

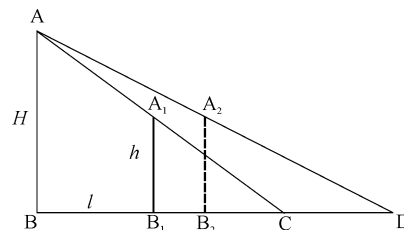
Світлові явища

229. На якій висоті висить лампа, якщо тінь від вертикально поставленої палиці заввишки 1 м має довжину 2 м, а якщо палицю перемістити на 1 м від лампи вздовж напрямку тіні, то її довжина стане 3 м? (2011 р. III е. 8 к.)

Розв'язок З подібності трикутників ABC і A₁B₁C:

$$\frac{H}{h} = \frac{l+2}{2} \quad (1). \quad \text{З подібності трикутників ABD і A}_2\text{B}_2\text{D: } \frac{H}{h} = \frac{(l+1)+3}{3} \quad (2). \quad \text{З}$$

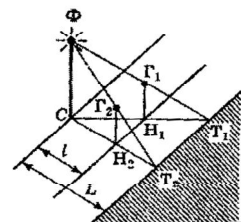
рівностей (1) і (2) $l=2$ м. Тоді з рівності (1) $H=2$ м.



230. Людина, зріст якої h йде по тротуару з постійною швидкістю v . На відстані l від краю тротуару стоїть стовп висотою H , зверху якого горить ліхтар. З якою швидкістю рухається по тротуару тінь голови людини? (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Відмітимо, що трикутник ΦCT_1 і $\Gamma_1 H_1 T_1$ («ліхтар-основа ліхтарного стовпа-тінь голови» і «голова-ноги-тінь голови») завжди подібні. Голову людини і її тінь умовно вважаємо точками. Виходячи з цього легко бачити, що тінь голови рухається по прямій, паралельній краю тротуару і знаходиться на відстані L від стовпа. Це означає, що відстань $T_1 T_2$ завжди в $\frac{L}{l}$ раз більша відстані $H_1 H_2$. Отже, швидкість u тіні голови



людини в ці ж $\frac{L}{l}$ разів більша швидкості самої людини v : $u = \frac{L}{l}v$. Із подібності трикутників ΦCT та ΓHT

знаходимо: $\frac{L}{H} = \frac{L-l}{h}$. Звідси $\frac{L}{l} = \frac{H}{H-h}$. Таким чином, швидкість тіні голови людини не залежить від відстані

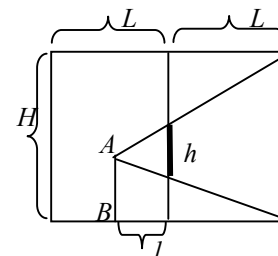
$$l. \quad u = \frac{vH}{H-h}.$$

231. В кімнаті довжиною L і висотою H висить на стіні плоске дзеркало. Людина дивиться в нього, знаходячись на відстані l від тієї стіни, на якій воно висить. Якою має бути найменша висота дзеркала, щоб людина могла бачити стінку, яка знаходиться за її спиною, на всю висоту? (2002 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Зобразимо на малюнку положення дзеркала на стіні так, щоб людина AB могла бачити в дзеркалі всю стінку, яка знаходиться за її спиною. З подібності трикутників

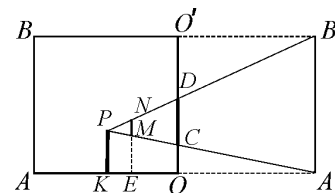
$$\frac{H}{h} = \frac{L+l}{l}. \quad \text{Тоді } h = \frac{Hl}{L+l}.$$



232. В центрі кімнати у формі куба стороною 4 м стоїть людина і бачить одним оком в дзеркалі, яке висить на одній з стін зображення протилежної стіни. Яких найменших розмірів непрозорий квадрат повинна розмістити людина перед собою на відстані 30 см від ока, щоб зображення стіни не бачити? (2014 р. III е. 8 к.)

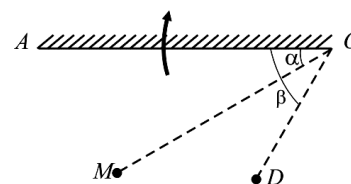
Розв'язок

Розглянемо малюнок, на якому зображено визначення висоти (Оскільки це куб, то ширина буде така ж як і висота). $A'B'$ – це зображення стіни AB в дзеркалі. CD – мінімальна висота дзеркала для людини KP, що стоїть посередині куба, щоб бачити всю протилежну стіну. Тоді MN – мінімальна висота непрозорого квадрата, який закрий зображення стіни. З подібності трикутників $\frac{A'B'}{MN} = \frac{KA'}{KE}$.



$A'B'=4$ м, $KA'=4$ м+2 м=6 м, $KE=0,3$ м. Тоді $MN=0,2$ м. Отже, щоб не бачити протилежну стіну потрібен квадрат стороною 20 см.

233. Дзеркальні двері АО можуть обертатися навколо осі, яка перпендикулярна до площини малюнка і проходить через точку О. Хлопці Микола (М) і Дмитро (D) стоять перед дверима, як показано на малюнку, причому $\angle AOM=\alpha=30^\circ$. $\angle AOD=\beta=60^\circ$. На який кут в напрямі, вказаному стрілкою, потрібно повернути двері, щоб Микола перестав бачити в них зображення Дмитра? (2015 р. III е. 8 к.)



Розв'язок

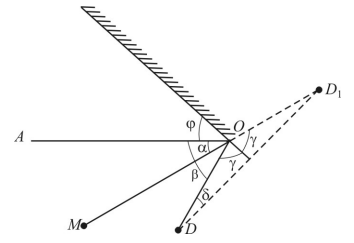
Математичний. Побудова зображення Дмитра в повернутому дзеркалі представлена на малюнку. Видно, що граничний кут повороту дзеркала, при якому Микола ще бачить зображення Дмитра, відповідає випадку, коли точки М, О і D₁ лежать на одній прямій. Використовуючи позначення для кутів, наведених на малюнку, маємо

наступні рівності: $\varphi + \beta + \gamma = 180^\circ$ (1), $2\gamma + 2\delta = 180^\circ$ (2), $2\gamma + \beta - \alpha = 180^\circ$ (3). З рівностей (2), (3) одержимо: $2\delta = \beta - \alpha = 30^\circ$; $\delta = 15^\circ$. Тоді $\gamma = 90^\circ - \delta = 75^\circ$. З рівності (1) $\varphi = 180^\circ - \beta - \gamma = 45^\circ$.

Аналітичний. Кут між Миколою і перпендикуляром до дзеркала $90^\circ - \alpha = 60^\circ$.

Оскільки кут падіння дорівнює куту відбивання, то після повороту дзеркала перпендикуляр до нього в точці О буде бісектрисою кута MOD. Отже тепер кут

між Миколою і перпендикуляром до дзеркала становитиме $\frac{\beta - \alpha}{2} = 15^\circ$. Тоді перпендикуляр, а значить і дзеркало повернули на кут 45° .

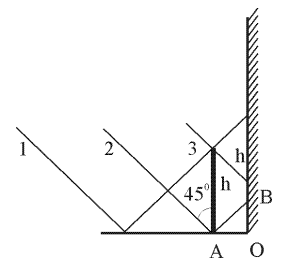
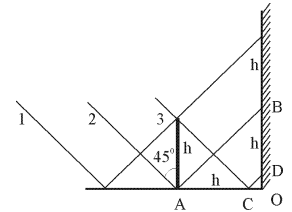


234. Сонячні промені падають на горизонтально розміщене плоске дзеркало під кутом $\alpha = 45^\circ$. На дзеркалі розташований вертикальний непрозорий предмет висотою h . Визначити висоту тіні від предмета на вертикально розміщеному екрані, якщо відстань від предмета до екрана l . (2010 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Частина тіні на екрані утворюється за рахунок відбитих променів 1 і 2, на шляху яких знаходиться предмет. Оскільки падаючі промені 1 і 2 паралельні, то і відбиті від дзеркала теж паралельні. Площина екрана паралельна предмету, отже висота цієї частини тіні становить h .

Друга частина тіні утворюється за рахунок тіні від предмета на дзеркалі, яка утворюється променями 2 і 3. $AC = h$, оскільки кут падіння 45° . Якщо $l > h$, то аналогічно відбиті промені паралельні, а оскільки кути падіння і відбивання 45° , то $AO = BO = l$, $CO = OD = l - h$, отже $AC = BD = h$. Якщо $l = h$, точки С і D співпадають з точкою О. Отже, для $l \geq h$ довжина тіні буде $2h$. Якщо ж $l < h$ (другий малюнок), $AO = BO = l$ і довжина тіні на екрані буде $l + h$.

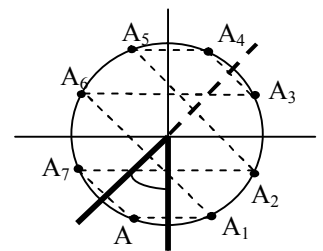


235. Два плоскі дзеркала розміщені під кутом 45° одне до одного. Людина знаходиться між дзеркалами на однаковій відстані від кожного з них. Скільки своїх зображень бачить людина у дзеркалах? (2002 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

Зрозуміло, що зображення, зображення зображення і т.д. знаходяться на колі.

Якщо $\frac{360}{\alpha} = N_0$ – ціле число, то кількість зображень $N = \frac{360}{\alpha} - 1$. Для $\alpha = 45^\circ$, $N = 7$.

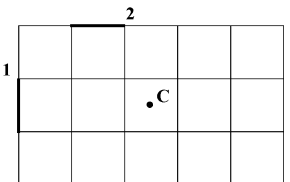


236. В архіві Снеліуса знайшли малюнок, на якому зображено два дзеркала, які розміщені під кутом 80° одне до одного і точкове джерело світла. З часом малюнок «вицвів» і на ньому не видно ходу світлових променів. Відновіть малюнок і визначте, скільки зображень давала така система. (2002 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Кількість зображень залежить від кута між площинами дзеркал. Так, при 180° – одне зображення, при 90° – три зображення. Якщо кут між дзеркалами α , кількість зображень визначається із співвідношення $n = \frac{360}{\alpha} - 1$, де n – ціле число, і у нашому випадку утвориться 3 зображення.

237. На двох стінах тренажерного залу висять два однакових плоских дзеркала (вид зверху). В центрі залу стоїть спортсмен. Побудувати всі його зображення в дзеркалах. Яку максимальну кількість своїх зображень він буде бачити? Яку максимальну кількість зображень спортсмена одночасно може бачити сторонній спостерігач, який знаходиться в залі? Зобразіть план залу і покажіть на ньому області, з яких можна бачити зображення спортсмена. (2016 р. III е. 8 к.)



Розв'язок

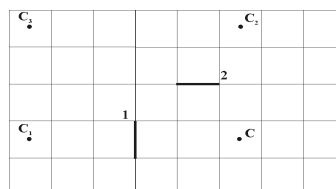
Побудуємо зображення спортсмена в дзеркалах. Предмет і зображення в дзеркалі рівновіддалені від площини дзеркала і лежать на перпендикулярі до дзеркала. Будуємо зображення C_1 і C_2 . Зображення C_3 – це зображення зображення C_1 в дзеркалі 2, або зображення зображення C_2 в дзеркалі 1. Вони співпадають, тому зображень буде 3 (мал.1).

На малюнку 2 показано область залу, з якої видно зображення C_1 в дзеркалі 1;

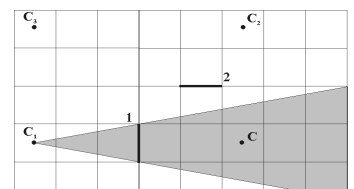
На малюнку 3 показано область залу, з якої видно зображення C_2 в дзеркалі 2;

На малюнку 4 показано області залу, з яких видно зображення C_3 .

Як бачимо, спортсмен може бачити лише одне своє зображення.

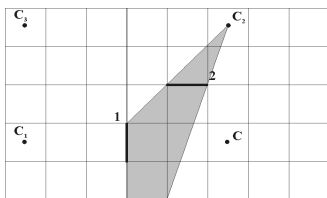


Мал.1

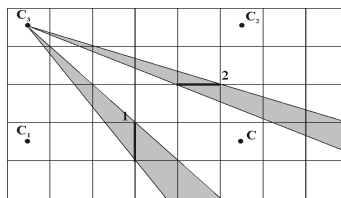


Мал.2

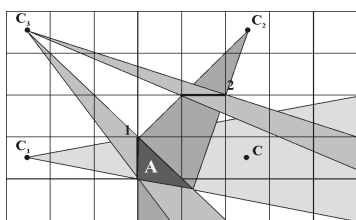
Всі три зображення буде видно з тієї області зала, де перекриваються всі три області. Це область, позначена буквою А на малюнку 5.



Мал.3



Мал.4

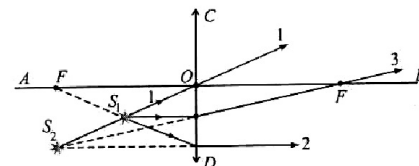
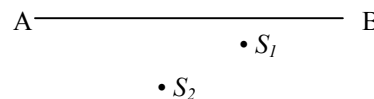


Мал.5

238. На рисунку зображено положення оптичної осі АВ лінзи, джерела світла S_1 і його зображення S_2 . Знайдіть побудовою положення центра лінзи та її фокусів. (2005 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

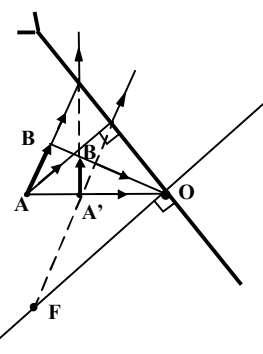
Проведемо промінь 1 через S_2S_1 . Він перетне АВ в оптичному центрі лінзи О. Проведемо лінію лінзи CD як перпендикуляр до АВ. Проведемо промінь 3 з джерела світла паралельно АВ до лінзи. Після лінзи промінь заломлюватиметься так, що його продовження пройде через S_2 . Його перетин з АВ є фокусом лінзи (точка F). Отже, лінза збірна. Проведемо промінь 2 з джерела світла так, щоб він за лінзою йшов паралельно АВ, а його продовження через S_2 , тоді його перетин з АВ дасть положення іншого фокуса.



239. Відоме положення предмета АВ і його зменшеного зображення А'В' (мал. 2). Визначити побудовою положення лінзи, її оптичного центру, фокуса і головної оптичної осі. (2003 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Процес визначення положення лінзи, оптичного центра та фокуса зображено на малюнку. Оскільки зображене пряме і зменшене, то лінза розсіювальна. Перетин променів AA' і BB' дасть положення оптичного центра лінзи. Промінь, який проходить через точки АВ після заломлення в лінзі піде таким чином, що його продовження пройде через точки А'В', тому перетин променів АВ і А'В' дасть ще одну точку лінзи. Побудувавши лінзу, проводимо перпендикуляр в точці О. Це буде головна оптична вісь. Проводимо з точки А промінь, паралельний головній оптичній осі, продовження якого після заломлення в лінзі перетне головну оптичну вісь у фокусі F.

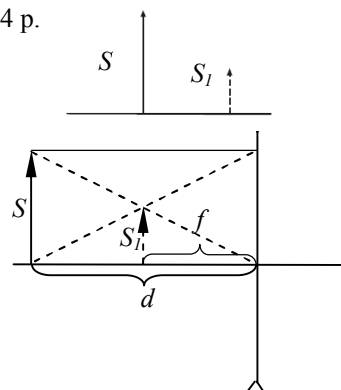


240. На малюнку зображено предмет S і його зображення у лінзі S_1 . Висота предмета у 2 рази більша за висоту зображення, а відстань між предметом і зображенням 5 см. За цими даними побудуйте лінзу і визначте її оптичну силу. (2004 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки зображення зменшене, уявне, то лінза розсіювальна. Згідно умови $d = f = 5$, а з подібності трикутників $\frac{d}{f} = 2$. Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$f = 5 \text{ см}, d = 10 \text{ см}. \text{ Тоді } D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -10 \text{ дптр}.$$



241. Відстань між предметом і зображенням, одержаним за допомогою лінзи, дорівнює 25 см. Визначити оптичну силу лінзи, якщо зображення пряме і збільшене у 2 рази. (2005 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки зображення пряме і збільшене, то лінза збірна. Предмет розміщений між лінзою і фокусом, а зображення уявне.

Згідно умови $f=2d$; $f-d=0,25$. Тоді $d=0,25$ м, $f=0,5$ м. З формули лінзи $D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}$, $D = \frac{f-d}{df} = 2$ дптр.

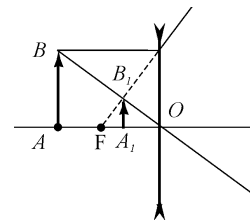
242. Предмет висотою 4 см розміщений на відстані 50 см від лінзи, фокусна відстань якої $F = -30$ см. Яка висота зображення цього предмета? Зробити схематичну побудову. (2012 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки $F = -30$ см, то лінза розсіювальна, зображення уявне. З подібності трикутників OAB і OA_1B_1 : $\frac{H}{h} = \frac{OA}{OA_1}$, де $d = OA$, $F = OF$, $H = AB$. З формули лінзи

$$-\frac{1}{F} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{d} \quad \text{знаходимо} \quad f - \frac{1}{0,3} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{0,5}, \quad f = 0,1875 \text{ м} = 18,75 \text{ см.}$$

$$\text{Тоді } \frac{4}{h} = \frac{50}{18,75}, \quad h = 1,5 \text{ см.}$$

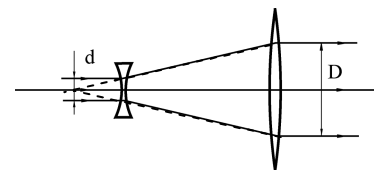
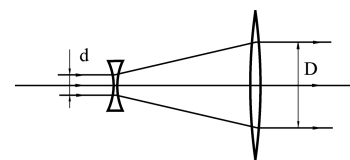


243. Оптична система складається з двох співвісних лінз, одна з яких – розсіювальна з фокусною відстанню F_1 , а інша – збірна з фокусною відстанню F_2 . Паралельний пучок світла, який падає уздовж оптичної осі на розсіювальну лінзу, залишається паралельним і після виходу з системи. Знайти відстань між лінзами і відношення діаметрів пучків світла на вході і виході з системи. (2008 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

На збірну лінзу падає розбіжний пучок світла, який іде ніби з уявного фокуса розсіювальної лінзи (тому що на розсіювальну лінзу падав пучок, паралельний головній оптичній осі). Разом з тим, щоб пучок був паралельним після виходу зі збірної лінзи він повинен вийти з її фокуса. Отже фокуси лінз співпадають. Тому, відстань між лінзами $l = F_2 - F_1$. З

подібності трикутників $\frac{D}{d} = \frac{F_2}{F_1}$.



244. Збірну тонку лінзу з фокусною відстанню F освітлюють точковим джерелом, розташованим на оптичній осі на відстані $d = 2F$ від лінзи. За лінзою у фокальній площині розташований екран. Визначити площу світлої плями на екрані. Лінзу вважати кругом радіуса R . (2009 р. III етап. 8 клас)

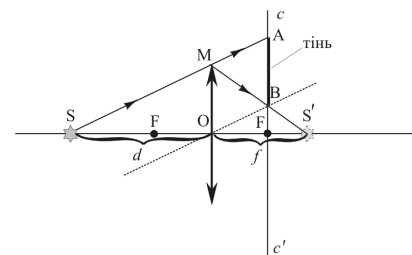
Розв'язок

З малюнка бачимо, що світла пляма радіусом BF визначається ходом променів крізь збірну лінзу. Лінза створює дійсне зображення джерела S' за екраном на відстані f від лінзи, яка знаходиться за формулою $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, отже $f = \frac{dF}{d-F}$. З подібності трикутників $S'BF$ і $S'MO$:

$$\frac{BF}{MO} = \frac{S'F}{S'O}.$$

Отже радіус світлої плями $BF = \frac{R(f-F)}{f}$, а її площа

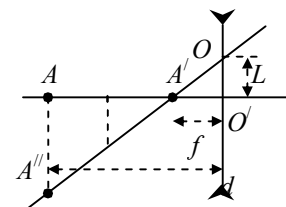
$$S = \frac{\pi R^2}{f^2} (f-F)^2. \quad \text{Оскільки } d=2F, \text{ то } f=2F \text{ і площа світлої плями } S = \frac{\pi R^2}{4}.$$



245. Точкове джерело світла знаходиться на головній оптичній осі на відстані $d = 60$ см від розсіювальної лінзи з фокусною відстанню $F = -15$ см. Лінзу змістили вгору на $L = 2$ см в площині, перпендикулярній головній оптичній осі. На скільки і куди потрібно змістити джерело світла, щоб його зображення повернулося в попереднє положення? (2012 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки лінзу зміщують в площині, перпендикулярній головній оптичній осі лінзи, то відстань від точки A (попереднє зображення джерела) до площини лінзи зберігається. Щоб зображення A' залишилося в попередньому положенні, потрібно щоб оптичний центр лінзи O , зображення



джерела A' і нове положення джерела A'' лежали на одній прямій. На малюнку це пряма OA'' . Отже, джерело треба змістити вниз на відстань AA'' .

За формулою лінзи знайдемо відстань f від зображення джерела до лінзи:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}, \quad f = \frac{dF}{d+F}. \quad \text{З подібності трикутників } AA'A'' \text{ і } A'OO': \quad \frac{AA''}{L} = \frac{d-f}{f}. \quad \text{Тоді шукана відстань:}$$

$$AA'' = L \left(\frac{d}{f} - 1 \right) = \frac{Ld}{F} = 8 \text{ см.}$$

246. Два промені симетрично перетинають головну оптичну вісь збірної лінзи на відстані 7,5 см від лінзи так, що кут між променями 90° . Визначити кут між цими променями після проходження ними лінзи, якщо фокусна відстань лінзи 10 см. (2013 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Побудуємо хід одного з променів після заломлення в лінзі. Зображенням точки S буде точка S' . Кут $OS'A$ буде половиною шуканого кута β . З малюнка видно, що він дорівнює куту BAC . $AB=F=10$ см. $\angle OSA = \angle FOC = 45^\circ$. Отже, $OA=BF=7,5$ см, а $FC=10$ см. Тоді $BC=2,5$ см. З трикутника CAB

$$\operatorname{tg} CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{2,5}{10} = 0,25. \quad \text{Тоді } \beta = 2 \operatorname{arctg} 0,25.$$

