54. Яку масу має куб, площа поверхні якого 150 см^2, якщо густина речовини, з якої він виготовлений, становить 2,7 г/см^3? (2002 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Площа однієї грані 25 см^2, довжина ребра 5 см. Об'єм куба 125 см^3. Маса куба $m=\rho\cdot V$. m=337,5 г.

55. У скільки разів відрізняються маси суцільного кубика з довжиною ребра 6 см та порожнистого кубика таких самих розмірів, який виготовлений з того ж матеріалу? Товщина стінок порожнистого кубика 1 см. (2009 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Маса суцільного кубика $m=\rho\cdot V$, де $V=a^3$ – об'єм кубика. Маса порожнистого кубика $m=\rho\cdot V_1$, де V_1 – об'єм стінок. $V_1=V-V_2$, де V_2 – об'єм порожнини. $V_2=b^3$, де b = 6 см – 2 см = 4 см. Тоді $\frac{m}{m_1}=\frac{V}{V_1}=\frac{a^3}{a^3-b^3}$.

$$\frac{m}{m_1}=\frac{6^3}{6^3-4^3}=\frac{27}{19}.$$

56. У шматок льоду вмерзла мідна кулька. Який її об'єм, якщо об'єм льоду і кульки V=100 см^3, а маса m=170 г? $\rho_м$=8,9 г/см^3, $\rho_л$=0,9 г/см^3 (2011 р. ІІІ е. 8 к.)

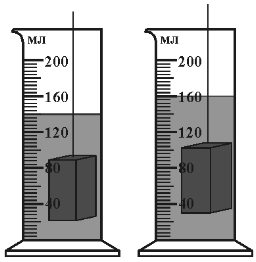
Розв'язок

Нехай об'єм кульки – V_1. Тоді об'єм льоду (V–V_1). Маса кульки: $m_к=\rho_м\cdot V_1$. Маса льоду: $m_л=\rho_л\cdot(V-V_1)$. Загальна маса: $m=m_к+m_л$;

Після підстановки $170=8{,}9\cdot V+0{,}9\cdot(100-V)$; $80=8\cdot V$; $V=\frac{80}{8}=10$ см^3.

57. У дві мензурки, в які було налито однакову кількість води, опускають два бруски однакової маси, виготовлені з свинцю та олова. Визначити початковий об'єм води в мензурках. Густина свинцю ρ_1=11,3 г/см^3; олова
ρ_2= 7,3 г/см^3. (2010 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок



Враховуючи, що $\rho_2<\rho_1$, а маси брусків однакові, робимо висновок, що об'єм олов'яної деталі більший. В умові задачі сказано, що в мензурки було налито однакову кількість води, а з малюнка видно, що після опускання деталей у другій мензурці рівень води більший на 20 см^3, отже об'єм олов'яної деталі більший за об'єм свинцевої на ΔV=20 см^3. $V_2=V_1+\Delta V$.

З формули густини $\rho=\frac{m}{V}$ маси деталей: $m_1=\rho_1\cdot V_1$; $m_2=\rho_2\cdot V_2$. Враховуючи рівність мас можна записати: $\rho_1\cdot V_1=\rho_2\cdot(V_1+\Delta V)$. Розв'яжемо це рівняння: $V_1=\frac{\rho_2\cdot\Delta V}{\rho_1-\rho_2}$. Після підстановки значень отримаємо:

$V_1=\dfrac{7{,}3\frac{г}{см^3}\cdot 20\ см^3}{11{,}3\frac{г}{см^3}-7{,}3\frac{г}{см^3}}=36{,}5\ см^3$. Згідно малюнка вода і свинцевий циліндр займають об'єм V_3=140 см^3. Тоді початковий об'єм води у мензурках $V=V_3-V_1=103{,}5\ см^3$.

58. Сухий махровий рушник, що має розміри 50 см на 80 см має масу m=250 г. Повністю мокрий рушник, з якого починає капати вода, має масу M=950 г. Петрик П'яточкін безтурботно відпочивав на пляжі, як раптом пішов дощ, в результаті якого рівень води в розташованому поряд басейні збільшився на 2,5 мм. Рятуючись від дощу, Петрик розтягнув рушник над головою. Чи промок Петрик в цей день? Густина води ρ=1 г/см^3. (2013 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Визначимо максимальну масу води Δm, яку може ввібрати рушник: $\Delta m=M-m$; $\Delta m=950-250=700$ г.

Дана маса води має об'єм V: $V=\frac{\Delta m}{\rho}$; $V=\dfrac{700\cdot10^{-3}\ кг}{10^3\ \frac{кг}{м^3}}=7\cdot10^{-4}\ м^3$.

Якщо цей об'єм рівномірно розподілиться по площі рушника S, то висота шару води $h=\frac{V}{S}$.

$$h=\frac{7\cdot10^{-4}}{4\cdot10^{-1}}=1{,}75\ мм.$$

Під час дощу випало 2,5 мм опадів. Отже, рушник промокне повністю і не зможе захистити Петрика від дощу.

59. У посудину, заповнену водою, кидають шматок алюмінієвого сплаву. Після того, як частина води вилилася з посудини, маса посудини із рештою води і шматком сплаву збільшилася на 25 г. Коли замість води використали рідке мастило з густиною 0,9 г/см^3 і повторили вимірювання, то маса посудини з мастилом і шматком сплаву збільшився на 26 г. Визначити густину сплаву. Густина води 1 г/см^3. (2001 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Різниця між масою шматка алюмінієвого сплаву і частиною води, що вилилася, згідно умови 25 г. Аналогічно різниця між масою сплаву і мастилом, що вилилось 26 г. Об'єми шматка сплаву, води і мастила, що вилились однакові. Тому, $m_c - \rho_в V_c = 25$; $m_c - \rho_м V_c = 26$, де m_c–маса шматка сплаву, $\rho_в$, $\rho_м$ – густини води і мастила, V_c – об'єм шматка сплаву.

$V_c(\rho_c - \rho_в) = 25$; $V_c(\rho_c - \rho_м) = 26$. Поділимо рівняння:

$\dfrac{\rho_c - \rho_в}{\rho_c - \rho_м} = \dfrac{25}{26}$; $26\rho_c - 26\rho_в = 25\rho_c - 25\rho_м$; $\rho_c = 26\rho_в - 25\rho_м = 3{,}5\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

60. Сплав складається з свинцю масою 1,13 кг і олова масою 2,92 кг. Яка густина сплаву, якщо вважати, що об'єм сплаву рівний сумі об'ємів його складових частин? Густина свинцю ρ_1=11300 кг/м^3, олова ρ_2= 7300 кг/м^3. (2002 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$. Оскільки $V_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1}$, $V_2 = \dfrac{m_2}{\rho_2}$, то $\rho = \dfrac{(m_1 + m_2)\rho_1\rho_2}{m_1\rho_2 + m_2\rho_1}$=8100$\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

61. Монета викарбувана із сплаву, який містить за масою 90% золота і 10% срібла. Визначте густину монети. Вважати, що об'єм монети дорівнює сумі об'ємів його складових частин. $\rho_з$=19,3 г/см^3 , ρ_c= 10,5 г/см^3. (2005 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Густина монети $\rho = \dfrac{m}{V}$, де m – маса монети, V – об'єм. $V = V_з + V_c$.

$V_з = \dfrac{0{,}9m}{\rho_з}$; $V_c = \dfrac{0{,}1m}{\rho_c}$. Отже, $\rho = \dfrac{m}{\dfrac{0{,}9m}{\rho_3} + \dfrac{0{,}1m}{\rho_c}} = \dfrac{\rho_c\rho_3}{0{,}9\rho_c + 0{,}1\rho_3}$. Після підстановки ρ≈17,8 г/см^3.

62. На археологічних знахідках двох зливків коштовного металу було викарбувано: 40% – Au, 60% – Ag. Чи правильно відображає напис вміст цих компонентів у зливку, якщо після вимірювання їх мас та об'ємів дістали такі дані: m_1=4,6 кг; V_1=357 см^3, m_2=3,2 кг, V_2=228 см^3? Густина золота $\rho_з$=19,3г/см^3 , срібла ρ_c= 10,5 г/см^3. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Згідно даних задачі густина першого зливку ρ_1≈12,9 г/см^3 , другого – ρ_2≈14,0 г/см^3. Якщо під двома частинами золота і трьома частинами срібла мали на увазі частини мас, то $\rho_{зл1} = \dfrac{m_{зл1}}{V_{зл1}} = \dfrac{m_{зл1}}{V_з + V_c}$ (1), де $V_з = \dfrac{0{,}4m_{зл1}}{\rho_з}$ (2), $V_c = \dfrac{0{,}6m_{зл1}}{\rho_c}$ (3). Після підстановки (2) і (3) в (1) отримаємо: $\rho_{зл1} = \dfrac{5\rho_3\rho_c}{3\rho_3 + 2\rho_c} \approx 12{,}8\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$, що практично співпадає з густиною першого зливку. Якщо ж під двома частинами золота і трьома частинами срібла мали на увазі частини об'ємів, густина $\rho_{зл2} = \dfrac{2\rho_3 + 3\rho_c}{5} \approx 14{,}0\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$ і це співпадає з густиною другого зливку. Отже, з фізичної точки зору обидва написи можуть бути вірними.

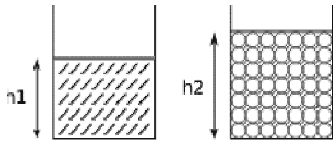
63. Для приготування гречаної каші домогосподарка залила 650 г гречки водою об'ємом 1,5 л. Скільки води википіло під час приготування каші, якщо вважати, що вода або википає, або поглинається гречкою і йде на збільшення об'єму зерна? Густина сухої зернини гречки 1,3 г/см^3, вареної 1,1 г/см^3, густина води 1 г/см^3. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Об'єм вареної крупи дорівнює сумі об'ємів V_1 сухої крупи і V_2 води, що поглинулася: $V = V_1 + V_2$. З іншого боку об'єм V дорівнює відношенню маси вареної крупи, що складається з маси m_1 сухих зерен і маси m_x води, що поглинулася, до густини ρ_2 вареної крупи: $V = \dfrac{m_1 + m_x}{\rho_2}$. Об'єм V_1 сухої крупи густиною ρ_1: $V_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1}$. Об'єм води, що поглинулася $V_2 = \dfrac{m_x}{\rho_0}$. Тоді

$\dfrac{m_1+m_x}{\rho_2}=\dfrac{m_1}{\rho_1}+\dfrac{m_x}{\rho_0}$. Звідси маса води, що поглинулася крупою $m_x=\dfrac{m_1\rho_0(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_0-\rho_2)}=1{,}3$ кг . Маса води, що википіла: 1,5 кг – m_x = 0,2 кг.

64. Висота рівня води в циліндричній посудині становить h_1 = 1 м. В посудину акуратно засипали маленькі металеві кульки. Виявилось, що вода точно покриває кульки. При цьому густина «суміші», яка утворилася ρ=4070 кг/м^3. Знайти висоту рівня води в посудині з кульками h_2. Густина води ρ_1=1000 кг/м^3, густина речовини кульок ρ_2=7140 кг/м^3. (2012 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Об'єм «суміші» визначимо як $V_c=\dfrac{m_c}{\rho}$; $m_c=m_в+m_к$, де $m_с$ – маса суміші, $m_в$ – маса води, $m_к$ – маса кульок. $m_в=\rho_1\cdot V_в$; $m_к=\rho_2\cdot V_к$. Після підстановки отримаємо: $V_c=\dfrac{\rho_1V_в+\rho_2V_к}{\rho}$ (1). $V_в=S\cdot h_1$; $V_c=S\cdot h_2$, де S – площа основи циліндричної посудини. $V_к=V_c-V_в$; $V_к=Sh_2-Sh_1=S(h_2-h_1)$. Підставивши у (1), отримаємо: $S\cdot h_2=\dfrac{\rho_1\cdot S\cdot h_1+\rho_к\cdot S(h_2-h_1)}{\rho}$. Проведемо математичні перетворення і визначимо h_2: $\rho\cdot h_2=\rho_1\cdot h_1+\rho_2\cdot h_2-\rho_2\cdot h_1$; $h_2=\dfrac{(\rho_1-\rho_2)\cdot h_1}{\rho-\rho_2}=2$ м .

Сила пружності. Закон Гука

65. Під дією сили F_1=2 Н довжина пружини x_1=9 см, а під дією сили F_2=5 Н – x_2=12 см. Яка довжина пружини у нерозтягнутому стані? (2013 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

$F_1=k(x_1-x_0)$, $F_2=k(x_2-x_0)$, де x_0 – довжина пружини у нерозтягнутому стані . $\dfrac{F_1}{x_1-x_0}=\dfrac{F_2}{x_2-x_0}$, $2\cdot(12-x_0)=5\cdot(9-x_0)$, $x_0=7$ см .

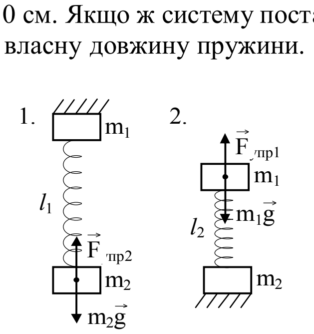
66. У нерозтягнутому стані пружина мала довжину 80 мм. Після того, як до неї підвісили сталевий та алюмінієвий тягарці однакового об'єму, пружина видовжилась на 10 мм, а коли зняли алюмінієвий, то її довжина зменшилася до 88 мм. Визначити, чи суцільний алюмінієвий тягарець, чи має порожнину. Густина сталі ρ_1=7800 кг/м^3, алюмінію ρ_2=2700 кг/м^3. (2001 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Пружина під дією сталевого тягарця розтягнулась у 4 рази більше, ніж під дією алюмінієвого, тому маса сталевого тягарця у 4 рази більша за масу алюмінієвого. Оскільки, за однакових об'ємів $\dfrac{m_c}{m_a}=\dfrac{\rho_c}{\rho_a}=\dfrac{7800}{2700}=2{,}9$, то можна зробити висновок, що алюмінієвий тягарець має порожнину.

67. Вертикально розташована пружина з'єднує два вантажі у формі куба. Маса верхнього вантажу 2 кг, нижнього 3 кг. Коли система підвішена за верхній вантаж, довжина пружини 10 см. Якщо ж систему поставити вертикально нижнім вантажем на підставку, довжина пружини 4 см. Визначте власну довжину пружини. (2012 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок



1 випадок: $F_{пр_2}=m_2g$; $F_{пр_2}=k(l_1-l_0)$; $k(l_1-l_0)=m_2g$.

2 випадок: $F_{пр_1}=m_1g$; $F_{пр_1}=k(l_0-l_2)$; $k(l_0-l_2)=m_1g$.

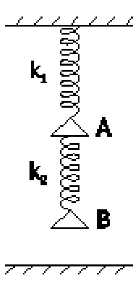
$$\begin{matrix} m_2g=k(l_1-l_0) \\ m_1g=k(l_0-l_2) \end{matrix} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1}=\frac{l_1-l_0}{l_0-l_2}.$$

$l_0=\dfrac{m_1l_1+m_2l_2}{m_2+m_1}$; $l_0=6{,}4\cdot10^{-2}$ м = 6,4 см.

68. До стелі прикріплена конструкція, що складається з двох пружин і двох маленьких невагомих чашок А і В. Відстань від підлоги до стелі 1 м. Жорсткості пружин k_1=15 Н/м і k_2=30 Н/м. Довжини нерозтягнутих пружин однакові і становлять 30 см.

а) Вантаж якої маси треба покласти в чашку А, щоб чашка В дістала до підлоги?

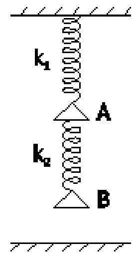
б) Вантаж якої маси треба покласти в чашку В, щоб вона дістала до підлоги (чашка А при цьому порожня)? (2009 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

а) Щоб дістатися до підлоги, чашка В повинна опуститися на $\Delta l = 1\text{ м} - (0{,}3\text{ м} + 0{,}3\text{ м}) = 0{,}4\text{ м}$. Якщо покласти вантаж в чашку А, то пружина № 2 при цьому не видовжується, а видовження пружини № 1 якраз повинно становити 0,4 м. Знайдемо масу вантажу в чашці А, щоб відбулося саме таке видовження пружини. Пружина видовжиться під дією сили тяжіння, яка діє на вантаж m_1: $m_1 g = k_1 \Delta l$. Звідси знаходимо, що m_1=0,6 кг.

б) Тепер подивимося, що буде, якщо положити вантаж в нижню чашку. В такому випадку розтягуються вже дві пружини: $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Підрахуємо видовження кожної із них окремо: $\Delta l_1 = \frac{m_2 g}{k_1}$ (все аналогічно першому випадку); $\Delta l_2 = \frac{m_2 g}{k_2}$. Щоб дістатися до підлоги, чашка В повинна опуститися на Δl=0,4 м, як і в попередньому випадку. Звідси отримуємо рівняння: $\frac{m_2 g}{k_1} + \frac{m_2 g}{k_2} = \Delta l$. Розв'язуючи його з урахуванням числових даних, знайдемо, що m_2=0,4 кг.

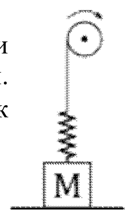


69. До стелі прикріплена конструкція, що складається з двох пружин і двох вантажів А і В. Маса вантажа В невідома, маса вантажа А: m_1=2 кг. Жорсткості пружин k_1=100 Н/м і k_2= 400 Н/м. На скільки зміниться загальне видовження пружин, якщо, не змінюючи вантажів, пружини поміняти місцями? Масою пружин знехтувати. (2014 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Перша ситуація: $k_1 x_1 = (m_1 + m_2)g$; $k_2 x_2 = m_2 g$. Загальне видовження $x_1 + x_2 = \left(\frac{m_1 + m_2}{k_1} + \frac{m_2}{k_2}\right)g$.

Друга ситуація після зміни пружин: $k_1 x_1' = m_2 g$; $k_2 x_2' = (m_1 + m_2)g$. Загальне видовження $x_1' + x_2' = \left(\frac{m_1 + m_2}{k_2} + \frac{m_2}{k_1}\right)g$. Знаходимо зміну видовження. $\Delta x = \left(\frac{m_1 + m_2}{k_1} + \frac{m_2}{k_2}\right) - \left(\frac{m_1 + m_2}{k_2} + \frac{m_2}{k_1}\right)g = \left(\frac{m_1}{k_1} - \frac{m_1}{k_2}\right)g$ = 0,15 м. Видовження пружин зменшиться.



70. До розміщеного на столі вантажу масою M=100 г прикріплена пружина. Інший кінець пружини прикріплений до довгої мотузки, намотаної на вал радіусом 5 см. Жорсткість пружини k=10 Н/м. Спочатку пружина не розтягнута. Вал починає обертатися з періодом 10π с. Побудуйте графік залежності сили тиску вантажу на підлогу від часу. (2011 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Сили, що діють на тіло: $M\vec{g}$ – сила тяжіння, $\vec{F}_{пр}$ – сила пружності, $\vec{N}$ –сила реакції опори, яка чисельно рівна силі тиску вантажу на опору $\vec{F}_T$.

$F_T = N$ (1). Виходячи з умови: $Mg = N + F_{пр}$ (2). З рівностей (1) та (2) отримаємо: $F_T = Mg - F_{пр}$ (3). Згідно закону Гука $|F_{пр}| = kx$ маємо:

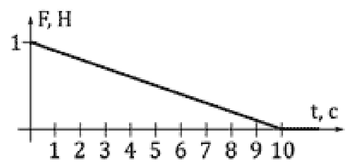
$F_T = Mg - kx$ (4), де $x = \upsilon t$ – видовження пружини.

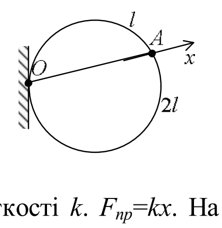
$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 0{,}05\text{ м}}{10\pi\text{ с}} = 0{,}01\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Звідси, підставивши дані в (4), отримаємо:

$F_T = -0{,}1t + 1$ (Н).

Отже, графік матиме вигляд:



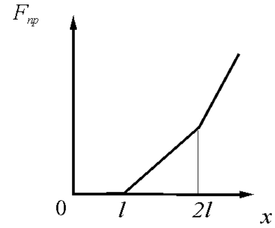


71. Точку O тоненького гумового кільця довжиною $3l$ закріпили, а точку A, яка поділяє кільце на дві частини (l і $2l$), переміщують уздовж осі Ox. Побудуйте схематичний графік залежності сили F, яку прикладають до точки A, від координати x точки A. Поясніть графік. (2015 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Якщо $OA \le l$, то гумка не розтягнута: $F_{пр}$= 0. Якщо $l \le OA \le 2l$, то розтягнута тільки коротка частина гумки, яка має деякий коефіцієнт жорсткості k. $F_{пр}=kx$. На графіку $F_{пр}$ лінійно зростає. Якщо

$OA \geq 2l$, то розтягуються обидві частини гумки (паралельно), їх сумарний коефіцієнт жорсткості k_1 більший за k . На графіку $F_{пр}$ буде також лінійно зростати, але кут нахилу зміниться.



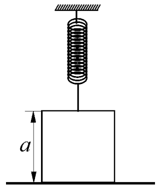
Тиск твердих тіл, рідин і газів

72. Оцінити масу земної атмосфери. Радіус Землі 6400 км. (2005 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Площа земної поверхні $S=4\pi R^2 \approx 5{,}14\cdot10^{14}$ м^2. Вважаючи нормальний атмосферний тиск $p=10^5$ Па, сила тиску на земну поверхню з боку атмосфери $F=pS=5{,}14\cdot10^{19}$ Н. Тоді маса атмосфери $m=\dfrac{F}{g}=5{,}14\cdot10^{18}$ кг .

73. Вантаж у формі куба із стороною a=0,2 м і масою m=20 кг прикріплений пружиною жорсткістю k=1,4 кН/м до стелі, як показано на малюнку. Спочатку пружина не деформована. Через різке охолодження куб швидко стиснувся так, що усі його сторони зменшилися на Δa=4 см. Визначити тиск куба на підлогу до і після охолодження. (2016 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

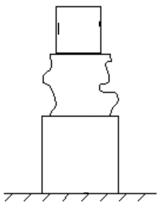
Початковий тиск куба на підлогу був $p=\dfrac{mg}{a^2}=5000$ Па.

Так як потім висота куба зменшилася, то пружина розтягнулася і почала діяти на вантаж з силою, яка спрямована вгору і дорівнює $F=k\Delta a$. F=56 Н.

Крім того, змінилася і площа контакту куба з підлогою.

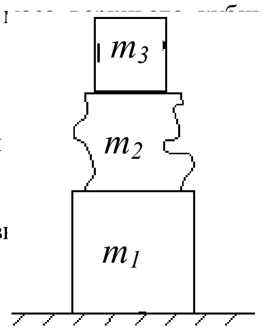
В результаті, тиск $p_1=\dfrac{(mg-F)}{(a-\Delta a)^2}=\dfrac{200\text{ Н}-56\text{ Н}}{(0{,}16\text{ м})^2}=5625$ Па.

74. На столі розміщено кубик масою m_1=90 г, ребро якого a_1=5 см. На нього кладуть тіло неправильної форми так, що площа контакту з кубиком S_2=16 см^2. Зверху на тіло кладуть ще один кубик, ребро якого a_3=3 см так, що він повністю дотикається до тіла. Відомо, що всі тиски у місцях дотику тіл і дотику нижнього кубика зі столом рівні. Визначити масу тіла неправильної форми і масу верхнього кубика. (2013 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Запишемо умову рівності тисків для кожної із трьох площин, починаючи з верхньої: $\dfrac{m_3 g}{a_3^2}=\dfrac{(m_2+m_3)g}{S_2}=\dfrac{(m_1+m_2+m_3)g}{a_1^2}$, де m_2 – маса тіла неправильної форми, m_3 – ... а.



Виразимо m_3 через m_2: $m_3=\dfrac{m_2\cdot a_3^2}{S_2-a_3^2}$. Тоді: $\dfrac{m_2+\dfrac{m_2\cdot a_3^2}{S_2-a_3^2}}{S_2}=\dfrac{m_1+m_2+\dfrac{m_2\cdot a_3^2}{S_2-a_3^2}}{a_1^2}$. Для ... в підставимо замість S_2 і a_3 значення: $\dfrac{a_3^2}{S_2-a_3^2}=\dfrac{9\cdot10^{-4}}{16\cdot10^{-4}-9\cdot10^{-4}}=\dfrac{9}{7}$. Тоді рів... д:

$\dfrac{m_2+\dfrac{9}{7}\cdot m_2}{S_2}=\dfrac{m_1+m_2+\dfrac{9}{7}\cdot m_2}{a_1^2}$, $m_2=\dfrac{7m_1\cdot S_2}{16\left(a_1^2-S_2\right)}=7\cdot10^{-2}$ кг або m_2=70 г.

Звідси $m_3=\dfrac{m_2\cdot a_3^2}{S_2-a_3^2}=9\cdot10^{-2}$ кг або m_3= 90 г.

75. На столі лежить куб з пластиліну. Коли зверху на нього поклали мідний куб, ребро якого в 3 рази більше за ребро пластилінового, пластилін розплющився і площа його контакту зі столом збільшилася вдвічі. При цьому тиск на стіл став 14502 Па. Який тиск чинив спочатку на стіл пластиліновий куб і якою була його початкова висота? $\rho_{пл}$=1400 кг/м^3, $\rho_м$=8900 кг/м^3. (2008 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Розглянемо випадок, коли на столі лежить лише пластиліновий куб. Нехай його маса m, довжина ребра a. Тоді тиск $p_1=\dfrac{mg}{S}=\dfrac{\rho_{пл}a^3 g}{a^2}$. Звідси $a=\dfrac{p_1}{\rho_{пл}\cdot g}$. Тепер на пластиліновий куб поклали мідний. Маса пластилінового куба не змінилась, а маса мідного $m_м = 27a^3 \cdot \rho_м \cdot g$. Отже тиск на стіл $p_2 = \dfrac{27a^3\rho_м g + \rho_{пл}a^3 g}{2a^2}$.

$p_2 = \dfrac{ga}{2}(27\rho_м + \rho_{пл}) = \dfrac{p_1}{2\rho_{пл}}(27\rho_м + \rho_{пл})$. Звідси $p_1 = \dfrac{2\rho_{пл}}{27\rho_м + \rho_{пл}} \cdot p_2$. p_1=168 Па. a=1,2 см.

76. З якою силою тисне на дно посудини алюмінієвий куб з ребром 0,5 м, якщо рівень води у посудині 2 м? Дно посудини і грані куба ідеально гладенькі. Густина води 1000 кг/м^3, густина алюмінію 2700 кг/м^3. (2005 р. з. 8 к.)

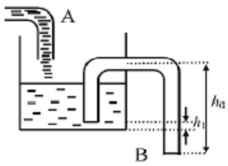
Розв'язок

Оскільки дно посудини і грані куба ідеально гладенькі, то архімедова сила на куб не діє. Сила тиску, з якою діє на дно посудини куб: $F = mg + \rho_в gh \cdot a^2$, де a – довжина ребра куба, h – висота стовпчика води над верхньою гранью

куба, m – маса куба. $m = \rho_a V = \rho_a a^3$. Отже,

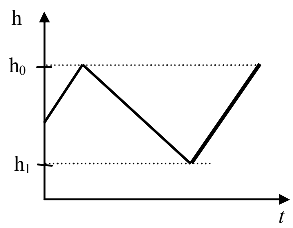
$F = \rho_a a^3 \cdot g + \rho_в gh \cdot a^2 = a^2 g(\rho_a a + \rho_в h) \approx 8375$ Н.

77. Побудувати графік зміни з часом рівня води в зображеній на малюнку відкритій посудині, якщо швидкість витікання води з підвідної трубки A менша від швидкості витікання з сифонної трубки B. (2001 р. II е. 8 к.)



Розв'язок

Коли вода підніметься до висоти h_0, з сифона почне витікати вода назовні. Швидкість зниження її рівня залежить від швидкості витікання води назовні, яка дорівнює різниці швидкостей витікання з сифонної трубки і підвідної. Згодом рівень води впаде до висоти h_1 і витікання припиниться. Вода знову набиратиметься до висоти h_0.



78. До якої висоти необхідно налити молоко в дійницю циліндричної форми, щоб сила тиску молока на бокові стінки дорівнювала силі тиску на дно? Діаметр дна дійниці 20 см. (2002 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Сила тиску молока на бокові стінки $F_1 = p_c \cdot S$, де p_c – середнє значення тиску. Оскільки $p_c = \rho g \dfrac{h}{2}$, а площа бічної поверхні $S = 2\pi r \cdot h$, то $F_1 = \rho g \dfrac{h}{2} \cdot 2\pi r h = \rho g \pi r h^2$. Сила тиску на дно дорівнює вазі молока: $F_2 = mg = \rho V g = \rho \cdot \pi r^2 h \cdot g$. З рівності двох сил отримуємо: $h = r$.

79. У циліндричну посудину налита ртуть, а зверху масло. Маса масла в 2 рази менша за масу ртуті, а загальна висота шарів 30 см. Визначте тиск рідин на дно посудини. Густина масла 900 кг/м^3, ртуті 13600 кг/м^3. (2007 р. з. 8 к.)

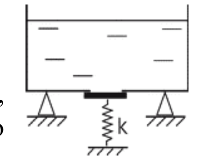
Розв'язок

Тиск на дно посудини складається з тисків, які чинять масло і ртуть:

$p = p_{рт} + p_м = \rho_{рт} g h_{рт} + \rho_м g h_м$ (1). За умовою задачі $m_{рт}$=2$m_м$, тоді: $\rho_{рт}h_{рт} = 2\rho_м h_м \Rightarrow h_{рт} = \dfrac{2\rho_м h_м}{\rho_{рт}}$.

Оскільки $h_{рт} = h - h_м = \dfrac{2\rho_м h_м}{\rho_{рт}}$, то $h_м = \dfrac{\rho_{рт} h}{\rho_{рт} + 2\rho_м}$. Підставивши значення $h_{рт}$ та $h_м$ у формулу (1), матимемо:

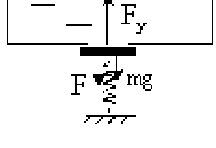
$p = \dfrac{3\rho_{рт} g \rho_м h}{\rho_{рт} + 2\rho_м} = 7 \cdot 10^3$ Па.



80. В дні високої посудини є пружинний клапан площею S і масою m. Жорсткість пружини k, пружина стиснута на ΔL. До якої висоти від дна посудини можна наливати рідину з густиною ρ, щоб вона не витікала через клапан? (2007 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Клапан відкриється, якщо $F + mg \geq F_У$, де $F_У$ – сила пружного стискання пружини: $F_У = k\Delta L$, $F = pS = \rho g h S$. $\rho g h S + mg \geq k\Delta L$. Звідси $h \geq \dfrac{k\Delta L - mg}{\rho g S}$.



81. У циліндричну посудину, закриту з одного боку, яка лежить на горизонтальній поверхні, починають повільно вводити з відкритого боку легкий гладенький поршень.

Знайти тиск повітря в посудині в той момент, коли вона зрушить з місця. Маса посудини 200 г. Сила тертя, яка діє на посудину, становить 30 % сили тяжіння, атмосферний тиск 10^5 Па, площа поршня 5 см^2. (2002 р. з. 9 к.)

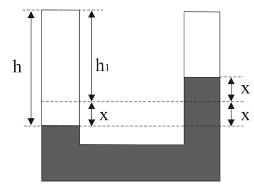
Розв'язок

Посудина зрушить з місця, якщо різниця сил тиску повітря в посудині з обох сторін поршня зрівняється з силою тертя: $p \cdot S - p_{атм.}S = F_{тер}$. Оскільки

$F_{тер.} = 0{,}3 \cdot F_{тяж.} = 0{,}3 \cdot mg$, то $p = p_{атм.} + \dfrac{0{,}3mg}{S} \approx 1{,}012 \cdot 10^5$ Па.

82. Вода на h_1=9 см не доходить до верхнього краю U-подібної трубки постійного перерізу. В ліве коліно трубки потроху наливають гас. При якій висоті стовпа гасу рідина почне витікати з трубки? Густина гасу $\rho_г$=800 кг/м^3, густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2007 р. III е. 8 к.)

Розв'язок



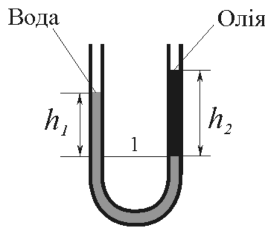
Густина гасу менша за густину води, отже верхній рівень гасу завжди вищий рівня води, тобто витікати почне гас.

$\rho_г gh = \rho_в g2x$, де $x = h - h_1$. $\rho_г gh = 2\rho_в gh - 2\rho_в gh_1$.

$h(2\rho_в - \rho_г) = 2\rho_в h_1$. $h = \dfrac{2\rho_в h_1}{2\rho_в - \rho_г} = 15$ см.

83. У сполучених посудинах знаходиться вода. Після того, як в праве коліно посудини налили олію, різниця рівнів води у посудині стала 9 см. Яка висота стовпчика олії? Якою стане різниця рівнів води в посудині, якщо в ліве коліно долити гас, висота стовпчика якого 7 см? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, олії $\rho_о$=900 кг/м^3, гасу$\rho_г$=800 кг/м^3. (2015 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

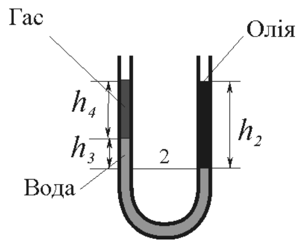


Після того як налили олію рідини зайняли положення, як зображено на малюнку. На рівні 1 тиски однакові, тому $\rho_в gh_1 = \rho_о gh_2$. Звідси $h_2 = \dfrac{\rho_в \cdot h_1}{\rho_о}$. h_2=10 см.

Тиск, який чинить шар гасу висотою 7 см менший, ніж тиск, який чинить шар олії висотою 10 см, тому розміщення рідин буде наступним:

Рівність тисків на рівні 2 визначається співвідношенням: $\rho_в gh_3 + \rho_г gh_4 = \rho_о gh_2$. Звідси

$h_3 = \dfrac{\rho_о \cdot h_2 - \rho_г h_4}{\rho_в}$ =3,4 см.



84. У трьох однакових сполучених посудинах знаходиться ртуть. Визначити, на скільки підніметься рівень ртуті в середній посудині після того, як у ліву посудину налити шар води висотою l_1, а в праву – висотою l_2. Густина води $\rho_в$, ртуті $\rho_р$. (2006 р. III е. 8 к.)

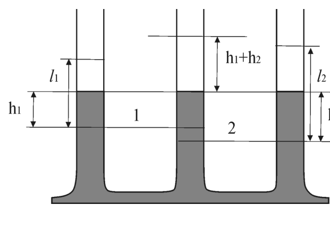
Розв'язок

Об'єм ртуті не змінюється. Якщо припустити, що в лівій посудині ртуть опустилась на h_1, а в правій на h_2, то в середній вона піднімається на h_1+h_2.

Умова рівноваги на рівні 1: $\rho_в gl_1 = \rho_р g(h_1 + h_2 + h_1) = \rho_р g(2h_1 + h_2)$.

Умова рівноваги на рівні 2:

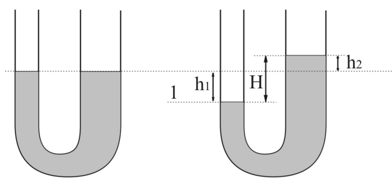
$\rho_в gl_2 = \rho_р g(h_1 + h_2 + h_2) = \rho_р g(h_1 + 2h_2)$.



Додавши ці рівняння одержимо:

$\rho_в g(l_1 + l_2) = 3\rho_р g(h_1 + h_2)$. Тому $h_1 + h_2 = \dfrac{\rho_в}{3\rho_р}(l_1 + l_2)$.

85. У сполучених посудинах з площами перерізу 10 см^2 і 15 см^2 знаходиться ртуть. Як і на скільки зміниться рівень ртуті у ширшій посудині, якщо в обидві посудини долити по 150 г масла? Густина ртуті $\rho_{рт}$= 13600 кг/м^3. (2006 р. з. 8 к.)



Розв'язок

Нехай у першій посудині рівень ртуті зменшився на h_1, а в другій збільшився на h_2. Тоді S_1h_1=S_2h_2. Різниця рівнів ртуті у двох посудинах H=h_1+h_2. З цих двох рівнянь $S_1(H–h_2)$=S_2h_2; $h_2 = \dfrac{S_1H}{S_1 + S_2}$ (1). На рівні 1 тиски однакові: $\dfrac{m_м g}{S_1} = \dfrac{m_м g}{S_2} + \rho_{рт} gH$; $H = \dfrac{m_м(S_2 - S_1)}{\rho_{рт} S_1 \cdot S_2}$ (2). Підставимо (2) в (1).

$h_2 = \dfrac{m_м(S_2 - S_1)}{\rho_{pт} \cdot S_2(S_1 + S_2)} \approx 1{,}5$ см.

86. В сполучених посудинах знаходиться ртуть на 36,8 см нижче верхнього краю посудини. Площа перерізу однієї посудини вдвічі більша за площу іншої. У широку посудину доливають воду до краю. На скільки сантиметрів підніметься ртуть у вузькій посудині? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, ртуті ρ_p=13600 кг/м^3 . (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

В широку посудину доведеться долити воду висотою $h + h_1$, де h_1 – це висота опускання ртуті в широкій посудині. При цьому ртуть, по відношенню до свого початкового положення підніметься у вузькій посудині на висоту h_2. Висоти h_1 і h_2 пов'яжемо, скориставшись рівновагою об'ємів ртуті в силу її нестисливості. $h_1 S_1 = h_2 S_2$, Оскільки за умовою задачі $\dfrac{S_1}{S_2} = 2$, то $h_2 = 2h_1$. Тиск, який створює вода в широкій посудині буде дорівнювати тиску ртуті у вузькій посудині : $p_в g\left(h + \dfrac{h_2}{2}\right) = p_p g\left(\dfrac{h_2}{2} + h_2\right)$.

Відлік висоти ведеться від нижнього рівня ртуті у широкій посудині.

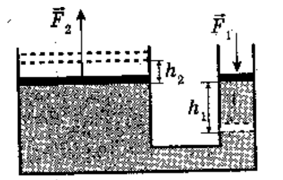
Розв'яжемо останнє рівняння відносно шуканої висоти:

$p_в h + p_в \dfrac{h_2}{2} = p_p \dfrac{3h_2}{2} \Rightarrow h_2 = \dfrac{2p_в h}{3p_p - p_в}$. Звідси $h_2 \approx 1{,}85$ см.

87. Малий поршень гідравлічного пресу за один хід опускається на відстань 0,2 м, а більший поршень піднімається на 0,01 м. З якою силою він діє на за-тиснуте в нього тіло, якщо на малий поршень діє сила 500 Н? (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

За законом Паскаля: p_1=p_2, де $p_1 = \dfrac{F_1}{S_1}$, $p_2 = \dfrac{F_2}{S_2}$, S_1, S_2 – площі малого і великого поршнів. $\dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = \dfrac{S_2}{S_1} \cdot F_1$. Оскільки рідина нестислива, то об'єм рідини, яка перейшла з одного циліндра в інший, однаковий:



V_1=V_2, $S_1 h_1 = S_2 h_2 \Rightarrow \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{h_1}{h_2}$. Тоді $F_2 = \dfrac{h_1}{h_2} F_1$. $F_2 = \dfrac{0{,}2\text{ м}}{0{,}01\text{ м}} \cdot 500\text{ Н} = 10^4$ Н.

88. Дві вертикальні сполучені посудини заповнені водою і закриті поршнями, маси яких відповідно m_1=0,1 кг і m_2=0,2 кг. У положенні рівноваги лівий поршень вище правого на h=2 см. Коли на лівий поршень покласти гирю масою m=100 г, поршні розмістяться на одному рівні. Яка буде різниця висот між поршнями у положенні рівноваги, якщо гирю поставити на правий поршень? Тертям нехтувати. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

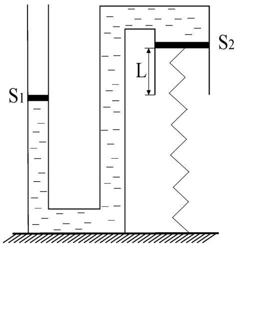
У положеннях рівноваги тиски на однаковому рівні у лівій і правій посудинах однакові. З умови рівності тисків для трьох випадків:

$\dfrac{m_1 g}{S_1} + \rho g h = \dfrac{m_2 g}{S_2}$ (1) ; $\dfrac{(m_1 + m)g}{S_1} = \dfrac{m_2 g}{S_2}$ (2) ;

$\dfrac{m_1 g}{S_1} + \rho g H = \dfrac{(m_2 + m)g}{S_2}$ (3) , де H – шукана різниця рівнів.

Оскільки згідно умови m_1+m=m_2, то з другого рівняння випливає, що S_1=S_2. Тоді з першого рівняння $S = \dfrac{m_2 - m_1}{\rho h}$. Підставляючи одержаний вираз у третє рівняння, одержимо: $H = \dfrac{h(m_2 + m - m_1)}{m_2 - m_1} = 4$ см .

89. Два масивних поршні знаходяться в нерухомій S - подібній жорсткій трубі, заповненій водою. До одного з поршнів прикріплена пружина жорсткістю 1000 Н/м, другий кінець якої вмонтовано в підлогу. Система знаходиться в рівновазі. Відстань від правого поршня до кінця труби L=20 см. На лівий поршень акуратно кладуть вантаж. При якій максимальній масі вантажу вода не виливається з системи? Площа лівого поршня S_1=100 см^2, правого S_2=500 см^2, $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2006 р. ІІІ е. 8 к.)

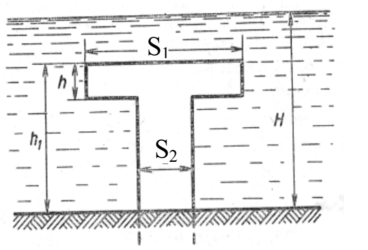


Розв'язок

Нехай лівий поршень змістився на h, тоді правий зміститься на h/5. Для того, щоб вода не виливалась потрібно щоб $h/5 \le 0{,}2$ м, тобто $h \le 1$ м. Зміна тиску в лівій трубці $\Delta p = \frac{mg}{S_1}$. Зміна різниці рівнів води в трубах $\Delta h = h - \frac{h}{5} = \frac{4}{5}h$.

Сила пружності пружини $F = k\frac{h}{5}$. Отже $\frac{mg}{S_1} = \rho_в g \frac{4}{5}h + \frac{kh}{5S_2}$. Звідси m=12 кг.

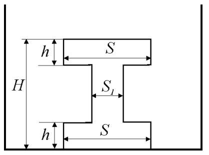
90. На дні водойми встановлена бетонна конструкція грибоподібної форми, розміри якої вказані на малюнку. Площа верхньої частини S_1, нижньої S_2. Глибина водойми H. З якою силою тисне конструкція на дно водойми? Густина бетону ρ, густина води ρ_0. (2006 р. з. 8 к.)



Розв'язок

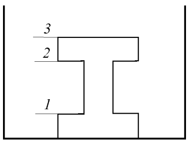
Сила тиску конструкції на дно складається із сили тяжіння конструкції $F_1 = \rho g(S_1 h + S_2(h_1 - h))$, сили тиску води на верхню поверхню деталі $F_2 = \rho_0 g S_1(H - h_1)$ і сили тиску води на нижню поверхню, напрямлену вверх $F_3 = \rho_0 g(S_1 - S_2)\cdot(H - h_1 + h)$. Тоді $F = F_1 + F_2 - F_3$. Після підстановки $F = g(\rho - \rho_0)(S_1 h + S_2 h_1 - S_2 h) + g\rho_0 S_2 H$.

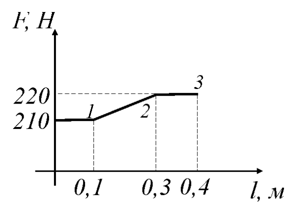
91. На дні посудини встановлена конструкція, яка нагадує штангу, виготовлена з чавуну. Площа верхньої і нижньої частини S=100 см^2, площа середньої частини S_1=50 см^2. Висота конструкції та її частин вказані на малюнку. H=40 см, h=10 см. У посудину наливають воду до висоти H. Визначити силу тиску конструкції на дно за відсутності води та побудувати графік залежності сили тиску конструкції на дно посудини від висоти налитої води. Дно посудини і поверхня конструкції ідеально гладенькі. Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, чавуну ρ=7000 кг/м^3. (2010 р. III е. 8 к.)



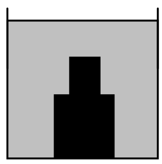
Розв'язок

Сила тиску конструкції за відсутності води $F = mg = \rho V g = \rho g\left(2Sh + S_1(H - 2h)\right)$. Після підстановки F=210 Н. Під час збільшення рівня води до рівня 1 тиск не змінюється. На графіку це горизонтальна лінія 1. Під час збільшення рівня води від рівня 1 до рівня 2 вода тисне на нижню основу і тиск рівномірно збільшується. Знайдемо силу тиску води на нижню основу, коли вода підніметься до рівня 2: $F_1 = \rho_в g(H - 2h)\cdot(S - S_1)$. Після підстановки F_1=10 Н. Отже, загальна сила тиску $F + F_1$ = 220 Н. На графіку це пряма лінія 2. Після наступного збільшення рівня води до рівня 3 сила тиску на нижню основу збільшується, але разом з тим вода починає тиснути знизу на верхню основу. Ці сили тиску однакові, бо однакові площі поверхонь і вони компенсують одна одну, тому загальна сила тиску не змінюється. На графіку це горизонтальна лінія 3.



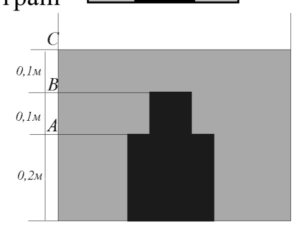


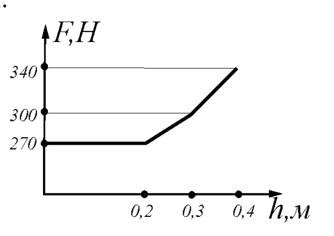
92. На рівне чисте дно сухого акваріуму поставили кубик, а на нього інший, розміри якого вдвічі менші. Ребро меншого кубика a=10 см. Акваріум заливають водою до висоти 40 см. Вода при цьому не проникає під нижню грань більшого кубика і між кубики. Побудувати графік залежності сили тиску кубика на дно акваріума від висоти налитої води (без врахування атмосферного тиску). Густина речовини кубика ρ=3 г/см^3, густина води ρ_0=1 г/см^3. (2014 р. III е. 8 к.)

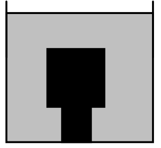


Розв'язок

Поки в акваріумі немає води, то сила тиску – це вага кубиків. $F = P_1 + P_2$. $F = \rho \cdot a^3 \cdot g + \rho \cdot (2a)^3 \cdot g$ =270 Н. Наливання води до рівня A силу тиску не змінює. Починаючи від цього рівня, виникне сила тиску з боку води на частину верхньої грані нижнього кубика, яка збільшує загальну силу тиску. $F_1 = \rho_0 g h \cdot (S_2 - S_1)$, де $S_2 = 4a^2$ – площа грані нижнього кубика, $S_1 = a^2$ – площа грані верхнього кубика, h – висота шару води, який змінюється від 0 до 0,2 м. Отже F_1 змінюється від 0 до 60 Н (від 0 до 30 Н від рівня A до рівня B і від 30 Н до 60 Н від рівня B до рівня C). Але, коли вода буде на рівні B, виникне сила тиску з боку води на верхню грань верхнього кубика, яка теж збільшує загальну силу тиску. $F_2 = \rho_0 g h_1 \cdot S_1$, де h_1–висота шару води, який змінюється від 0 до 0,1 м. F_2 змінюється від 0 до 10 Н. Тоді загальна зміна сили тиску з боку води від рівня B до рівня C становитиме 40 Н. Зобразимо це на графіку.





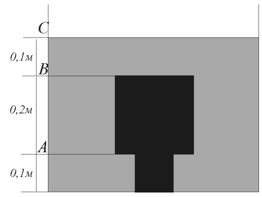


93. На рівне чисте дно сухого акваріуму поставили кубик, ребро якого a=10 см. На нього поставили інший кубик, розміри якого вдвічі більші. Акваріум заливають водою до висоти 40 см. Вода при цьому не проникає під нижню грань меншого кубика і між кубики. Побудувати графік залежності сили тиску кубиків на дно акваріума від висоти налитої води (без врахування атмосферного тиску). Густина речовини кубиків ρ=3000 кг/м^3, густина води ρ_0=1000 кг/м^3. (2014 р. ІІІ е. 9 к.)

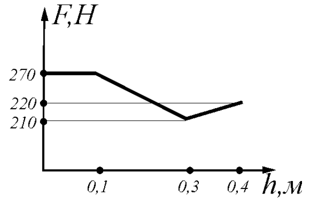
Розв'язок

Поки в акваріумі немає води, то сила тиску – це вага кубиків. $F = P_1 + P_2$.

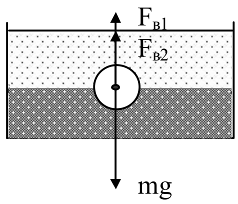
$F = \rho \cdot a^3 \cdot g + \rho \cdot (2a)^3 \cdot g$ =270 Н.



Наливання води до рівня A силу тиску не змінює. Починаючи від цього рівня, виникне сила тиску з боку води на частину нижньої грані верхнього кубика, яка зменшує загальну силу тиску. $F_1 = \rho_0 gh \cdot (S_2 - S_1)$, де S_2=4a^2 – площа грані верхнього кубика, S_1=a^2 – площа грані нижнього кубика, h – висота шару води, який змінюється від 0 до 0,3 м. Отже F_1 змінюється від 0 до 90 Н (від 0 до 60 Н від рівня A до рівня B і від 60 Н до 90 Н від рівня B до рівня C). Але, коли вода буде на рівні B, виникне сила тиску з боку води на верхню грань верхнього кубика, яка збільшує загальну силу тиску. $F_2 = \rho_0 g h_1 \cdot S_2$, де h_1 – висота шару води, який змінюється від 0 до 0,1 м. F_2 змінюється від 0 до 40 Н. Тоді загальна сила тиску з боку води від рівня B до рівня C змінюється від 60 Н до 90–40=50 Н. Зобразимо це на графіку.



Виштовхувальна сила. Закон Архімеда



94. У посудину налили ртуть, а на неї мастило. Куля, опущена в посудину, плаває так, що вона рівно наполовину занурена у ртуть. Визначити густину кулі, якщо густина мастила 0,9 г/см^3, а густина ртуті 13,6 г/см^3. (2001 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

З умови плавання $mg = F_{в1} + F_{в2}$. Звідси $\rho_к Vg = \frac{1}{2}\rho_р Vg + \frac{1}{2}\rho_м Vg$.

$$\rho_к = \frac{1}{2}(\rho_р + \rho_м) = 7{,}25\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

95. Вага у воді прозорого каменя, знайденого геологами на Поліссі, виявилася у 1,4 рази меншою, ніж у повітрі. На користь скла чи алмазу слугують результати досліджень геологів? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, скла $\rho_с$=2500 кг/м^3, алмазу ρ=3500 кг/м^3. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Вага каменя в повітрі $\rho_к gV$. Вага каменя у воді $\rho_к gV - \rho_в gV$. Згідно умови задачі $\frac{\rho_k gV}{(\rho_k - \rho_в)gV} = 1{,}4$. Звідси $\rho_к$=3500 кг/м^3. Це густина алмазу.

96. Куля з чавуна, яка має всередині порожнину, плаває у воді, занурившись наполовину. Знайти об'єм внутрішньої порожнини, якщо маса кулі 5 кг. Густина чавуну 7800 кг/м^3, води 1000 кг/м^3. (2002 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

З умови плавання mg=0,5ρgV, де ρ – густина води, V – об'єм кулі.

Враховуючи, що m=$\rho_1 V_1$, де ρ_1 – густина чавуну, а V_1 – його об'єм, знаходимо: $V_{порож} = V - V_1 = \frac{m}{0{,}5\rho} - \frac{m}{\rho_1} = \frac{m(2\rho_1 - \rho)}{\rho\rho_1}$. $V_{порож}$≈0,0093 м^3.

97. Алюмінієва куля з внутрішньою порожниною важить 2 Н у повітрі і 1,2 Н у воді. Визначте об'єм внутрішньої порожнини кулі. Виштовхувальною силою повітря знехтувати. Густина алюмінію $\rho_а$ =2700 кг/м^3, води $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2005 р. ІІ е. 9 к.)

Розв'язок

На кулю діє виштовхувальна сила $F_A = 0{,}8$ Н. $F_A = \rho_в g V_к$. Об'єм алюмінію $V_a = \frac{F_{пов.}}{g\rho_a}$. Тоді об'єм порожнини $V = \frac{F_A}{\rho_в g} - \frac{F_{пов.}}{\rho_a g}$. V≈6·10^{-6} м^3=6 см^3.

98. Металева куля у досліджуваній рідині важить 1,1 Н. Вага кулі у воді 1 Н. Визначити густини рідини і матеріалу, з якого виготовлена куля, якщо вага кулі у повітрі 1,5 Н. Густина води $\rho_в$ = 1000 кг/м^3. (2002 р. з. 8 к.)

Розв'язок

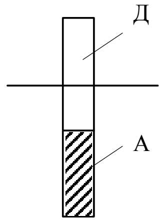
Виштовхувальна, що діє на кулю у воді: $\rho_в g V_к = P_1 - P_2$, де $V_к$ - об'єм кулі, P_1, P_2 – вага кулі відповідно у повітрі та воді. Звідси $V_к = \dfrac{P_1 - P_2}{\rho_в g}$. Тоді густина матеріалу кулі $\rho_к = \dfrac{P_1}{V_к g} = \dfrac{P_1}{P_1 - P_2}\rho_в$. Після підстановки $\rho_к$=3000 кг/м^3. Виштовхувальна сила, що діє на кулю в досліджуваній рідині: $\rho_x g V_к = P_1 - P_3$, де P_3 – вага кулі в досліджуваній рідині. Тоді густина досліджуваної рідини $\rho_x = \dfrac{P_1 - P_3}{V_к g} = \dfrac{P_1 - P_3}{P_1 - P_2}\rho_в$. Після підстановки ρ_x=800 кг/м^3.

99. Динамометр, до якого підвішено злиток срібла і золота, у повітрі показує вагу P, а у воді P_B. Знайти вміст золота і срібла у злитку. Густина води $\rho_в$, золота $\rho_з$, срібла $\rho_с$. (2002 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Згідно умови задачі, виштовхувальна сила $F_A = P - P_B$. Враховуючи, що $F_A = \rho_в g(V_з + V_с)$, де $V_з$, $V_с$ – відповідно об'єм золота і срібла у злитку,

одержимо: $V_з + V_с = \dfrac{F_A}{\rho_в g}$. Вага злитка у повітрі $P = (m_з + m_с)g = (\rho_з V_з + \rho_с V_с)g$. Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно $V_с$ і $V_з$, одержимо: $V_с = \dfrac{P(\rho_з - \rho_в) - P_в\rho_з}{g(\rho_з - \rho_с)\rho_в}$. Маса срібла $m_с = \rho_с V_с$. Маса золота $m_з = m - m_с = \dfrac{P}{g} - m_с$.



100. Два циліндри – алюмінієвий і дерев'яний – з'єднані між собою основами. Яка довжина алюмінієвого циліндра, якщо при плаванні у воді вони займають вертикальне положення, причому дерев'яний виступає над водою на Δl=2,9 см? Довжина дерев'яного бруска l=20 см, площі основ однакові. Густина води $\rho_в$=1 г/см^3, дерева $\rho_д$=0,6 г/см^3, алюмінію $\rho_а$ =2,7 г/см^3. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

З умови плавання: $lS\rho_д g + l_a S\rho_a g = \rho_в(l - \Delta l)Sg + \rho_в l_a Sg$.

Звідси $l_a = \dfrac{\rho_в(l - \Delta l) - \rho_д l}{\rho_a - \rho_в}$. l_a=3 см.

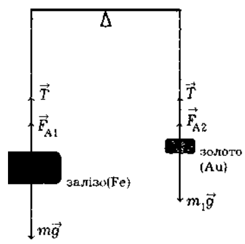
101. До коромисла зрівноважених рівноплечих терезів підвішено два тягарі рівної маси, але різних об'ємів. Якщо перший тягар занурити у воду, а другий в олію, то рівновага збережеться. У скільки разів відрізняються густини тягарів? Густина води $\rho_в$=1 г/см^3 , олії $\rho_о$=0,9 г/см^3. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки після занурення тягарів у рідини рівновага зберігається, то F_{A1}=F_{A2}.

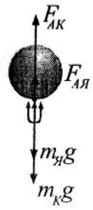
$\rho_в g\dfrac{m}{\rho_1} = \rho_0 g\dfrac{m}{\rho_2}$, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{\rho_0}{\rho_в}$, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}9$.

102. Знайдений на дні водоймища золотий скарб, водолаз зважив під водою, користуючись терезами із залізними гирями. Його маса становила 643 г. Однак, коли водолаз продавав свою знахідку, то його звинуватили в обмані. Скільки золота реально містив скарб? Густина води $\rho_в$=1 г/см^3, заліза ρ_{Fe}=7,8 г/см^3, золота ρ_{Au}=19,3 г/см^3 (2006 р. з. 9 к.)



Розв'язок

Умова рівноваги рівноплечих терезів – рівність сил натягу ниток: $mg - \rho_в g\dfrac{m}{\rho_{Fe}} = m_1 g - \rho_в g\dfrac{m_1}{\rho_{Au}}$. Отже, $m_1 = m\dfrac{(\rho_{Fe} - \rho_в)\rho_{Au}}{(\rho_{Au} - \rho_в)\rho_{Fe}} = 590$ г.



103. З дна озера намагаються підняти затонулий сталевий якір масою 780 кг за допомогою пінопластової кулі, яку прикріплюють до якоря легким тросом. При якому мінімальному об'ємі кулі це можливо? Густини сталі, води і пінопласту дорівнюють відповідно 7800 кг/м^3, 1000 кг/м^3 і 150 кг/м^3. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Запишемо умову рівноваги системи якір-куля (вважаймо, що якір піднімається рівномірно): $F_{AK} + F_{AЯ} = m_K g + m_Я g$. $\rho_B g(V_K + V_Я) = (\rho_K V_K + m_Я)g$.

$V_K = \dfrac{m_Я(\rho_Я - \rho_B)}{(\rho_B - \rho_K)\rho_Я} = 0{,}8$ м^3.

104. В посудині з водою плаває пористий шматок льоду. Рівно половина (за об'ємом) цього «айсберга» знаходиться над водою. Лід виймають з води, при цьому її рівень знизився на 6 см. Знайдіть сумарний об'єм повітряних пустот в шматку льоду, якщо поперечний переріз посудини 200 см^2. Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, густина льоду $\rho_л$=900 кг/м^3. (2007 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

$m_л = \rho_л\left(V_{айсб} - V_п\right), \qquad V_{вит} = \frac{1}{2}V_{айсб} = S\Delta h$.

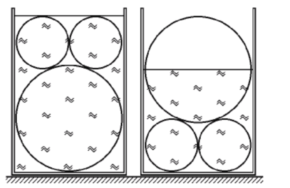
З умови плавання: $m_л g = \rho_в g V_{вит}$. Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо:

$$V_п = S\Delta h \frac{2\rho_л - \rho_в}{\rho_л} \approx 1066 \text{ см}^3 .$$

105. На дні вертикальної циліндричної посудини радіусом дна R=10 см лежить куля радіусом r=5 см. Густина матеріалу кулі в два рази менша, ніж густина води. Який об'єм води слід налити в посудину, щоб куля перестала чинити тиск на дно? (2007 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Коли куля перестає тиснути на дно посудини, на неї діє дві сили, які зрівноважують одна одну: $F_A = F$, де F – сила тяжіння, F_A – виштовхувальна сила. $F_A = \rho_1 g V_1,$ де V_1 – об'єм зануреної в рідину частини кулі, ρ_1 – густина води. $F = \rho_2 g V_2,$ де V_2 – об'єм всієї кулі, ρ_2 – її густина. Враховуючи, що згідно умови $\rho_1 / \rho_2 = 2,$ знаходимо, що $V_1 = \frac{V_2}{2}$. Це означає, що куля занурена у воду наполовину. Іншими словами, висота стовпчика рідини в посудині $h = r.$ Після цього об'єм води V, налитої в посудину, визначається суто геометрично: із об'єма циліндра радіусом R і висотою h віднімається об'єм півкулі радіусом r: $V = \pi R^2 h - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right),$ де $h = r.$ Звідси $V = \pi r\left(R^2 - \frac{2}{3}r^2\right) = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ м^3.



106. Дві однакові маленькі кулі радіусом R_1 і одну велику кулю радіусом R_2=2R_1 вміщують в циліндричну посудину з вертикальними стінками. Радіус посудини дещо більший за радіус великої кулі. Посудину наповнюють рідиною, густина якої ρ_0. Якщо велика куля знаходиться знизу, то вона перестає тиснути на дно, коли рівень рідини повністю покриває маленькі кулі. Якщо велика куля знаходиться зверху, то вона перестає тиснути на маленькі кулі при заповненні посудини до середини великої кулі. Визначте густини куль ρ_1 і ρ_2. Тертям знехтувати. *Примітка.* Об'єм кулі радіусом R дорівнює: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (2009 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки радіуси кульок зв'язані відношенням $R_2 = 2R_1$, то для об'ємів маємо: $V_2 = 8V_1$. Позначимо густину малих кульок ρ_1 , більшої ρ_2 . Тоді маси кульок відповідно рівні: $m_1 = \rho_1 V_1,\ m_2 = \rho_2 V_2 = 8\rho_2 V_1$.

Умова того, що більша кулька припиняє тиснути на дно посудини означає, що система всіх трьох кульок починає вільно плавати в рідині, тобто сила тяжіння трьох кульок зрівноважується виштовхувальною силою, що діє на три кульки: $\left(2m_1 + m_2\right)g = \rho_0\left(2V_1 + V_2\right)g$. Таким чином $\rho_1 + 4\rho_2 = 5\rho_0$.

В другому випадку сказано, що більша кулька припиняє тиснути на менші кульки. Це означає, що більша кулька починає вільно плавати в рідині, тобто сила тяжіння і виштовхувальна сила, що діє на кульку, зрівнюються: $m_2 g = \rho_0 \frac{1}{2} V_2 g$. Таким чином $\rho_2 = 0{,}5\rho_0$ і $\rho_1 = 3\rho_0$.

107. На двох пустотілих кубиках, які плавають у воді, лежить легенька паличка. Розміри ребер кубиків a_1 = 0,1 м і a_2 = 0,2 м, маса кубиків відповідно m_1=50 г і m_2=100 г. Скільки води необхідно налити у один з кубиків, щоб паличка лежала горизонтально? Масою палички і товщиною кубиків знехтувати. Густина води ρ=1000 кг/м^3 (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Запишемо умови плавання кубиків: $\rho g a_1^2 h_1 = m_1 g$, $\rho g a_2^2 h_2 = m_2 g$, де h_1 і h_2 – глибини занурення відповідно першого і другого кубиків, ρ – густина води.

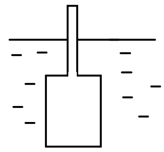
Тоді висоти ребер, що виступають над водою:

для першого кубика $h_3 = a_1 - h_1 = a_1 - \frac{m_1}{a_1^2 \cdot \rho}$ =0,095 м;

для другого кубика $h_4 = a_2 - h_2 = a_2 - \frac{m_2}{a_2^2 \cdot \rho}$ =0,1975 м.

Оскільки h_4>h_3, то воду потрібно долити в другий кубик. Маса цієї води $m = \rho \cdot a_2^2 \cdot \Delta h = \rho a_2^2\left(h_4 - h_3\right)$=4,1 кг.

108. Ареометр – прилад для вимірювання густини рідини складається з двох циліндрів із спільною віссю, нижній з яких завжди занурений в досліджувану рідину, а на верхньому нанесені поділки відповідно до рівня занурення. На малюнку показано ареометр, у якого, при зануренні у воду, над поверхнею залишається рівно половина верхнього циліндра. Знайдіть, в якому діапазоні може вимірювати густину даний ареометр. Циліндри ареометра однакові по висоті, а відношення радіусів n=5. Густина води ρ_0=1000 кг/м^3. (2002 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

При зануренні ареометра у воду $mg = \rho_0\left(\pi r_2^2 l + \pi r_1^2 \frac{l}{2}\right)g$, де l – висота циліндра, r_1, r_2 – їхні радіуси. Якщо ареометр повністю занурюється в досліджувану рідину, то $mg = \rho_{\min}\left(\pi r_2^2 l + \pi r_1^2 l\right)g$.

Якщо верхній циліндр знаходиться над поверхнею рідини, то $mg = \rho_{\max}\pi r_2^2 l \cdot g$. Оскільки ліві частини виразів рівні, то прирівнявши праві частини, отримаємо: $\rho_0\left(r_2^2 + \frac{r_1^2}{2}\right) = \rho_{\min}\left(r_2^2 + r_1^2\right)$; $\rho_0\left(r_2^2 + \frac{r_1^2}{2}\right) = \rho_{\max} r_2^2$. Оскільки r_2=5r_1, то $\rho_{\min} = \frac{51}{52}\rho_0 \approx 981\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\rho_{\max} = \frac{51}{50}\rho_0 \approx 1020\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

109. У посудину налили V_0=0,2 л води. Якщо в посудину помістити пінопластову пластинку об'ємом V = 50 см^3 і зверху на неї насипати цукор масою m, то вона зануриться у воду на 2/3 свого об'єму. Якщо весь цукор розчинити у воді, то пластинка зануриться у воду на 1/6 свого об'єму. Визначте масу цукру m, масу пластинки M і густину ρ одержаного цукрового сиропу. Вважати, що при розчиненні цукру об'єм рідини практично не змінюється. Густина води ρ_0=1000 кг/м^3. (2009 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Умови плавання пінопластової пластинки, "навантаженої" цукром: $(M + m)g = \frac{2}{3}\rho_0 V g$ (1). При розчиненні цукру у воді одержимо цукровий розчин з густиною $\rho = \frac{M_0 + m}{V_0} = \rho_0 + \frac{m}{V_0}$ (2), де $M_0 = \rho_0 V_0$ – маса води в посудині. Умова плавання пінопластової пластинки в цукровому розчині: $Mg = \frac{1}{6}\rho V g$. З умов плавання пластинки запишемо: $m = \left(\frac{2}{3}\rho_0 - \frac{1}{6}\rho\right)V$ (3).

Підставимо (3) в (2) і знайдемо густину цукрового розчину: $\rho = \rho_0\frac{6V_0 + 4V}{6V_0 + V} = 1{,}12\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Тоді маса пластинки $M = \frac{1}{6}\rho V \approx 9{,}3$ г, маса цукру $m = (\rho - \rho_0)V_0 = 24$ г.

110. На корабель за допомогою батискафа піднімають з дна золоті скарби. Батискаф може занурюватися тільки з додатковим баластом. Баласт прикріплюють до нього зовні. На кораблі є m_c = 30 тонн свинцевого баласту. Опустившись на дно, батискаф прикріплює зовні скарб, скидає баласт і піднімається під дією виштовхувальної сили. Яку максимальну кількість $m_з$ золота можна підняти з дна, використавши весь баласт? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, свинцю ρ_c=11300 кг/м^3, золота $\rho_з$ = 19300 кг/м^3. Батискаф не має двигуна. (2015 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Хай всього відбувається N занурень. Маса батискафа (без баласту і вантажу) M, а виштовхувальна сила, діюча на нього F_A. Кожного разу батискаф занурюється з баластом масою $\frac{m_c}{N}$ і об'ємом $\frac{m_c}{\rho \cdot N}$. При цьому батискаф зможе зануритися, якщо сумарна сила тяжіння, що діє на батискаф і баласт більша за сумарну виштовхувальну силу: $Mg + \frac{m_c}{N} > F_A + \rho_в g\frac{m_c}{\rho_c \cdot N}$ (1). Аналогічно, він зможе спливти із золотом масою $\frac{m_з}{N}$, якщо сумарна сила тяжіння менша за виштовхувальну силу: $Mg + \frac{m_з}{N} < F_A + \rho_в g\frac{m_з}{\rho_з \cdot N}$ (2). З рівнянь (1) і (2): $m_c - \rho_в\frac{m_c}{\rho_c} > m_з - \rho_в\frac{m_з}{\rho_з}$. Звідси $m_з < m_c\frac{1 - \frac{\rho_в}{\rho_c}}{1 - \frac{\rho_в}{\rho_з}}$ ≈28,8 тонн.

111. У калориметрі плаває куб, складений з двох однакових половинок. Нижня половинка з льоду ($\rho_л$=0,9$\rho_в$) верхня – пінопластова ($\rho_п$=0,5$\rho_в$). Ребро куба d=8 см. На яку глибину зануриться пінопластова половинка після танення льоду? На скільки при цьому зміниться відстань між верхнім ребром пінопластової пластинки і дном калориметра? (2003 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

До танення льоду умова плавання куба запишеться так: $mg = \rho_в g V_з$, або

$\rho_л g S \frac{d}{2} + \rho_п g S \frac{d}{2} = \rho_в g S h_{з1}$. Звідси $h_{з1} = \frac{d(\rho_л + \rho_п)}{2\rho_в} = \frac{d \cdot 1{,}4\rho_в}{2\rho_в} = 0{,}7d$. Над водою буде частина кубика висотою h_1=0,3d.

Після танення льоду рівень води в калориметрі не зміниться.

Умова плавання запишеться: $\rho_п g S \frac{d}{2} = \rho_в g S h_{з2}$. Пінопластова частина кубика буде занурена на глибину $h_{з2} = \frac{d\rho_п}{2\rho_в} = \frac{d}{4} = 0{,}25d$ = 2 см. Над водою буде частина пінопластової пластинки висотою h_2=0,25d. Оскільки рівень води той самий, то відстань до дна зміниться на $\Delta h = h_1 - h_2 = 0{,}05d = 0{,}4$ см .

112. Крижаний кубик із вмерзлим у нього камінчиком опустили в циліндричну посудину з водою. Рівень води в посудині підвищився на Δh=4 см, а кубик став плавати, повністю поринувши у воду. У скільки разів об'єм камінчика V_2 менший за об'єм льоду V_1? Як і на скільки зміниться рівень води відносно початкового стану, коли весь лід розтане? Густина льоду ρ_1=900 кг/м^3, камінчика ρ_2=2700 кг/м^3, води ρ =1000 кг/м^3. (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Умова плавання кубика з каменем у воді при його повному зануренні: $(m_1+m_2)g=\rho(V_1+V_2)g$, де $m_1=\rho_1 V_1$, $m_2=\rho_2 V_2$. Тоді $\rho_1 V_1+\rho_2 V_2=\rho(V_1+ V_2)$.

Розділивши цей вираз почленно на V_2, знаходимо відношення об'ємів льоду і камінця:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1} = \frac{2700-1000}{1000-900} = 17 \quad (1).$$

Отже, об'єм камінця в 17 разів менший за об'єм льоду.

Початкове підвищення рівня на Δh обумовлено виштовхуванням води при занурені льоду і камінця: $V_1+V_2=\Delta h\cdot S$ (2), де S – площа дна посудини. Коли лід розтає, то об'єм отриманої з нього води V_{1B} буде меншим, ніж об'єм льоду V_1 із-за різниці густини води і льоду ρ і ρ_1. Так як маса при цьому не міняється, то $\rho_1 V_1=\rho V_{1B}$ (3), або $V_{1B} = V_1 \frac{\rho_1}{\rho}$. Після танення льоду висота рівня води буде перевищувати початкове значення на Δh_1, яке визначається об'ємом камінця і отриманої води: $V_{1B}+ V_2=\Delta h_1\cdot S$ (4).

Розділивши (4) на (2), отримаємо: $\Delta h_1 = \Delta h \cdot \frac{V_{1B} + V_2}{V_1 + V_2}$. Поділивши чисельник та знаменник останнього дробу на V_2, з врахуванням (3) знайдемо:

$\Delta h_1 = \Delta h \cdot \frac{\frac{\rho_1 V_1}{\rho V_2} + 1}{\frac{V_1}{V_2} + 1}$. Підставивши сюди відношення об'ємів і дані з умови задачі, отримаємо: Δh_1=3,6 см. Отже рівень води після танення льоду понизився на Δh–Δh_1=4–3,6=0,4 см від рівня води з льодом і камінцем або піднявся на Δh_1=3,6 см відносно початкового рівня води в посудині.

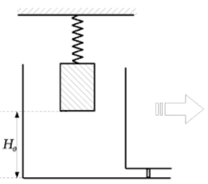
113. Крижаний кубик з повітряними бульбашками акуратно поклали в посудину, доверху заповнену водою. Частина води вилилася через край, і верхня грань кубика, паралельна поверхні води, стала виступати над нею на висоту h=2 см. Який об'єм води V_1 вилився з посудини відразу після опускання кубика? Який об'єм води V_2 додатково витече з посудини до того часу, коли кубик повністю розтане? (Густина води ρ_0=1000 кг/м^3, середня густина кубика ρ_1=800 кг/м^3). (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

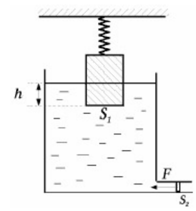
Об'єм V_1 води рівний об'єму зануреної в неї частини кубика. На кубик діє

сила тяжіння і виштовхувальна сила: $F_m = \rho_1 a^3 g$; $F_A = \rho_0 g a^2 (a-h)$, де a–довжина ребра кубика. В рівновазі $F_m = F_A$, звідси $a = h\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1}$. Шуканий об'єм $V_1 = a^2(a-h) = h^3 \frac{\frac{\rho_1}{\rho_0}}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^3} = 800$ см^3.

З закону Архімеда слідує, що кількість води, яка утворюється під час танення кубика, дорівнює кількості витісненої ним води. Тому вода із посудини витікати не буде, тобто $V_2 = 0$.



114. До посудини біля дна підведена тонка труба площею перерізу S_2, закрита рухомим поршнем. У посудині знаходиться циліндр з площею перерізу S_1. Циліндр за верхню основу підвішений за допомогою пружини жорсткістю k до стелі. Нижня основа при цьому знаходиться на висоті H_0 від дна посудини. У посудину наливають воду так, що поршень в трубі доводиться утримувати з деякою силою F. Знайти цю силу, якщо глибина занурення нижньої основи циліндра h. (2010 р. ІІІ е. 9 к.)



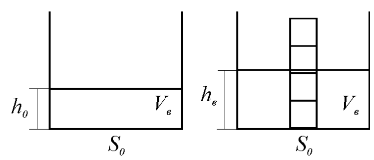
Розв'язок

Позначимо масу циліндра m. Нехай, коли води в посудині немає, розтяг пружини x_1. Тоді $kx_1 = mg$. Після того як в посудину налили воду, нехай розтяг пружини x_2 . Тоді $kx_2 = mg - F_A$, або $k(x_1 - x_2) = F_A$, $k\Delta x = F_A$, де $F_A = \rho g S_1 h$. Циліндр був на висоті H_0 , а після наливання води піднявся на відстань Δx , бо настільки змістилась пружина. Тоді тиск на дні посудини біля поршня $p = \dfrac{F}{S_2} = \rho g(h + \Delta x + H_0)$. $F = \rho g S_2 \left(h + \dfrac{\rho g S_1 h}{k} + H_0 \right)$.

115. В посудині, площа дна якої S_0=10 см^2, знаходиться вода. Висота її рівня h_0=1,5 см. На воду кладуть дерев'яний кубик, на нього другий і т. д. Скільки кубиків потрібно так покласти в стовпчик, щоб нижній торкнувся дна посудини? Всі кубики однакові, висота одного a=10 мм, густина дерева 0,4 г/см^3, води 1 г/см^3. Вода з посудини не виливається. (2012 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Об'єм води в посудині $V_в = S_0 \cdot h_0$. Після занурення кубиків у воду $V_в = (S_0 - a^2) \cdot h_в$ і він такий самий як і в першому випадку. Отже, рівень води став $h_в = \dfrac{10}{9} \cdot h_0$. Умова, за якої N кубиків торкнуться дна посудини (з умови плавання тіл): $m_{куб} \cdot g \cdot N > F_A$;



$m_{куб} \cdot g \cdot N > \rho_в \cdot g \cdot a^2 \cdot h_в$; $\rho_{дерева} \cdot a^3 \cdot g \cdot N > \rho_в \cdot g \cdot a^2 \cdot h_в$.

$N > \dfrac{\rho_в \cdot h_в}{\rho_{дерева} \cdot a} \approx 4{,}17$. N=5 кубиків.

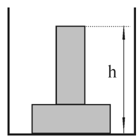
116. У рідині з постійною швидкістю повільно опускається кулька радіуса R і маси m. Яку масу повинна мати кулька того ж радіуса, щоб підніматись з такою ж швидкістю? Густина рідини ρ. (2006 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

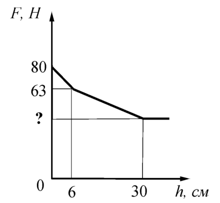
Законом Архімеда користуються тільки для нерухомої рідини (у рухомій рідині відбувається зміна статичного тиску в рідині залежно від швидкості її руху, а сила Архімеда – це сума сил статичного тиску, що діють на тіло). Вважаймо, що кулька рухається так повільно, що можна користуватись законом Архімеда. Розглянемо умови рівномірного руху кульки. Сила опору кульки в обох випадках однакова тому, що форма, розміри і швидкість однакові: $mg = F_A + F_{оп}$ (1). $F_A = m_1 g + F_{оп.}$ (2). Розв'яжемо систему рівнянь (1) та (2):

$mg - F_A = F_A - m_1 g$. Звідси $m_1 = \dfrac{2F_A}{g} - m = 2\rho \dfrac{4}{3}\pi R^3 - m$. $m_1 = \dfrac{8\rho\pi R^3}{3} - m$.

117. Дві однакові шорсткі цеглини поклали на дно акваріума так, як показано на малюнку. Після того як в акваріум почали наливати воду, сила тиску цеглин на дно акваріума залежно від висоти рівня води, налитої в акваріум, змінювалася за законом, відображеним на графіку. Визначити довжини ребер цеглини і густину матеріалу, з якого вони виготовлені. Якому значенню сили відповідає поділка на осі F, проти якої стоїть знак питання? (2006 р. ІІІ е. 8 к.)

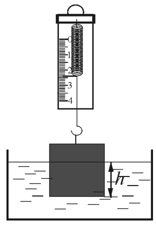


Розв'язок



Спочатку води в акваріумі немає. $F_1 = 2mg = 2\rho_ц V_ц g$; $F_1 = 80$ Н . Сила тиску на дно зазнавала нелінійної зміни в точках h=6 см, h=30 см, тому довжина одного ребра a=6 см, другого b=24 см. Оскільки цеглини шорсткі, то вода під них затікає і на цеглини діятиме виштовхувальна сила. Зменшення сили тиску відбувається завдяки виштовхувальній силі $F_{A1} = F_1 - F_2 = 17$ Н. $F_{A1} = \rho_в g V_ц$. Звідси $V_ц = \dfrac{F_{A1}}{\rho_в g} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ м^3 . Тоді третє ребро $c = \dfrac{V_ц}{a \cdot b} = 0{,}118$ м ≈ 12 см. $\rho_ц = \dfrac{F_1}{2V_ц \cdot g} = 2{,}35 \cdot 10^3\ \dfrac{кг}{м^3}$. На одну цеглину діє F_{A1}=17 Н. На дві цеглини – F_{A2}=34 Н. Тому поділка на осі F відповідає значенню сили 80–34=46 Н.

118. Експериментатор проводив дослід по зануренню кубика, виготовленого з невідомого матеріалу в рідину, густина якої теж невідома. В таблицю він заніс покази динамометра, які відповідають різним глибинам занурення кубика. Деякі значення він забув занести в таблицю. За результатами вимірювань визначте густину кубика та густину рідини. (2016 р. ІІІ е. 9 к.)



h, см	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, Н	8,74	8,09					4,84	4,19	3,93	3,93

Розв'язок

Маса кубика $m = \dfrac{F(0)}{g}$ =0,874 кг. (Кубик ще не занурений і динамометр показує вагу кубика в повітрі). З таблиці бачимо, що при зануренні кубика від 0 до 1 см, сила змінилася на 8,74 Н – 8,09 Н = 0,65 Н. При зануренні кубика від 6 см до 7 см сила теж змінилася на 0,65 Н. В ці моменти кубик ще не був занурений повністю. Залежність сили F від глибини h занурення лінійна: $F=mg-\rho_p gSh$. При зануренні від 8 см до 9 см сила не міняється, отже кубик занурений вже повністю. Тобто повне занурення відбулося від 7 см до 8 см. Знайдемо його. Можна побудувати графік і визначити точку повного занурення. Або від 7 см до повного занурення сила змінилася на 4,19 Н – 3,93 Н = 0,26 Н. З лінійної залежності випливає, що $\dfrac{0{,}65\text{ Н}}{0{,}26\text{ Н}} = \dfrac{1\text{ см}}{h_x}$. h_x=0,4 см. Довжина ребра кубика a =7,4 см.

Густина кубика $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{a^3} \approx$2,2 г/см^3.

Коли кубик занурений повністю, виштовхувальна сила діє на весь кубик:

$\rho_p gV = mg - F(8)$=8,74 Н – 3,93 Н = 4,81 Н. Тоді $\rho_p = \dfrac{mg - F(8)}{ga^3} \approx$1,2 г/см^3.