діаметр Марса в цей день складе:

$d_{рад} = \sin d = \dfrac{D}{L}$ =22,28·10-6. $1рад = \dfrac{180^0}{\pi} = \dfrac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{3{,}14159} = 206265''$. Отже кутовий діаметр Марса в секундах $d'' = 22{,}28 \cdot 10^{-6} \cdot 206265'' \approx 4{,}6''$.

40. Уран має сидеричний період обертання навколо Сонця 84 земних роки. 8 жовтня 2014 року спостерігалося досить рідкісне явище – покриття Урана Місяцем під час місячного затемнення.

а) Обчисліть синодичний період Урана і визначте, в якому місяці відбудеться наступне сполучення Урана з Сонцем, тобто Сонце буде знаходитись на одній лінії між Землею і Ураном.

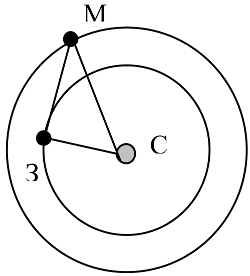
б) Зробіть схематичні малюнки (без дотримання масштабу) даних явищ. (2017 р. II е. 10 к.)



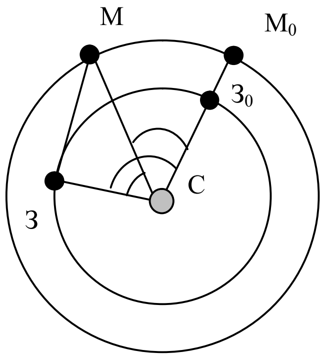
Розв'язок. Оскільки 8 жовтня 2014 року спостерігалося місячне затемнення, значить Місяць був повний, і він, а разом з ним і Уран, перебували на небі в протилежному боці від Сонця. З цього робимо висновок, що Уран знаходився в протистоянні. Сполучення Урана з Сонцем відбудеться через половину синодичного періоду Урана, тобто часу, коли Земля і Уран знову будуть у протистоянні. Знайдемо його. $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{T_З} - \dfrac{1}{T_У}$.

$S = \dfrac{T_У \cdot T_З}{T_У - T_З} = \dfrac{84 \cdot 1}{84 - 1} \approx 1{,}01$ р. (Або згідно законів кінематики обертального руху: Відносна кутова швидкість Землі і Урана $\omega_{відн} = \omega_З - \omega_У = \dfrac{2\pi}{T_З} - \dfrac{2\pi}{T_У}$. За час сидеричного періоду S Земля обжене Уран на кутову довжину орбіти 2π. Отже $\omega_{відн} S = 2\pi$. Або $\dfrac{2\pi}{T_З} - \dfrac{2\pi}{T_У} = \dfrac{2\pi}{S}$. Звідси $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{T_З} - \dfrac{1}{T_У}$). Радіус орбіти Урана набагато більший, ніж радіус земної орбіти. Його період обертання навколо Сонця також набагато більший земного року. За один земний рік Уран проходить незначну частину своєї орбіти, тому як бачимо його синодичний період ненабагато більший земного року. Звідси можна зробити висновок, що сполучення має бути трохи пізніше, ніж через півроку. Оскільки протистояння було на початку жовтня, то сполучення припаде на квітень 2015 року.

41. Для уточнення параметрів орбіти Марса була проведена радіолокація планети. Між моментом відправки сигналу з антени космічної телекомунікації і моментом прийому відбитого сигналу пройшло 518 секунд. В який час доби проводилася радіолокація? Відповідь обґрунтуйте. Наступна радіолокація проводилася тоді, коли Марс був у східній квадратурі (трикутник МЗС прямокутний). Який це був час доби? Скільки діб пройшло між цими радіолокаціями? (2013 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок. Найближча відстань від Землі до Марса 1,52 а.о. –1 а.о.=0,52 а.о., або в метрах $0{,}52\cdot 1{,}496\cdot 10^{11}$ м=$0{,}77792\cdot 10^{11}$ м=$777{,}92\cdot 10^{8}$ м. Це так зване протистояння. Сонце, Земля і Марс на одній лінії. Оскільки радіосигнал повернувся за 518 с, то до Марса він рухався 259 с і подолав відстань ct=$3\cdot 10^{8}$ м/с $\cdot$259 с = $777\cdot 10^{8}$ м. Отже, Марс дійсно знаходиться в протистоянні (Якби було інше розміщення, то сигнал йшов би довше). Для радіолокації Марс явно повинен знаходитися над горизонтом, отже, Сонце під час радіолокації знаходилося під горизонтом, тобто радіолокація проводилася вночі.

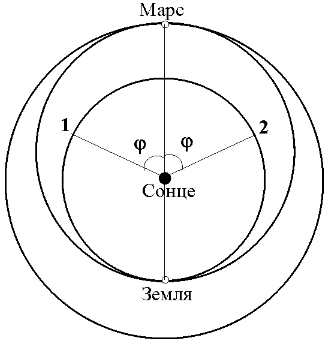


Наступна радіолокація проводилася, коли Марс був у східній квадратурі. За цей час t Марс пройшов дугу орбіти $М_0СМ=\varphi_м=\omega_м t=\frac{2\pi}{T_M}t$, де $\omega_м$ – кутова швидкість Марса, $T_М$ – період його обертання. Аналогічно Земля пройде дугу $З_0СЗ=\varphi_з=\omega_з t=\frac{2\pi}{T_З}t$. За умовою східної квадратури трикутник МЗС прямокутний. $\cos$ МСЗ$=\frac{СЗ}{СМ}=\frac{1\text{ а.о.}}{1{,}52\text{ а.о.}}=0{,}657$. Кут МСЗ в радіанній мірі становить 0,85.

Отже $\varphi_з-\varphi_м=0{,}85$; $\frac{2\pi}{T_З}t-\frac{2\pi}{T_M}t=0{,}85$. Звідси $t=\frac{0{,}85\cdot T_M\cdot T_З}{2\pi(T_M-T_З)}$=105,4 діб.

В східній квадратурі Марс видно ввечері, отже радіолокація відбувалася ввечері.

42. Космічний корабель здійснює переліт від Землі до Марса по Гоманівській орбіті (в перигелії ця орбіта дотикається до орбіти Землі, а в афелії – орбіти Марса). Такий політ триває 258 діб. Визначте мінімальний час, протягом якого космонавтам доведеться чекати моменту відправлення в зворотній шлях по орбіті такої ж форми. Орбіти планет вважати коловими і такими, що лежать в одній площині. Сидеричний період обертання Землі – 1 рік, Марса – 1,88 року. (2015 р. ІІІ е. 10 к.)



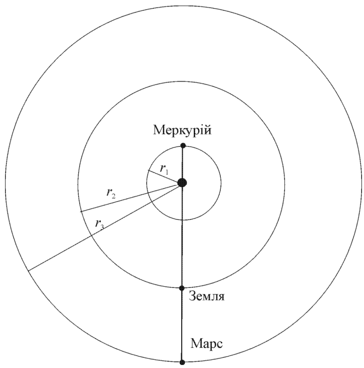
Розв'язок. В момент прильоту космічного корабля на Марс Земля буде знаходитися в положенні 1 і випереджатиме Марс на кут $\varphi=\omega_З t-\pi$, де $\omega_З=\dfrac{2\pi}{T_З}$ – кутова швидкість Землі. В момент відправлення Земля повинна відставати на такий же кут φ і знаходитися в положенні 2 по відношенню до Марса. Отже час очікування дорівнює часу, за який Земля пройде кутову відстань 2π–2φ за умови нерухомого Марса. Цей час $t=\dfrac{2\pi-2\varphi}{\omega_З-\omega_M}$, де ($\omega_З$–$\omega_M$) – відносна кутова швидкість Землі і Марса. Після підстановки

$$\tau=\frac{4\pi(1-\frac{t}{T_З})}{\frac{2\pi}{T_З}-\frac{2\pi}{T_M}}=\frac{2(1-\frac{t}{T_З})}{\frac{1}{T_З}-\frac{1}{T_M}}\approx 457 \text{ діб.}$$

43. В деякий момент часу Земля знаходилась у положенні, в якому відстань до Меркурія максимальна, а відстань до Марса мінімальна.

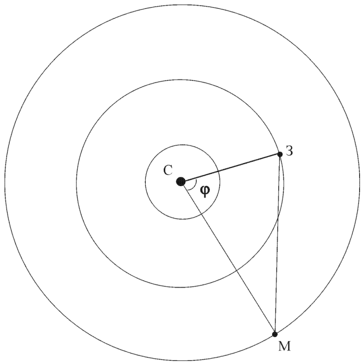
а) Знайдіть ці відстані і зобразіть дану конфігурацію на малюнку.

б) Через який проміжок часу від початкової конфігурації відстань між Землею і Марсом стане такою ж, як і максимальна відстань між Землею і Меркурієм? (2017 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок. Нехай r_1 =0,4 а.о. – відстань від Меркурія до Сонця, r_2 =1 а.о. – відстань від Землі до Сонця, r_3=1,5 а.о. – відстань від Марса до Сонця. Тоді для даної конфігурації відстань від Землі до Меркурія є максимальною і становить 1,4 а.о, відстань від Землі до Марса 0,5 а.о.

Розглянемо конфігурацію, коли відстань від Землі до Марса (ЗМ) дорівнює максимальній відстані між Меркурієм і Землею (1,4 а.о). Для трикутника СЗМ застосуємо теорему косинусів, знаючи, що СЗ=1 а.о. – відстань від Землі до Сонця, СМ=1,5 а.о. – відстань від Марса до Сонця.



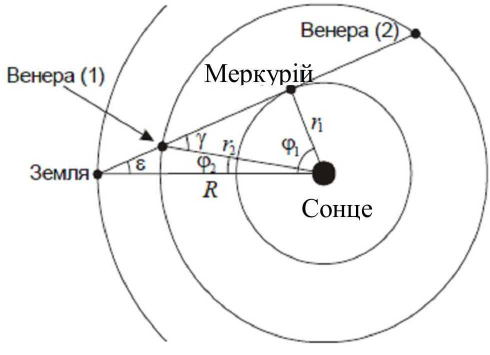
$$ЗM^2 = CЗ^2 + CM^2 - 2 \cdot CЗ \cdot CM \cdot \cos\varphi$$

Звідси $\cos\varphi = \dfrac{1 + 2{,}25 - 1{,}96}{2 \cdot 1 \cdot 1{,}5} = 0{,}43$.

$\varphi \approx 65^0 = 13\pi/36$ рад.

Отже, коли настане така конфігурація, кутова відстань між Марсом і Землею повинна становити $13\pi/36$ рад. Кутова швидкість Марса $\dfrac{2\pi}{T_M}$, де $T_М$ =1,88 р. – період обертання Марса, кутова швидкість Землі $\dfrac{2\pi}{T_З}$, де $T_З$ =1 р. – період обертання Землі. $\dfrac{2\pi}{T_З}t - \dfrac{2\pi}{T_M}t = \dfrac{13\pi}{36}$. Звідси $t \approx 0{,}39$ року.

44. Перебуваючи в точці найбільшої східної елонгації, Меркурій вступив у сполучення з Венерою (Меркурій, Земля, Венера на одній лінії), більш ніж в 5 разів поступаючись їй за видимим діаметром. У якої з цих планет найближче нижнє сполучення з Сонцем відбудеться раніше? На який час? Орбіти Меркурія, Венери і Землі вважати круговими і такими, що лежать в одній площині. (Найбільша елонгація – це найбільше кутове відхилення планети від Сонця). (2018 р. III е. 10 к.)



Розв’язок. Положення Меркурія, Венери і Землі в зазначений в умові момент показано на малюнку.

Перебуваючи в сполученні з Меркурієм, Венера може перебувати в двох точках своєї орбіти, позначених на малюнку цифрами 1 і 2. Але, оскільки Меркурій поступається за видимим діаметром Венері більше ніж в 5 разів, то це може бути, тільки тоді коли Венера знаходиться в положенні 1, недалеко від Землі. (Можна провести і кількісний аналіз, знайшовши з прямокутного трикутника ЗМС відстань до

Меркурія, його видимий кутовий радіус. Тоді, помноживши на 5 знайти видимий кутовий радіус Венери і відстань до неї. В результаті відстань до Венери буде наближено дорівнювати 0,46 а.о., що можливе лише у випадку 1). Позначимо радіуси орбіт Меркурія, Венери і Землі через r_1, r_2 і R і визначимо кути φ_1 і φ_2 в даний момент. Для Меркурія отримуємо $\varphi_1 = \arccos\frac{r_1}{R} = \arccos 0{,}39 = 67{,}2^0 = 1{,}17$ рад. Кут φ_2 обчислюється з трикутника Сонце-Венера-Земля з урахуванням властивості суміжних кутів:

$$\varphi_2 = \gamma - \varepsilon = \arcsin\frac{r_1}{r_2} - \arcsin\frac{r_1}{R} = \arcsin\frac{0{,}39}{0{,}72} - \arcsin 0{,}39 = 9{,}6^0 = 0{,}17 \text{ рад}.$$

Час, що залишився до нижнього сполучення Меркурія: $t_1 = \dfrac{\varphi_1}{\omega_M - \omega_З} = \dfrac{\varphi_1}{\dfrac{2\pi}{T_M} - \dfrac{2\pi}{T_З}} = \dfrac{1{,}17}{\dfrac{2\pi}{0{,}24} - \dfrac{2\pi}{1}} = 0{,}059$ років $= 21{,}5$ діб.

Час, що залишився до нижнього сполучення Венери: $t_1 = \dfrac{\varphi_1}{\omega_В - \omega_З} = \dfrac{0{,}17}{\dfrac{2\pi}{0{,}72} - \dfrac{2\pi}{1}} = 0{,}044$ років $= 16{,}1$ діб.

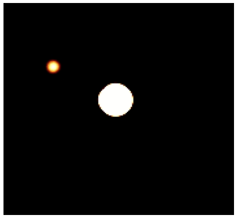
Таким чином, Венера вступить в нижнє сполучення на 5,5 діб раніше Меркурія.

Закон всесвітнього тяжіння

45. Підлетівши до незнайомої планети, космічний човен, вимкнувши двигуни, вийшов на колову орбіту, і космонавти приступили до попередніх досліджень. Як, використовуючи тільки годинник, вони можуть визначити середню густину речовини планети? (2011 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Якщо космічний човен рухається навколо планети із вимкнутими двигунами, то єдиною силою, що діє на нього, є сила $F_{грав}$ притягування до планети: $F_{грав} = G\frac{Mm}{R^2}$, де G – гравітаційна стала, M – маса планети, m – маса човна і R – відстань між човном та центром планети. При незначній висоті польоту R можна вважати рівним радіусу планети (ми вважаємо, що вона за формою близька до кулі). Виразимо масу планети через радіус і середню густину ρ: $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, і, підставивши отриманий вираз для M в попередню формулу, отримаємо: $F_{грав} = \frac{4}{3}\pi G R m\rho$. Оскільки човен рухається по коловій орбіті, то $F_{дц} = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$, де, υ – лінійна та ω – кутова швидкості руху космічного човна, T – період його обертання навколо планети. Прирівнявш праві частини двох останніх виразів, отримаємо густину: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$.Таким чином, визначивши за допомогою годинника період обертання човна навколо планети, можна розрахувати її середню густину.

46. На знімку ви бачите рідкісне явище природи – астероїд Євгенія із супутником. Супутник обертається навколо астероїда діаметром 215 км по майже круговій орбіті радіусом 1190 км і здійснює повний оборот за 4,7 доби. Чи можете ви за допомогою цих даних визначити густину астероїда? (2012 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок. Об'єм кулі радіуса R обчислюється за формулою $\frac{4}{3}\pi R^3$. Супутник обертається по орбіті радіусом r = 1190км з періодом T = 4,7 доби під дією гравітаційної сили. Запішемо другий закон Ньютона для супутника:

$$G\frac{Mm}{r^2} = ma_д = m\frac{4\pi^2}{T^2}r . \ (1)$$

Середня густина планети радіусу R: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$, (2)

З формул (1), (2) отримуємо: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$ (3). Підставивши дані, отримаємо ρ=1160 кг/м3. Ця густина не набагато більше густини води. Це означає, що астероїд може мати пористу будову, або складатися з водяного льоду з невеликою домішкою каменів.

47. Космонавт прилетів на астероїд, що має форму кулі, і обійшов його по екватору за півтори години. Оцінити масу астероїда, якщо відомо, що середня густина астероїда менша за середню густину Землі (5500 кг/м^3), а космонавт рухався з швидкістю 1,5 м/с. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Оскільки довжина екватора радіусом R становить $2\pi R$, то радіус астероїда $R = \frac{\upsilon T}{2\pi}$ =1,3 км, де T – час, за який космонавт обійшов астероїд. Знаючи радіус, можна знайти об'єм астероїда $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Помноживши об’єм на густину, можемо отримати масу. Проте нам відоме лише те, що густина астероїда менша за густину Землі (тобто менша за 5500 кг/м^3), і тому поки що ми можемо отримати лише верхню оцінку маси. Оцінимо густину знизу. Астероїд маленький і його маса явно невелика. Тому обхід пішки такого астероїда можливий лише в тому випадку, якщо швидкість пішохода не виявиться більшою, ніж перша космічна швидкість (інакше пішохід просто полетить). Звідси випливає, що $\upsilon \le \sqrt{\frac{GM}{R}}$, де M – маса астероїда, а G – гравітаційна стала. Перетворимо нерівність: $\frac{2\pi R}{T} \le \sqrt{\frac{GM}{R}}$ або $\frac{2\pi}{T} \le \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$. Підставивши замість маси $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, отримаємо $\frac{2\pi}{T} \le \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$, де ρ – середня густина астероїда. Підносячи нерівність в квадрат і перетворюючи, отримуємо що $\rho \ge \frac{3\pi}{GT^2}$ =4800 кг/м^3. Тепер "вилка" для густини виявляється досить вузькою. Підраховуючи масу для мінімального і максимального значення густини, отримуємо $M_{\min} = 4{,}4 \cdot 10^{13}$кг, $M_{\max} = 5{,}0 \cdot 10^{13}$кг.

48. Дві зорі, які мають однакові маси M обертаються по колових орбітах навколо спільного центра мас, знаходячись на постійній відстані R одна від одної. Який період обертання зір, якщо їхні радіуси набагато менші за R? (2013 р. ІІ е. 10 к.)

Розв’язок. Зорі взаємодіють з силою $F = G\frac{M^2}{R^2}$. Згідно ІІ закону Ньютона $F = Ma = M\frac{\upsilon^2}{\frac{R}{2}} = \frac{2M\upsilon^2}{R}$. З цих рівнянь $\upsilon = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$. Період обертання

$$T = \frac{2\pi\frac{R}{2}}{\upsilon} = \pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}.$$

49. У лютому 2001 року космічний апарат NEAR вперше здійснив м’яку посадку на астероїд Ерос. Швидкість опускання апарату на поверхню Ероса склала 2 м/с. Якби удар виявився пружним, то на яку висоту підстрибнув би апарат від удару? Для спрощення розрахунків вважати астероїд кулею з діаметром 30 км і середньою густиною речовини ρ = 3000 кг/м^3. *Примітка: об'єм кулі обчислюється за формулою* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Оскільки удар пружний, то апарат відскочить від поверхні з тією ж швидкістю, з якою він вдарився об неї. Щоб оцінити висоту підйому, необхідно оцінити прискорення вільного падіння на поверхні:

$g = \frac{GM}{R^2}$; $M = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$. Тоді $g = \frac{4}{3}G\rho\pi R$.

Припускаючи, що апарат відскочить від астероїда на невелику висоту – таку, що зміною величини прискорення вільного падіння можна знехтувати, із закону збереження енергії отримаємо

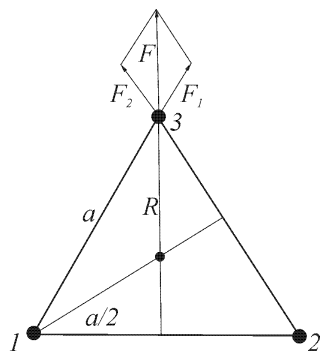
$h = \frac{\upsilon^2}{2g} = \frac{3\upsilon^2}{8G\rho\pi R} \approx 160$ м. Як бачимо, це близько 1% радіуса астероїда, значить, прискорення вільного падіння змінюється приблизно на 2%. Для нашої оцінки це цілком прийнятно.

50. Три зорі однакових мас перебувають у космічному просторі у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною *a* і під дією сил взаємного тяжіння обертаються навколо спільного центра мас по коловій орбіті з кутовою швидкістю ω. Визначити масу зорі.

Розв'язок. Відстань від зорі до центра мас системи *R*, що лежить на перетині бісектрис трикутника, визначимо за теоремою Піфагора з врахуванням того, що точка перетину бісектрис ділить їх у співвідношенні 1 : 2. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Дві зорі між собою взаємодіють з силою $F_1 = G\frac{m^2}{a^2}$. Рівнодійна двох сил, що діє на кожну зорю становить: $F = G\frac{m^2}{a^2}\sqrt{3}$.

Згідно II закону Ньютона $m\omega^2 R = G\frac{m^2}{a^2}\sqrt{3}$.

Тоді $m = \frac{\omega^2 a^3}{3 \cdot G}$.



51. Прискорення вільного падіння на поверхні Марса і Меркурія приблизно однакові – 3,7 м/с^2. Проте діаметр Марса в 1,4 рази більший, ніж діаметр Меркурія. Порівняйте густини планет і перші космічні швидкості для цих планет. (Планети вважати кулями). (2017 р. II е. 10 к.)

Розв'язок. Густина планети $\rho = \frac{M}{V}$, де M – маса планети, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – її об'єм. Згідно закону всесвітнього тяжіння $mg = G\frac{M \cdot m}{R^2}$, звідки $M = \frac{g \cdot R^2}{G}$.

Відношення густин $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{g_1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{g_2}$. Оскільки прискорення вільного падіння однакові, то відношення густин обернено пропорційне відношенню радіусів, а отже і діаметрів. Отже густина Меркурія в 1,4 рази більша, ніж густина Марса.

Перша космічна швидкість визначається за формулою $\upsilon = \sqrt{gR}$. Оскільки прискорення вільного падіння однакові, то більша перша космічна швидкість на Марсі в $\sqrt{1{,}4} = 1{,}18$ разів.

Рух супутників

52. Супутник Землі переведено з однієї колової орбіти, на якій він рухався з швидкістю 4 км/с, на іншу, швидкість руху на якій становить 7 км/с. У скільки разів змінився радіус орбіти супутника? (2014 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. З'ясуємо як швидкість залежить від радіуса орбіти. Нехай супутник летить на висоті h, отже радіус його орбіти $R+h$. Згідно II закону Ньютона $\frac{m\upsilon^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$. Звідси $R+h = \frac{GM}{\upsilon^2}$. Отже $\frac{R+h_1}{R+h_2} = \frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2} = \frac{49}{16} \approx 3$. А це значить, що радіус орбіти зменшився в 3 рази.

53. Визначити мінімальний період обертання супутника нейтронної зорі, густина речовини якої 10^{17} кг/м^3. (2018 р. III е. 10 к.)

Розв'язок. Оскільки потрібно знайти мінімальний період, то відстанню від супутника до зорі порівняно з радіусом зорі можна знехтувати.

Період $T = \frac{2\pi R}{\upsilon}$ (1). Згідно закону всесвітнього тяжіння $m\frac{\upsilon^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$.

Визначаємо звідси швидкість і підставляємо в (1). $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\frac{M}{R}}}$ (2). Маса зорі

$M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Підставимо в (2). $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$. Після підстановки значень отримаємо: $T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3{,}14}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{17}}} \approx 1{,}2$ мс.

54. Яку швидкість повинен мати штучний супутник, щоб обертатися коловою орбітою на висоті 600 км над поверхнею Землі? Який період його обертання? (2018 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Супутник рухається по коловій орбіті під дією сили всесвітнього тяжіння $F = G\frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$, де M – маса Землі, m – маса супутника, R – радіус Землі. Супутник рухається з доцентровим прискоренням $a = \frac{\upsilon^2}{(R+h)}$. Згідно ІІ закону Ньютона $m\frac{\upsilon^2}{(R+h)} = G\frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$. Звідси $\upsilon^2 = G\frac{M}{R+h}$ і відповідно $\upsilon = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}$ (1). Якщо з довідника записати масу Землі і гравітаційну сталу, то можна підставити значення і отримати $\upsilon \approx 7{,}6$ км/с. Якщо ж ці дані вважати невідомими, то виходячи з того, що прискорення вільного падіння на поверхні Землі $g = G\frac{M}{R^2}$, можна записати $GM = gR^2$. Підставивши у вираз (1), отримаємо $\upsilon = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$.

$\upsilon = 6{,}371 \cdot 10^6\text{м} \cdot \sqrt{\frac{10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{6{,}971 \cdot 10^6\text{м}}} \approx 7{,}6\frac{\text{км}}{\text{с}}$. Період обертання $T = \frac{2\pi(R+h)}{\upsilon} \approx 5784$ с.

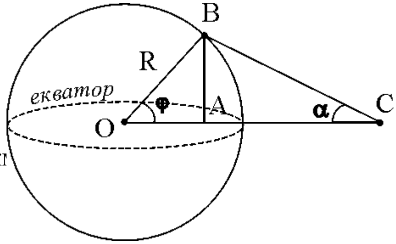
55. Над меридіаном, що проходить через м. Рівне ($\approx 50^0$ пн.ш.) запущено геостаціонарний (синхронний) супутник, тобто супутник, що знаходиться над однією і тією ж точкою земної поверхні в площині екватора. На якій відстані від центра Землі він рухається? Визначити кут між напрямом на центр Землі і напрямом на м. Рівне із супутника. (2020 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Нехай відстань від центра Землі r. З закону всесвітнього тяжіння $m\frac{\upsilon^2}{r} = G\frac{M \cdot m}{r^2}$ або $\upsilon^2 = G\frac{M}{r}$ (1), де M – масса Землі. Період обертання супутника T повинен становити 1 добу.

1 доба = 86400 с. $T = \dfrac{2\pi r}{\upsilon}$ (2). З рівнянь 1,2 отримуємо $r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}$. $r \approx$ 42240 км.

Зобразимо ситуацію на малюнку. С – супутник, В – Рівне, α– шуканий кут.

φ – географічна широта, R – радіус Землі, $OC = r$ – відстань від супутника до центра Землі.



$AB = R \cdot \sin\varphi = 6370 \text{ км} \cdot \sin 50^0 \approx 4880$ км

.

$AO = R \cdot \cos\varphi = 6370 \text{ км} \cdot \cos 50^0 \approx 4095 \text{ км}$

.

$AC = OC - AO = 42240 \text{ км} - 4095 \text{ км} = 38145 \text{ км}$.

$\text{tg}\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4880}{38145} \approx 0{,}128$. α≈7,3^0.

56. Штучний супутник Землі, який запущено з екватора обертається по коловій орбіті в напрямку обертання Землі. Знайти радіус орбіти супутника, якщо супутник періодично проходить над точкою запуску рівно через дві доби. (2013 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок.1). Кутова швидкість супутника більша за кутову швидкість Землі:

$T_З$ = 1 доба. Тоді за 2 доби, тобто за $2T_З$ супутник випереджає Землю на 2π.

$(\omega_c - \omega_З) \cdot 2T_З = 2\pi$; Оскільки $\omega_З = \dfrac{2\pi}{T_З}$, то

$$\left(\omega_c - \frac{2\pi}{T_З}\right) \cdot 2T_З = 2\pi \Rightarrow \omega_c = \frac{3\pi}{T_З}.$$

За другим законом Ньютона для супутника: $G\dfrac{m_c M_З}{R^2} = m_c \omega_c^2 R$.

$GM_З = \left(\dfrac{3\pi}{T_З}\right)^2 R^3$. Звідси $R^3 = \dfrac{GM_З T_З^2}{9\pi^2}$ (1).

Прискорення вільного падіння на Землі: $g = \dfrac{GM_З}{R_З^2}$. Звідси $R_З^3 = \dfrac{GM_З R_З}{g}$ (2).

Поділимо рівняння (1) на рівняння (2):

$$\frac{R^3}{R_3^3}=\frac{gT_3^2}{9\pi^2 R_3}=\frac{10\cdot(24\cdot 3600)^2}{9\cdot 10\cdot 6400000}\approx 130\,. \quad \frac{R}{R_3}\approx 5\,. \quad R=5\cdot R_3=32000\text{ км}\,.$$

2). Кутова швидкість супутника менша за кутову швидкість Землі. Аналогічно $(\omega_з-\omega_c)\cdot 2T_3=2\pi$. $\omega_c=\frac{\pi}{T_3}$. $GM_3=\left(\frac{\pi}{T_3}\right)^2 R^3$.

$$R^3=\frac{GM_3T_3^2}{\pi^2}\quad (1). \qquad R_3^3=\frac{GM_3R_3}{g}\quad (2).$$

Поділимо рівняння (1) на рівняння (2): $\frac{R^3}{R_3^3}=\frac{gT_3^2}{\pi^2 R_3}\approx 1170$;

$\frac{R}{R_3}\approx 10{,}5$; $R=10{,}5\cdot R_3=67200$ км .

57. Штучний супутник Землі, який знаходиться на низькій навколоземній орбіті пролетів над Харковом ($\varphi\approx 50^0$ пн.ш, $\lambda\approx 36^0$ сх.д.). Які географічні координати місця, над яким він пролетить через 1 оберт навколо Землі? Площина орбіти проходить через центр Землі. (2015 р. III е. 10 к.)

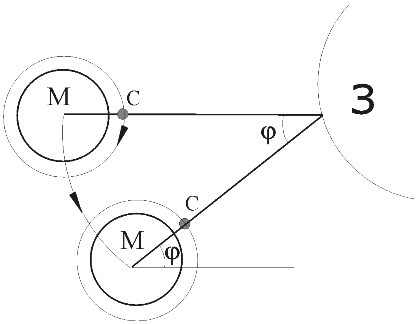
Розв'язок. Період обертання супутника на низькій орбіті $T=\frac{2\pi R}{\upsilon}$, де R – радіус Землі, υ – швидкість супутника. Згідно II закону Ньютона $\frac{m\upsilon^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}$. Звідси $\upsilon=\sqrt{G\frac{M}{R}}$. Враховуючи, що $g=G\frac{M}{R^2}$, отримаємо: $\upsilon=\sqrt{gR}$. Тоді період обертання супутника $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. $T\approx 5000$ с. Через цей час супутник буде знаходитись в тій же точці відносно центра Землі. Але за цей час Земля повернеться навколо своєї осі. За 24 год Земля робить один оберт, то за 5000 с вона повернеться на $\alpha=\frac{360^0\cdot 5000\,\text{с}}{24\cdot 3600\,\text{с}}=20^0$. Тобто через один оберт супутник буде на точкою земної поверхні, довгота якої на 20^0 відрізняється від харківської. Оскільки Земля обертається з заходу на схід, то ця довгота становитиме $36^0–20^0=16^0$. Широта не змінюється, отже координати міста ($\varphi\approx 50^0$ пн.ш. $\lambda\approx 16^0$ сх.д.).

58. Навколо Місяця запустили штучний супутник із мінімальним періодом обертання. Знайдіть цей період. Визначте мінімальний синодичний період (проміжок часу між двома послідовними проходженнями супутника

Місяця перед місячним диском) при спостереженні із Землі. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Визначимо спочатку мінімальний період обертання штучного супутника навколо Місяця. Це буде період обертання навколо Місяця по орбіті з радіусом, що дорівнює радіусу Місяця.

$m\frac{\upsilon^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$, $T_c = \frac{2\pi R}{\upsilon}$. З цих рівнянь $T_c = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$ =6,5·10^3 с = 1,8 год.



Мінімальний синодичний період буде досягнуто у випадку, коли супутник рухатиметься за годинниковою стрілкою (у протилежному напрямку до напряму руху Місяця навколо Землі).

Позначимо цей час *S*. За цей час Місяць зміститься на кут $\varphi = \omega_м S$, де $\omega_м$ – кутова швидкість Місяця: $\omega_м = \frac{2\pi}{T_м}$. $T_м$=27,32 доби = 655,68 год. При цьому супутник опише дугу 2π – φ. $2\pi - \varphi = \omega_c S$, де $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$. Тоді $2\pi - \frac{2\pi}{T_м}S = \frac{2\pi}{T_c}S$. $\frac{1}{S} - \frac{1}{T_м} = \frac{1}{T_c}$. Звідси $S = \frac{T_м T_c}{T_м + T_c}$=1,795 год.

59. Супутник, що рухається по коловій екваторіальній орбіті у напрямку обертання Землі, проходить над локатором, що розташований на поверхні 4 рази на добу. Над локатором проходить також супутник, що рухається по коловій полярній орбіті такого ж радіусу, що і орбіта першого супутника. Як часто він проходить над локатором? Форму Землі вважати сферичною. Дією на супутники всіх інших тіл, окрім Землі, нехтувати. (2014 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Період обертання Землі (зоряна доба) $T_З$=1 доба, то синодичний період обертання супутника $S = \frac{1}{4}$ року. Із співвідношення $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_З} \pm \frac{1}{S}$ знаходимо період обертання супутника. Оскільки супутник рухається швидше, ніж Земля, то в формулі беремо знак «+». $T = \frac{S \cdot T_З}{S + T_З} = \frac{1}{5}$ доби. Радіуси супутників однакові, отже період обертання полярного супутника буде таким же. ($T = \dfrac{2\pi(R+H)}{\upsilon}$, $\upsilon = \sqrt{G\dfrac{M}{R+H}}$. Отже, як бачимо період обертання залежить лише від радіуса руху супутника). Це значить, що супутник за добу робить 5 обертів.

Полярний супутник може пройти над локатором тільки тоді, коли він перетинає площину екватора. Причому це може бути лише в два моменти зоряної доби, коли сам локатор проходить через площину полярної орбіти супутника.

Відомо, що в деякий момент часу полярний супутник проходив над локатором. Через половину зоряної доби локатор знову буде в площині полярного супутника, який за цей час зробить $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$ оберти і якраз буде над локатором в протилежній до початкової точці. Ще через 2,5 доби супутник знову пройде над початковою точкою, отже він буде проходити над локатором два рази в зоряну добу.

60. Два штучні супутники Землі при спостереженні з певної точки екватора нашої планети завжди одночасно проходять через зеніт. Орбіти супутників кругові, розташовані в екваторіальній площині. Супутники рухаються по них навколо Землі в одному напрямку, при цьому радіуси орбіт відрізняються рівно вдвічі. Знайти періоди обертання супутників. (2020 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Порівняємо періоди обертань супутників, знаючи, що радіуси відрізняються вдвічі. За ІІІ законом Кеплера. $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\dfrac{R_2^3}{R_1^3}} = \sqrt{8}$. $T_2 = \sqrt{8}T_1$.

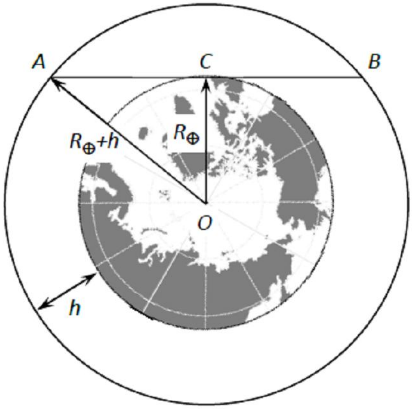
Якщо проходження через зеніт супутників відбувається одночасно, то це означає, що або періоди їх обертання однакові, що неможливо згідно умови задачі (різні радіуси орбіт супутників), або що їх синодичні періоди однакові, причому один з них рухається швидше за Землю, а інший повільніше. Отже для швидшого супутника $\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{S}$, для повільнішого $\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T_2} = \dfrac{1}{S}$, де T_0 = 24 год – період обертання Землі. Звідси $\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T_2}$.

$$\frac{T_0 - T_1}{T_1 T_0} = \frac{T_2 - T_0}{T_0 T_2}; \qquad 2T_2T_1 = T_0(T_2 + T_1); \qquad 2\cdot\sqrt{8}T_1^2 = T_0(\sqrt{8}T_1 + T_1);$$

$$T_1 = \frac{T_0(\sqrt{8}+1)}{2\sqrt{8}} \approx 16{,}2 \text{ год}. \text{ Тоді } T_2 = \sqrt{8}T_1 = 45{,}82 \text{ год}.$$

61. Супутник рухається по круговій орбіті в площині земного екватора в напрямку обертання Землі на висоті 400 км над поверхнею. Скільки часу його можуть спостерігати жителі м. Кіто (столиця Еквадору, лежить практично на екваторі) при кожному прольоті від горизонту до горизонту? (Супутник видимий і в темну, і в світлу пору доби). (2019 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок. Визначимо період обертання супутника навколо Землі. $T = \dfrac{2\pi r}{\upsilon}$; $\dfrac{m\upsilon^2}{r} = G\dfrac{Mm}{r^2}$. Тоді $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 r^3}{GM}}$ (1). Радіус орбіти складе $r = R_З + h$ =6780 км. Тоді період обертання T ≈ 5550 с ≈ 1,54 год. Однак не слід забувати, що сам спостерігач також обертається разом із Землею з періодом 24 години (або, якщо бути точним, 23 години 56 хвилин), отже, спостерігача і супутника можна розглядати як два тіла, що обертаються навколо одного і того ж центру. Тоді синодичний період обертання супутника по відношенню до спостерігача із Землі можна визначити з формули $\dfrac{1}{S} = \dfrac{1}{T_c} - \dfrac{1}{T_З}$ (2).



(Або згідно законів обертального руху відносна кутова швидкість супутника і спостерігача на Землі $\omega = \omega_c - \omega_З = \dfrac{\Delta\varphi}{S}$ (3). Кутові швидкості супутника і Землі відповідно $\omega_c = \dfrac{2\pi}{T_c}$; $\omega_З = \dfrac{2\pi}{T_З}$

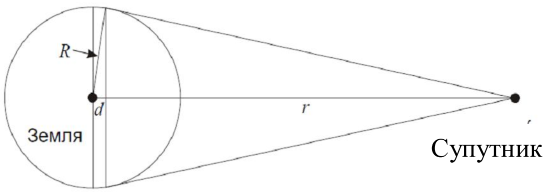
Супутник випередить Землю на один оберт, отже $\Delta\varphi = 360^0 = 2\pi$. Після підстановки в (3), отримаємо ту ж формулу (2).) З неї $S = \dfrac{T_C \cdot T_З}{T_C - T_З} \approx 5930$ с.

Отже, наприклад, кожні 5930 секунд супутник буде проходити через зеніт для спостерігача на екваторі Землі. Обчислимо, яку частину цього часу супутник буде перебувати над горизонтом спостерігача.

Розглянемо малюнок, на якому зображений вид Землі, де О – полюс. Якщо спостерігач знаходиться в точці С, то площина його горизонту – це відрізок АВ. Отже, спостерігач може бачити супутник тільки тоді, коли він знаходиться на дузі АВ. Знайдемо довжину цієї дуги в градусах. Очевидно, що $\cos\angle AOC = \frac{R_з}{R_З + h}$; $\angle AOB = 2\arccos\frac{R_З}{R_З + h} \approx 39{,}55^0$. Тоді можна скласти пропорцію: повний оберт в 360^0 супутник проходить по відношенню до точки С за 5930 секунд, а, отже, $39{,}55^0$ – за 651 секунду, тобто майже за 11 хвилин. Саме стільки часу супутник можна буде спостерігати над горизонтом на екваторі.

62. По одній орбіті з ексцентриситетом e і великою піввіссю a навколо Землі літають два супутники і спостерігають земну поверхню. У момент, коли один з них знаходиться в перигеї, інший перебуває в апогеї. Визначити, яку частину земної поверхні вони спостерігають в цей момент. Вважати, що навіть в перигеї відстань до супутника від центру Землі істотно більша радіуса Землі. Атмосферною рефракцією знехтувати. (2017 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок. Визначимо спочатку, яку частину поверхні Землі можна побачити з супутника, що знаходиться на відстані r від її центру, що істотно перевищує радіус Землі.



Ми бачимо, що з супутника буде видно менше половини поверхні Землі. Крім задньої півсфери, в область невидимості потрапить вузька смуга навколо лімба, яку ми можемо вважати циліндричною з радіусом, рівним радіусу Землі R і шириною d. З подібності прямокутних трикутників ми можемо записати:

$\frac{d}{R} = \frac{R}{r}$. Доля площі поверхні Землі, яку видно з супутника

$$S' = \frac{2\pi R^2 - 2\pi Rd}{4\pi R^2} = \frac{R-d}{2R} = \frac{1-\frac{d}{R}}{2} = \frac{1-\frac{R}{r}}{2}.$$

В умові задачі Земля спостерігається з двох супутників, що знаходяться в перигеї і апогеї спільної орбіти з великою піввіссю a і ексцентриситетом e. Області Землі, видимі з цих супутників, не перекриваються, і загальна частина поверхні Землі, видимої з супутників, дорівнює сумі частин, видимих з кожного з них. Таким чином: $S_1 = \frac{1-\frac{R}{r_{\min}}}{2}$; $S_2 = \frac{1-\frac{R}{r_{\max}}}{2}$. $r_{\min} = a - ea = a(1-e)$; $r_{\max} = a + ea = a(1+e)$. Тоді $S = \frac{1-\frac{R}{a(1-e)}}{2} + \frac{1-\frac{R}{a(1+e)}}{2} = 1 - \frac{R}{a(1-e^2)}$.