Газові закони

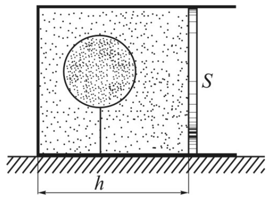
(тут в деяких задачах молярну масу позначають M, а в деяких – μ)

117. Оцінити мінімальний радіус планети, яка може утримувати атмосферу, що складається з гелію. Середня густина планети 4 г/см^3, температура атмосфери 300 К. Атмосферу вважати однорідною. (2004 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Середня кінетична енергія руху молекул $E = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Ця енергія не повинна перевищувати її потенціальної енергії у гравітаційному полі: $\dfrac{m\upsilon^2}{2} \le G\dfrac{Mm}{r}$ або $\dfrac{\upsilon^2}{2} \le \dfrac{GM}{r}$ (1), де r – радіус планети. Враховуючи, що $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{3}{2}kT$, одержимо: $\upsilon^2 = \dfrac{3kT}{m}$. Оскільки маса молекули $m = \dfrac{\mu}{N_A}$, де μ – молярна маса, одержимо $\upsilon^2 = \dfrac{3kN_AT}{\mu} = \dfrac{3RT}{\mu}$. Враховуючи, що маса планети $M = \rho V = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$, рівняння (1) прийме вигляд: $\dfrac{3RT}{2\mu} \le \dfrac{G\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r}$. Звідси $r = \sqrt{\dfrac{9}{8}\dfrac{RT}{G\pi\rho\mu}} = 9\cdot10^5$ м.

118. Горизонтально розташована циліндрична посудина з теплопровідними стінками заповнена аргоном, густина якого ρ=1,7 кг/м^3 знаходиться в кімнаті. Посудина закрита рухомим поршнем площею S=400 см^2. Відстань від лівого краю циліндра до поршня h=50 см. У посудині до дна на нитці прикріплена заповнена гелієм куля об'ємом $V_к$=1000 см^3, зроблена з тонкого нерозтяжного і теплопровідного матеріалу. Маса кулі з гелієм m=1,2 г. Після того як в кімнаті повітря прогрілося, поршень перемістився вправо на відстань Δh=3 см. Визначити силу натягу нитки після переміщення поршня. (2014 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

Об'єм аргону в першому випадку $V_a = Sh - V_к$, в другому $V_{a1} = S(h+\Delta h) - V_к$. На кулю з гелієм діють три сили: сила тяжіння, сила натягу нитки і архімедова сила. Куля і в першому і в другому випадку знаходиться в рівновазі під дією цих сил: $mg = \rho gV_к + T$. Для другого випадку: $T_1 = \rho_1 gV_к - mg$ (1), де ρ_1 – густина аргону після переміщення поршня. $\rho_1 = \dfrac{m_a}{V_{a1}} = \dfrac{m_a}{S(h+\Delta h) - V_к}$. Маса аргону не змінилася і, оскільки куля зроблена з нерозтяжного матеріалу, то її об'єм теж не змінився. Масу аргону можна знайти з початкових умов: $m_a = \rho\cdot V_a = \rho\cdot(Sh - V_к)$. Тоді $\rho_1 = \dfrac{\rho\cdot(Sh-V_к)}{S(h+\Delta h)-V_к}$. $\rho_1 \approx 1{,}6$ кг/м^3. Після підстановки в (1) T_1 =4 мН.

119. Повітряна куля має постійний об'єм V=1,1 м^3. Маса оболонки кулі m_0 = 0,187 кг. Куля повинна стартувати за температури навколишнього середовища t_1 = 20 ^{0}C і нормального атмосферного тиску p_0 = 1,013·10^5 Па. Розрахуйте мінімальну температуру t_2, до якої слід нагріти повітря всередині кулі, щоб вона почала підніматися. $M_п$=29·10^{-3} кг/моль. (2006 р. з. 10 к.)

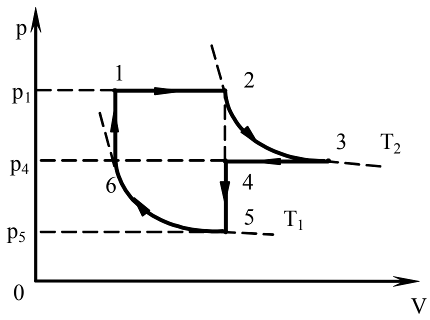
Розв'язок

Куля підніматиметься за умови: $\rho gV = m_0 g + m_п g$ (1). Масу повітря $m_п$ визначимо з рівняння стану газу: $p_0 V = \dfrac{m_п}{M_п}RT_2$; $m_п = \dfrac{p_0 VM_п}{RT_2}$ (2). Знайдемо густину оточуючого повітря: $p_0 V = \dfrac{m_п}{M_п}RT_1$, звідки $\rho = \dfrac{m_п}{V} = \dfrac{p_0 M_п}{RT_1}$ (3). Підставимо (3) та (2) в (1) і розрахуємо температуру повітря в кулі: $T_2 = \dfrac{p_0 M_п VT_1}{p_0 M_п V - m_0 RT_1} = 341\text{ K} = 68\ ^0\text{C}$.

120. Планету масою M і радіусом r оточує атмосфера постійної густини, яка складається з ідеального газу молярною масою μ. Визначте температуру T атмосфери біля поверхні планети, якщо товщина атмосфери h набагато менша за радіус планети. (2002 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

З рівняння стану газу: $T = \dfrac{pV\mu}{mR}$. Якщо $\rho = \dfrac{m}{V}$ – густина газу, то $T = \dfrac{p\mu}{R\rho}$ (1). Визначимо тиск газу за умови, що сила тиску атмосфери на поверхню планети $pS = p \cdot 4\pi r^2$ дорівнює силі тяжіння атмосфери. Тобто $p \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot h \cdot g$ (тут враховано, що $h \ll r$). Звідси $p = \rho g h$ (2). Прискорення вільного падіння на планеті $g = G\dfrac{M}{r^2}$ (3). Підставивши (3) в (2), а потім в (1) отримаємо: $T = \dfrac{\mu h G M}{R r^2}$.



121. У вузькій циліндричній трубці, закритій з одного кінця, знаходиться повітря, відокремлене від зовнішнього повітря стовпчиком ртуті довжиною 2 см. Коли трубка повернута вгору закритим кінцем, довжина стовпчика повітря 39 см, а коли повернута вгору відкритим – 37 см. Визначити атмосферний тиск. $\rho_{рт}$=13600 кг/м^3 (2012 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

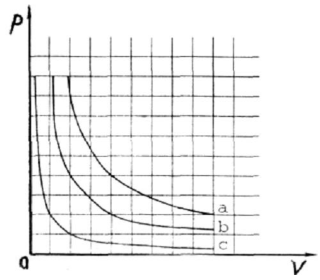
Коли трубка повернута закритим кінцем вгору, то атмосферний тиск, який діє на стовпчик ртуті знизу, дорівнює сумі тиску повітря в трубці і гідростатичному тиску стовпчика ртуті висотою l: $p_a = p_1 + \rho \cdot g \cdot l \Rightarrow p_1 = p_a - \rho \cdot g \cdot l$. Коли трубка повернута закритим кінцем вниз, то тиск повітря в трубці дорівнює сумі атмосферного тиску і гідростатичному тиску стовпчика ртуті висотою l: $p_2 = p_a + \rho \cdot g \cdot l$. При повертанні трубки, температура повітря в трубці залишається незмінною: $T = const$. Застосуємо закон Бойля-Маріотта для двох станів повітря у трубці. $p_1 V_1 = p_2 V_2$, де $V_1 = l_1 \cdot S$, $V_2 = l_2 \cdot S$, а S – поперечний переріз трубки. $(p_a - \rho \cdot g \cdot l) \cdot l_1 \cdot S = (p_a + \rho \cdot g \cdot l) \cdot l_2 \cdot S$; $p_a \cdot l_1 - \rho \cdot g \cdot l \cdot l_1 = p_a \cdot l_2 + \rho \cdot g \cdot l \cdot l_2$;

$$p_a(l_1 - l_2) = \rho \cdot g \cdot l \cdot (l_1 + l_2) \Rightarrow p_a = \frac{\rho \cdot g \cdot l \cdot (l_1 + l_2)}{l_1 - l_2},$$

$$p_a = \frac{13600 \cdot 10 \cdot 0{,}02 \cdot (0{,}39 + 0{,}37)}{0{,}39 - 0{,}37} = 103360 \text{ Па}.$$

122. У чотирьох посудинах містяться гази: азот (N_2), водень (H_2), гелій (He) та метан (CH_4). Лаборант отримав завдання вияснити в якій посудині який газ знаходиться. Для цього він брав однакові маси газу, по черзі поміщав їх під поршень теплопровідного циліндра, до якого приєднаний чутливий манометр. Опустивши циліндр у окріп, він почав повільно переміщувати поршень, знімаючи покази манометра залежно від положення поршня. Свої результати він відобразив на графіку залежності $p=f(V)$ для трьох газів. З яким із газів лаборант не проводив дослід? (2007 р. ІІІ е. 10 к.)

1 **H** Водень 1,008	2 **He** Гелій 4,00	6 **C** Вуглець 12,011	7 **N** Азот 14,007



Розв'язок

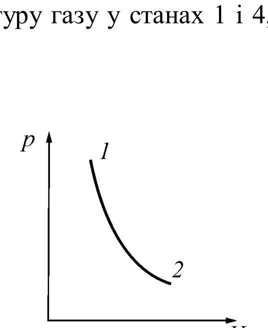
Зафіксуємо на графіку деякий об'єм (наприклад, який відповідає другій клітинці). Для сталого об'єму і маси рівняння Менделєєва-Клапейрона можна записати: $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{M_2}{M_1}$. Співвідношення між тисками з графіка:

$\dfrac{p_a}{p_b} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{p_a}{p_c} = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{p_b}{p_c} = \dfrac{1}{4}$. Враховуючи значення молярних мас, одержимо: $\dfrac{p_{H_2}}{p_{He}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{p_{H_2}}{p_{CH_4}} = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{p_{He}}{p_{CH_4}} = \dfrac{1}{4}$.

Порівнюючи експериментальні і теоретичні результати можна констатувати, що ділянка *a* відповідає водню, *b* – гелію, *c* – метану. З азотом дослід не проводився.

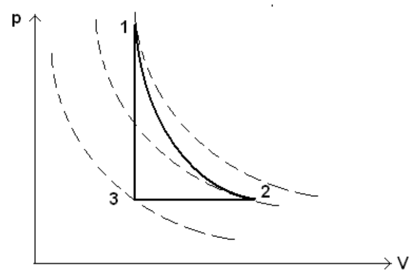
123. Між двома ізотермами одного моля одноатомного ідеального газу, зображеного на графіку залежності $p=f(V)$ кривими T_1 і T_2, здійснено замкнутий цикл 1-2-3-4-5-6-1. Визначити температуру газу у станах 1 і 4, якщо відомо, що на графіку ці точки лежать на одній ізотермі. (2004 р. з. 10 к.)

Розглянемо стани 1 і 6 та 2 і 4: $\dfrac{p_1 V_1}{T_x} = \dfrac{p_6 V_6}{T_6}$, звідки $\dfrac{p_1}{T_x} = \dfrac{p_6}{T_1}$. $\dfrac{p_2 V_2}{T_2} = \dfrac{p_4 V_4}{T_x}$, звідки $\dfrac{p_2}{T_2} = \dfrac{p_4}{T_x}$. Враховуючи, що $p_1 = p_2$, $p_6 = p_4$, одержимо: $T_x = \sqrt{T_1 T_2}$.



124. Порція гелію в бере участь в циклічному процесі. Спочатку (1-2) адіабатно розширюється за законом $pV^{\frac{5}{3}} = const$. При цьому температура газу змінюється від T_1 до T_2, потім стискується ізобарно до початкового об'єму і, нарешті, нагрівається ізохорно до початкового тиску. Знайти найменше значення температури в цьому циклі. (2014 р. III е. 11 к.)

Розв'язок



Намалюємо цей процес повністю. (2-3) – ізобара, (3-1) – ізохора. Через точки 1,2,3 проведемо ізотерми. Очевидно, що ізотерма, яка проходить через точку 3 має найменшу температуру. Запишемо рівняння для кожної ділянки.

1-2: $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}}$ (1).

2-3: $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}$ Оскільки V_3=V_1, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$ (2).

3-1: $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_1}{T_1}$ (3). Оскільки p_3=p_2, то $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_3}{T_1}$. Підставивши цей вираз в рівняння (1), отримаємо: $T_3 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}}$. Якщо в останній вираз підставити рівняння (2), то воно набуде вигляду: $T_3 = T_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{5}{3}}$. Або $T_3^{\frac{2}{3}} = \frac{T_2^{\frac{5}{3}}}{T_1}$. Остаточно $T_3 = \sqrt[3]{\frac{T_2^{\frac{10}{3}}}{T_1^2}}$.

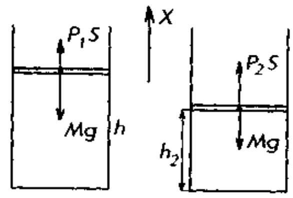
125. Компресор засмоктує з атмосфери щосекунди 3 л повітря, яке подається в балон місткістю 45 л. Через скільки часу тиск у балоні перевищуватиме атмосферний у 9 разів? Початковий тиск у балоні дорівнює атмосферному. (2008 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Нехай в балоні була маса повітря m_0. Із рівняння Менделєєва Клапейрона $m_0 = \frac{p_0 V_0 M}{RT}$ (1) , де p_0 – атмосферний тиск, V_0 – об'єм балона. Маса повітря, яку засмоктує компресор протягом 1 секунди $m_1 = \frac{p_0 V M}{RT}$ (2), де V – об'єм компресора. Для N секунд можна записати: $m_0 + Nm_1 = m$ (3), де $m = \frac{pV_0 M}{RT}$ (4), p – тиск в балоні Оскільки температура стала, то підставивши в (3) рівняння (1), (2), (4), отримаємо: $p_0V_0 + Np_0V = pV_0$. Звідси $N = \frac{V_0}{V}\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{V_0}{V}\left(\frac{p}{p_0} - 1\right)$. Підставивши значення, отримаємо N=120 с.

126. У вертикальному циліндрі під поршнем масою M, що може ковзати без тертя перебуває газ. Відстань від поршня до дна циліндра h. Якою буде відстань від поршня до дна циліндра, якщо циліндр рухатиметься вертикально вгору з прискоренням a, а температура газу залишиться незмінною? (2006 р. з. 11 к.)

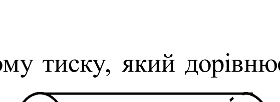
Розв'язок



Початковий стан – поршень у рівновазі: $p_1S = Mg$ (1). Застосуємо для поршня II закон Ньютона: Ma=p_2S–Mg, звідки $p_2S = M(a+g)$ (2). Для ізотермічного процесу p_1hS=p_2h_2S (3). Підставимо (1) і (2) в (3):

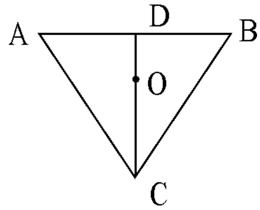
$Mgh = M(a+g)h_2$, звідки $h_2 = \frac{a}{a+g}h$.

127. В герметичній посудині знаходиться повітря при 0 ^{0}С і нормальному атмосферному тиску, який дорівнює зовнішньому. На стінці посудини є клапан у формі правильного трикутника зі стороною a=2 см, який може відкриватися назовні, обертаючись навколо нерухомої осі АВ. Клапан утримується в закритому положенні пружиною жорсткістю k=60 Н/м, яка прикріплена до точки С і розтягнута на величину Δx=3 см. Вісь пружини перпендикулярна до площини клапана. На скільки градусів потрібно нагріти повітря в посудині, щоб клапан відкрився? (2010 р. III е. 10 к.)



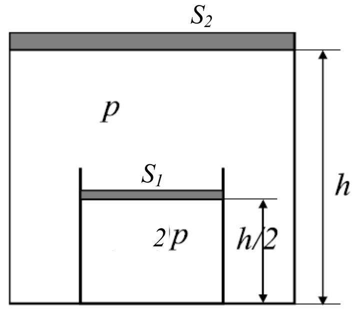
Розв'язок

Нехай в момент перед відкриттям клапана тиск в посудині p_1 і температура T_1. В початковому стані $p_0=10^5$ Па, $T_0=273$ К. Тоді, оскільки процес ізохорний, то $\frac{p_0}{T_0}=\frac{p_1}{T_1}$, звідси $p_1=\frac{p_0 T_1}{T_0}$. В момент відкриття клапана на нього діє сила тиску $(p_1-p_0)\cdot S_0$ з боку газу і сила пружності $k\Delta x$ з боку пружини Запишемо правило моментів відносно осі AB клапана. Плече сили пружності l_1=CD. Плече сили тиску $l_2=\mathrm{OD}=\frac{1}{3}\mathrm{CD}=\frac{1}{3}l_1$, оскільки трикутник правильний, а точка O – центр цього трикутника. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $(p_1-p_0)\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{3}l_1=k\Delta x\cdot l_1$. $\left(p_0\frac{T_1}{T_0}-p_0\right)\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{3}}=k\Delta x$.



$p_0\left(\frac{T_1-T_0}{T_0}\right)=\frac{k\Delta x\cdot 4\sqrt{3}}{a^2}$. Тоді $\Delta T=T_1-T_0=\frac{4\sqrt{3}\cdot k\Delta x\cdot T_0}{a^2\cdot p_0}$.

Після підстановки $\Delta T\approx 85$ К.



128. У вертикальній циліндричній посудині на висоті h утримують масивний поршень так, що тиск ідеального газу в посудині дорівнює атмосферному тиску p. Всередині розміщена ще одна посудина удвічі меншого радіусу, заповнена тим же газом під другим поршнем, який знаходиться в рівновазі на висоті $h/2$. При цьому тиск усередині малої посудини $2p$. Великий поршень відпускають. На яких висотах розташуються поршні в рівновазі? Маси обох поршнів однакові. Обидві посудини виготовлені з матеріалу, що добре проводить тепло, температура навколишнього середовища стала. (2013 р. III е. 11 к.)

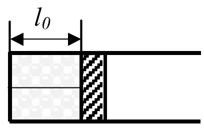
Розв'язок

Оскільки радіус верхнього поршня вдвічі більший за радіус нижнього, то площа верхнього $S_2=4S_1$. Умова рівноваги нижнього поршня в початковому положенні $(2p-p)\cdot S_1=mg$, в кінцевому положенні $(p_2-p_3)\cdot S_1=mg$, де p_2 – тиск під нижнім поршнем, p_3 – тиск під верхнім поршнем. Умова рівноваги верхнього поршня $(p_3-p)\cdot 4S_1=mg$. З цих рівнянь: $p=p_2-p_3$; $p_2-p_3=4p_3-4p$. Тоді $p=4p_3-4p$. Звідси $p_3=\frac{5}{4}p$.

$p_2=p+p_3$. Тоді $p_2=\frac{9}{4}p$. Закон Бойля-Маріотта для нижнього циліндра: $2pS_1\frac{h}{2}=p_2S_1h_1$, $ph=\frac{9}{4}ph_1$. Звідси $h_1=\frac{4}{9}h$, де h_1 – висота, на якій розташується нижній поршень.

Закон Бойля-Маріотта для верхнього циліндра: $p\left(4S_1h-S_1\frac{h}{2}\right)=p_3\left(4S_1h_2-S_1h_1\right)$, де h_2 – висота, на якій розташується верхній поршень.

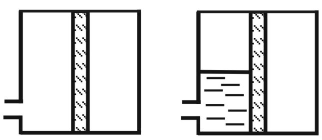
$\frac{7}{2}ph=\frac{5}{4}p\left(4h_2-h_1\right)$; $\frac{7}{2}h=5h_2-\frac{5}{9}h$; $h_2=\frac{73}{90}h$.



129. У довгому циліндрі на відстані l_0 від основи закріплено ниткою поршень, який без тертя може ковзати в циліндрі. Під поршнем знаходиться газ під тиском $p>p_a$. На якій відстані від основи після перепалювання нитки швидкість руху поршня буде найбільшою? Процес розширення повітря вважати ізотермічним, опором повітря при русі поршня знехтувати. (2002 р. II е. 10 к.)

Розв'язок

Максимальна швидкість буде тоді, коли тиск під поршнем зрівняється з атмосферним p_a (далі рух сповільнюється). Згідно закону Бойля-Маріотта $pl_0S=p_alS$. Звідси $l=\frac{pl_0}{p_a}$.



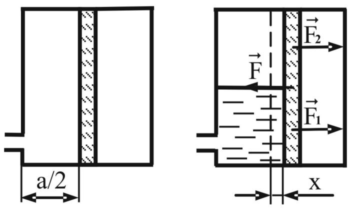
130. Кубічний резервуар із ребром a=1 м заповнений повітрям за нормального атмосферного тиску і поділений пополам тонким поршнем. Через кран ліву половину резервуару повільно заповнюють водою до рівня $a/2$. На яку відстань від початкового положення зміститься при цьому поршень? Тертям поршня об стінки резервуара і тиском водяної пари знехтувати. Резервуар знаходиться в ізотермічних умовах. (2003 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Коли поршень перемістився на відстань x, то об'єми частин резервуара, розділеного поршнем, стали рівними:

- правої: $V_n=\left(\frac{a}{2}-x\right)a^2$ (1);

- лівої: $V_л = \left(\frac{a}{2} + x\right)a^2$ (2).



Справа на поршень діє сила $F = p \cdot S$, де $S = a^2$. Закон Бойля-Маріотта для правої частини: $p_0 \frac{V}{2} = pV_п$ (3), де $V=a^3$ – об'єм резервуара. Підставимо в (3) вираз (1). $p = \frac{p_0 a}{a - 2x}$. Тоді $F = pa^2 = \frac{p_0 a^3}{a - 2x}$. Зліва на поршень діє тиск води $p_1 = \rho g \frac{a}{4}$. Тоді сила тиску з боку води $F_1 = p_1 \frac{a^2}{2}$, або $F_1 = \frac{\rho g a^3}{8}$. Тиск повітря у верхній частині p_2. Закон Бойля-Маріотта для лівої частини: $p_0 \frac{V}{2} = p_2 \left(\frac{a}{2} + x\right)\frac{a^2}{2}$. Сила тиску $F_2 = p_2 \frac{a^2}{2} = p_0 \frac{a^3}{a + 2x}$. Умова рівноваги: $F = F_1 + F_2$.

$$\frac{p_0 a^3}{a - 2x} = \frac{\rho g a^3}{8} + \frac{p_0 a^3}{a + 2x}; \quad p_0 \frac{4x}{a^2 - 4x^2} = \frac{\rho g}{8}; \; 32 p_0 x = \rho g a^2 - 4\rho g x^2.$$

Розв'язавши квадратне рівняння: $x = \sqrt{\frac{16 p_0^2}{\rho^2 g^2} + \frac{a^2}{4}} - \frac{4 p_0}{\rho g}$.

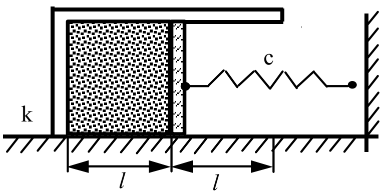
131. У циліндричній посудині поршень утримується пружиною, яка закріплена до правої основи. З лівої сторони від поршня у циліндрі знаходиться кисень. За температури T_1=300 К, відстань від лівої основи циліндра до поршня x_1=20 см, за T_2=500 К – відстань x_2=25 см. Яка довжина пружини у недеформованому стані? Довжина циліндра l=50 см. Силами тертя і товщиною поршня знехтувати. (2005 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Запишемо рівняння стану газу для двох випадків: $\frac{p_1 x_1 S}{T_1} = \frac{p_2 x_2 S}{T_2}$. Нехай a – це відстань від лівої сторони циліндра до поршня, коли пружина недеформована. Поршень в першому випадку зміститься на x_1-a, а в другому на x_2-a, тоді згідно закону Гука

$p_1S=k(x_1-a)$, $p_2S=k(x_2-a)$. $\frac{k(x_1 - a)x_1}{T_1} = \frac{k(x_2 - a)x_2}{T_2}$, $\frac{x_1^2}{T_1} - \frac{a x_1}{T_1} = \frac{x_2^2}{T_2} - \frac{a x_2}{T_2}$. Звідси $a = \frac{x_1^2 T_2 - x_2^2 T_1}{T_2 x_1 - T_1 x_2} = 5$ см. Довжина пружини $l – a$ = 45 см.

132. Циліндрична камера довжиною $2l$ з поршнем, площа перерізу якого рівна S, може рухатися вздовж горизонтальної площини з коефіцієнтом тертя k . Зліва від поршня, розміщеного по центру камери, знаходиться газ при температурі T_0 і тиску p_0. Між нерухомою стінкою і поршнем розміщена пружина з жорсткістю c. У скільки разів потрібно збільшити температуру газу зліва від поршня, щоб об'єм цього газу подвоївся, якщо тертям між камерою і поршнем знехтувати. Маса камери і поршня m. Зовнішній тиск p_0. (2003 р. III е. 11 к.)



Розв'язок

Необхідно розглянути два випадки:

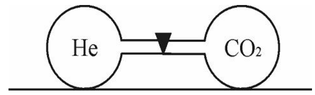
1. сила тертя більша за силу натягу пружини: $kmg \geq cl$. В такому разі сила тертя ніякої ролі не відіграє (бо камера не проскакує). Значить, коли тиск зліва зросте і стане рівним p, а поршень переміститься на відстань l, то $(p - p_0)S = cl$, або $\frac{p}{p_0} = \frac{cl}{p_0 S} + 1$. З рівняння стану газу $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$ отримаємо: $p \frac{2l \cdot S}{T} = p_0 \frac{l \cdot S}{T_0}$. Звідси $\frac{T}{T_0} = \frac{2p}{p_0} = 2\left(\frac{cl}{p_0 S} + 1\right)$.

2. камера нерухома до того моменту, поки сила тертя спокою не досягне максимального значення (ось-ось почнеться ковзання і в цьому випадку $kmg = cl$). Відшукаємо температуру T', що відповідає цьому моменту часу. Деформація пружини в цей момент рівна x, причому $(p - p_0)S = kmg$. Тоді $p = p_0 + \frac{kmg}{S}$, $x = \frac{kmg}{c}$. З рівняння стану газу отримаємо:

$$\frac{pS(l+x)}{T'}=\frac{p_0Sl}{T_0}\text{ або }\frac{\left(p_0+\dfrac{kmg}{S}\right)\left(l+\dfrac{kmg}{c}\right)S}{T'}=\frac{p_0Sl}{T_0}.\text{ Звідси }\frac{T'}{T_0}=\left(1+\frac{kmg}{p_0S}\right)\left(1+\frac{kmg}{cl}\right).$$ Після подальшого підвищення температури камера почне ковзати і об'єм під поршнем буде змінюватись вже при постійному тиску: $\frac{T}{T'}=\frac{V}{V'}$; $\frac{T}{T'}=\frac{2lS}{(l+x)S}=\frac{2l}{\left(l+\dfrac{kmg}{c}\right)}=\frac{2}{1+\dfrac{kmg}{cl}}$. Остаточно:

$$\frac{T}{T_0}=\frac{T}{T'}\cdot\frac{T'}{T_0}=\frac{2}{1+\dfrac{kmg}{cl}}\cdot\left(1+\frac{kmg}{p_0S}\right)\left(1+\frac{kmg}{cl}\right)=2\left(1+\frac{kmg}{p_0S}\right).$$

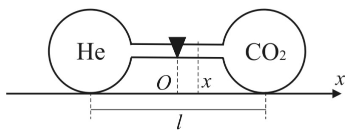
133. Дві сферичні посудини жорстко з'єднані тонкою трубкою з краном і лежать на гладенькій горизонтальній поверхні. В одній з них знаходиться гелій, в другій – вуглекислий газ. Кількість молів однакова, віддаль між точками дотику куль до поверхні l=24 см. На скільки і в якому напрямку змістяться посудини після того, як кран відкриють і гази остаточно змішаються. Масу посудин, трубки і крана, об'єм трубки не враховувати, тертям знехтувати. (2007 р. ІІІ е. 11 к.)



2 **He** Гелій 4,00	6 **C** Вуглець 12,011	8 **O** Кисень 15,999

Розв'язок

Виберемо вісь Оx і приймемо x=0 посередині між центрами посудин. Центр мас має координату x. Оскільки в горизонтальному напрямі на систему не діють зовнішні сили, то центр мас по горизонталі не буде зміщуватись. Після змішування газів центр мас буде посередині між центрами куль. Отже, система зміститься на відстань x в напрямку кулі з газом CO_2. Запишемо умову рівноваги: $m_1\left(\frac{l}{2}+x\right)=m_2\left(\frac{l}{2}-x\right)$,



де m_1 і m_2 маси газів . Звідси $x=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\cdot\frac{l}{2}$. Оскільки $m=\nu M$ і $\nu_1=\nu_2$, то $x=\frac{M_2-M_1}{M_2+M_1}\cdot\frac{l}{2}$. x=10 см.

134. Посередині теплоізольованої посудини об'ємом V = 2 м³ знаходиться перегородка. В одній половині посудини знаходиться 1 кг гелію, а у другій – 1 кг аргону, причому середні квадратичні швидкості руху атомів однакові
(υ = 500 м/с). Яким буде тиск суміші газів на стінки, якщо забрати перегородку? (2003 р. з. 11 к.)

Розв'язок

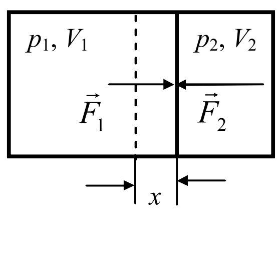
Оскільки внутрішня енергія ідеального газу визначається кінетичною енергією руху молекул газу: $U=N\cdot\frac{m_0\bar{\upsilon}^2}{2}$, а Nm_0 – маса всіх молекул, то внутрішні енергії гелію і аргону однакові: $U_1=U_2=\frac{m\bar{\upsilon}^2}{2}$. Повна внутрішня енергія газів $U=U_1+U_2=m\bar{\upsilon}^2$. Із закону збереження енергії для замкнутої системи $U=\frac{3}{2}\frac{m}{M_1}RT+\frac{3}{2}\frac{m}{M_2}RT=\frac{3}{2}mRT\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}$ одержимо значення температури газів після відкривання перегородки: $T=\frac{2M_1M_2}{3R(M_1+M_2)}\bar{\upsilon}^2$. Тоді тиск, що створює кожний газ окремо із рівняння Менделєєва-Клапейрона: $p_1=\frac{mRT}{M_1V}$; $p_2=\frac{mRT}{M_2V}$. Згідно закону Дальтона шуканий тиск:

$$p=p_1+p_2=\frac{mRT}{V}\cdot\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}=\frac{2m\bar{\upsilon}^2}{3V}\approx 8{,}33\cdot 10^4\text{ Па}.$$

135. У закритому з обох кінців циліндрі, заповненому ідеальним газом, знаходиться поршень маси m і площею S. В стані рівноваги поршень ділить циліндр на дві рівні частини, кожна об'ємом V_0. Тиск газу p_0. Поршень трошки змістили з положення рівноваги і відпустили. Знайти частоту коливань, вважаючи процес в газі ізотермічним, а коливання малими. Тертям нехтувати. (2008 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

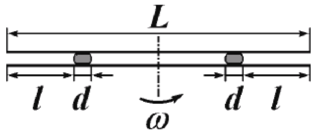
Оскільки процес ізотермічний, то $p_0V_0=p_1V_1=p_2V_2$. Нехай поршень змістили на відстань x , тоді $V_1=V_0+Sx$, $V_2=V_0-Sx$. $p_0V_0=p_1(V_0+Sx)$, звідки $p_1=p_0\frac{V_0}{V_0+Sx}$.



Аналогічно $p_2=p_0\frac{V_0}{V_0-Sx}$. На поршень діють сили $F_1=p_1S$ і $F_2=p_2S$. Нехай вісь, на яку будемо проектувати сили і прискорення напрямлена вліво. Згідно другого закону Ньютона $ma = F_2 - F_1$, $ma = p_2S - p_1S$, $ma = p_0V_0S\left(\frac{1}{V_0 - Sx} - \frac{1}{V_0 + Sx}\right)$,

$ma = p_0V_0S \cdot \frac{2Sx}{V_0^2 - S^2x^2}$, $a = \frac{2p_0V_0 \cdot S^2}{m\left(V_0^2 - S^2x^2\right)} \cdot x$. Оскільки зміщення x мале, то S^2x^2 нехтуємо. Одержимо $a = \frac{2p_0S^2}{mV_0} \cdot x$. Поршень змістили вправо, а прискорення напрямлене вліво. Як бачимо прискорення пропорційне зміщенню і має протилежний напрям. Оскільки для коливальних процесів аналогічно $a = -\omega^2 x$, то за цих умов коливання поршня будуть гармонічними з циклічною частотою $\omega = \sqrt{\frac{2p_0S^2}{mV_0}}$.

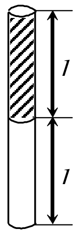
136. У горизонтально розташованій трубці завдовжки L = 26 см на відстані l = 6 см від відкритих кінців трубки знаходяться ртутні корки завдовжки d = 1 см. Трубку приводять в обертання навколо вертикальної осі, що проходить через її середину. При якій кутовій швидкості обертання ртутні корки досягнуть кінців трубки? Атмосферний тиск p_0 = 10^5 Па. Густина ртуті 13600 кг/м^3. Капілярні ефекти не враховувати. (2009 р. ІІІ е. 11 к.)



Розв'язок

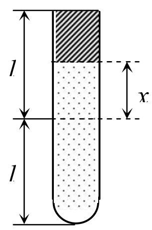
Нехай S – площа перерізу трубки. При зміщенні ртутних корків до кінців трубки об'єм повітря між ними зміниться від $V_0 = S\cdot(L - 2l - 2d)$ до $V_1 = S\cdot(L - 2d)$. Оскільки при обертанні трубки температура повітря не змінюється, тобто $p_1V_1 = p_0V_0$, то тиск повітря між корками змінюється від p_0 до $p_1 = p_0\frac{(L - 2l - 2d)}{L - 2d}$. Різниця сил тиску для кожного корка $\Delta F = \Delta p \cdot S = (p_0 - p_1)S = p_0S\frac{2l}{L - 2d}$ повинна відповідати силі, що спричинює доцентрове прискорення $F = ma = m\omega^2R$, де $m = \rho dS$ – маса корка, а $R = (L - d)/2$ – відстань від центра мас корка до осі обертання. Отже $\frac{p_0S2l}{L - 2d} = \frac{\rho dS\omega^2(L - d)}{2}$. Звідси $\omega = \sqrt{\frac{4lp_0}{\rho d(L - 2d)(L - d)}} \approx 54{,}7$рад/с.

137. У нижній половині вертикально розміщеної трубки знаходиться повітря, а у верхній – ртуть. Початкова температура повітря T_0=273 К. До якої мінімальної температури необхідно нагріти повітря у трубці, щоб воно витіснило всю ртуть? Атмосферний тиск нормальний, довжина трубки $2l$ = 152 см. (2004 р. з. 11 к.)

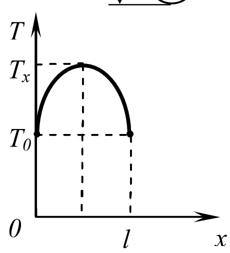


Розв'язок

У початковий момент об'єм повітря $V = lS$, тиск становить $p_0 + \rho gl$, температура T_0. Визначимо, за якої температури T повітря витіснить з трубки стовпчик ртуті довжиною x. Для цього запишемо рівняння газового стану і рівняння гідростатики: $\frac{(p_0 + \rho gl)lS}{T_0} = \frac{p(l + x)S}{T_x}$ (1), де $p = p_0 + \rho g(l - x)$. Атмосферний тиск нормальний (p_0 = 760 мм.рт.ст.) і довжина трубки теж l = 760 мм, отже $p_0 = \rho gl$. Після підстановки в (1) отримаємо



$\frac{2\rho gl^2}{T_0} = \frac{(2\rho gl - \rho gx)(l + x)}{T_x}$. Після спрощення $\frac{2l^2}{T_0} = \frac{2l^2 + xl - x^2}{T_x}$. Тоді $T_x = T_0\left(1 + \frac{x}{2l} - \frac{x^2}{2l^2}\right)$. Як бачимо, функція T=$f(x)$ не монотонна. На графіку T=$f(x)$ це парабола з вітками вниз, причому, коли x=l, то T=T_0. Тобто вершині параболи відповідає температура при $x = \frac{l}{2}$ (симетричність параболи). Отже, максимальна температура, до якої необхідно нагріти повітря у трубці $T = T_0\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{9}{8}T_0$.



Тому, прийшовши в рух, ртуть надалі продовжує рухатись з інертності.

Властивості пари, рідин і твердих тіл

138. Під поршнем у циліндрі, об'єм якого 30 л, знаходяться вода, повітря і насичена водяна пара за температури 373 К і тиску 2,5 атм. Визначити масу води в посудині, коли поршень повільно перемістили в положення, за якого тиск у циліндрі став 4 атм. Загальна маса води і пари 22 г. $p_{атм}=10^5$ Па. (2002 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Оскільки t = 100 ^{0}С, то тиск насиченої водяної пари $p_н$ = 10^5 Па = 1 атм і під час зменшення об'єму залишається незмінним. Початковий тиск повітря 1,5 атм. Під час стиснення тиск повітря збільшується до 3 атм, тобто вдвічі. За цих умов об'єм циліндра зменшиться вдвічі і становитиме V = 15 л. З рівняння Менделєєва-Клапейрона визначимо масу пари: $Vp_н = \dfrac{m_п RT}{M}$.

$m_п = \dfrac{p_н VM}{RT}$. Тоді $\qquad m_{води} = m_{заг} - m_{пари} \approx 13{,}3$ г.

(в задачі нехтуємо об'ємом води, яка знаходиться в посудині).

139. У закритому з обох боків горизонтальному циліндрі об'ємом 4 л вільно переміщується невагомий поршень. З одного боку поршня в циліндр вводять 4 г води, а з іншого – 2 г кисню. Де встановиться поршень, якщо температура в циліндрі 100 ^{0}С? Тиск насиченої водяної пари при 100 ^{0}С: $p=10^5$ Па. Молярна маса водяної пари $18\cdot10^{-3}$ кг/моль, кисню – $32\cdot10^{-3}$ кг/моль. (2002 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Припустимо, що вся вода випарувалась, і пара, що залишилась ненасичена. Тоді $p_1 = \dfrac{m_1 RT}{M_1 V_1}$ (1). Оскільки поршень в рівновазі, то тиск водяної пари і кисню повинен бути однаковим $p_1 = p_2$, де $p_2 = \dfrac{m_2 RT}{M_2 (V - V_1)}$.

Звідси знаходимо, що $V_1 = V\dfrac{m_1 M_2}{m_1 M_2 + m_2 M_1} \approx 3{,}1$ л. Підставляючи значення у формулу (1), знаходимо, що $p_1 \approx 2{,}2\cdot10^5$ Па і він більший за тиск насиченої пари при 100 ^{0}С. Це означає, що не вся вода випарувалася і пара в циліндрі буде насиченою, а її тиск $p_1=10^5$ Па. Отже й $p_2=10^5$ Па. Об'єм, який займає кисень за цього тиску $V_2 = \dfrac{m_2 RT}{M_2 p_2} \approx 1{,}93$ л. Нехтуючи об'ємом води, яка не випарувалась, робимо висновок, що поршень поділить циліндр у відношенні $\dfrac{2{,}07}{1{,}93}$.

140. У запаяній з одного кінця скляній трубці, яка лежить на горизонтальній поверхні, знаходиться повітря, відносна вологість якого 70%. Повітря в трубці відокремлене від атмосферного стовпчиком ртуті довжиною 10 см. Якою стане відносна вологість повітря, якщо трубку поставити запаяним кінцем догори? Ртуть з трубки не виливається, температура повітря незмінна, атмосферний тиск 760 мм рт.ст. (2001 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Поки пара ненасичена, вона поводить себе як ідеальний газ. Відносна вологість в першому випадку $\varphi = \dfrac{p_1}{p_н}\cdot 100\%$. Після перевертання трубки за ізотермічного розширення, тиск повітря і пари відповідно до закону Бойля-Маріотта зменшуються в $\dfrac{p_a}{p_a - \rho gh}$ разів. Тиск пари становитиме $p_2 = \dfrac{p_1(p_a - \rho gh)}{p_a}$.

Тоді $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{p_a - \rho gh}{p_a}$. Звідси φ_2=60%.

141. Кондиціонер пропускає через кімнату щосекунди 3 м^3 повітря. Повітря забирається з вулиці, де температура 30 ^{0}С і відносна вологість 80 %, потім охолоджується в кондиціонері до 5 ^{0}С, а в кімнаті нагрівається до 20 ^{0}С. Яка маса води щосекунди конденсується в кондиціонері? Яка відносна вологість повітря в приміщенні? Густина насиченої пари при 5 ^{0} С – 6,8 г/м^3, при 20 ^{0} С – 17,32 г/м^3, при 30 ^{0} С – 30,3 г/м^3. (2009 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Густина водяної пари на вулиці $\rho_1 = \dfrac{\varphi_1 \rho_0}{100\,\%}$, де ρ_0 – густина насиченої пари при температурі 30 ^{0}С. Тоді маса водяної пари $m_1 = \rho_1 V = \dfrac{\varphi_1 \rho_0}{100\,\%}V = 0{,}072$ кг.

Маса насиченої пари при температурі 5 ^{0}С становить $m_2 = \rho_2 V = 0{,}02$ кг, де ρ_2 – густина насиченої пари при температурі 5 ^{0}С. Отже в кондиціонері конденсується маса води $m = m_1 - m_2 = 0{,}052$ кг. Оскільки під час надходження повітря в кімнату додатково вода не випаровується, то густина водяної пари при температурі 20 ^{0}С дорівнює густині насиченої пари, яка надходить з кондиціонера при температурі 5 ^{0}С, тому відносна вологість $\varphi = \frac{\rho_2}{\rho_3} \cdot 100\ \% \approx 40\ \%$, де ρ_3 – густина насиченої пари при температурі 20 ^{0}С.

142. На яку висоту підніметься вода між паралельними скляними пластинками, розташованими на відстані 0,1 мм одна від одної? (2002 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Підняття води припиниться, якщо сила тяжіння і сила поверхневого натягу стануть рівними. Нехай ширина пластинки *a*, відстань між пластинками – *l* (*a*>>*l*). Тоді $F_{п.н.} = \sigma \cdot 2(a + l)$. $F_T = mg = \rho Vg$. $2\sigma(a + l) = \rho alhg$, звідки

$h = \frac{2\sigma}{\rho gl} + \frac{2\sigma}{\rho ga}$. Оскільки *a*>>*l*, то другим доданком останньої рівності можна знехтувати. Тоді $h = \frac{2\sigma}{\rho gl}$.

143. 64 краплинки ртуті, радіус яких r = 1 мм, зливаються в одну краплину. На скільки змінилася температура ртуті після злиття краплин? (2004 р. з. 10 к.)

Розв'язок

При злитті крапель V=64V_1. $\frac{4}{3}\pi R^3 = 64 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$; R=4r. Зміна поверхневої енергії $\Delta U = \sigma \Delta S$. Зміна внутрішньої енергії $Q = mc\Delta t$. $\Delta U = Q$. $\Delta t = \frac{\sigma \Delta S}{mc}$.

$$\Delta S = 64S_1 - S = 64 \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2 = 4\pi\left(64r^2 - 16r^2\right) = 4\pi \cdot 48r^2.$$

$$m = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (4r)^3. \qquad \Delta t = \frac{\sigma \cdot 4\pi \cdot 48r^2}{\rho \cdot c \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 64r^3} = \frac{9\sigma}{4\rho cr}.$$

144. Яку глибину водоймища можна виміряти за допомогою сталевого троса. Границя міцності сталі 500 МПа, густина сталі 7800 кг/м^3, густина води 1000 кг/м^3. (2002 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

$mg - F_в = \sigma_{міцн} S$, де $F_в$ – виштовхувальна сила, що діє на трос, S – площа його перерізу. $\rho_c Shg - \rho_в Shg = \sigma_{міцн} S$. Звідси $h = \frac{\sigma_{міцн}}{(\rho_c - \rho_{води})g}$. Після підстановки h≈7350 м.

145. Визначити відносне видовження мідного стержня, якщо під час його розтягування робота сил пружності становить 0,24 Дж. Довжина стержня 2 м, площа поперечного перерізу 2 мм^2, модуль Юнга $1{,}2 \cdot 10^{11}$ Па. (2005 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Згідно закону Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$, де $\sigma = \frac{F}{S}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, отже $F = \frac{SE\Delta l}{l_0}$. Записавши закон Гука у формі $F_{пр} = -k\Delta l$, бачимо, що $k = \frac{SE}{l_0}$. Оскільки робота $A = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{SE\Delta l^2}{2l_0}$, то $\Delta l = \sqrt{\frac{2Al_0}{SE}} = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тоді ε=10^{-3}.

146. Під час нагрівання твердого тіла його розміри збільшуються за законом $\Delta l = l_0 \alpha \Delta T$. Вантаж якої максимальної маси може підняти вертикально розміщений залізний стержень з площею поперечного перерізу 10 см^2 під час його нагрівання на 10 К? (2008 р. ІІІ е. 10 к.)

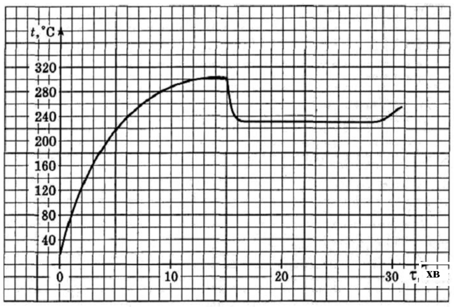
Розв'язок

Згідно закону Гука відносна деформація під час дії на стержень вантажу визначається із співвідношення: $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}$, де $\sigma == \frac{mg}{S}$. З іншого боку при нагріванні: $\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T$. Прирівнявши відносне видовження, отримаємо: $\frac{mg}{SE} = \alpha \Delta T$. Звідси $m = \frac{SE\alpha \Delta T}{g} = 0{,}24 \cdot 10^4$ кг.

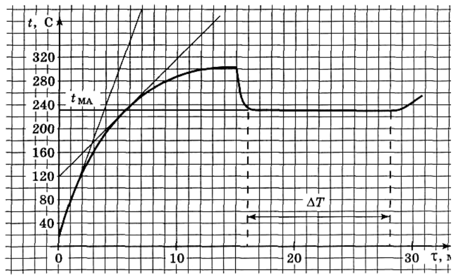
Основи термодинаміки

147. Мініатюрна пічка для плавлення металу має електронагрівач постійної потужності P=20 Вт. Нагрівач вмикають і, після того як його температура практично перестає збільшуватися, в піч вкидають декілька шматочків олова загальною масою 80 г. Олово починає плавитись. Графік залежності температури в печі від часу показано на малюнку. Визначте питому теплоту плавлення олова. (2006 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок



З графіка залежності температури від часу випливає, що 80 г олова плавились протягом 12 хв. Щоб знайти питому теплоту плавлення олова, необхідно визначити потужність, яка безпосередньо затрачувалась на плавлення. На початку процесу нагрівання пічки, коли її температура була близькою до температури навколишнього середовища, можна знехтувати тепловіддачею в навколишній простір і вважати, що повна потужність електронагрівача витрачалась на нагрівання пічки. Швидкість зростання температури визначена за нахилом дотичної на початковій ділянці графіка складала в цьому випадку ≈60К/хв. При температурі плавлення олова ($t_{пл}$=232°C) швидкість зростання температури була рівною ≈18 К/хв., тобто майже в 3 рази меншою. Це означає, що тепловіддача в навколишній простір при $t=t_{пл}$ складала близько 66% від повної потужності нагрівача, а 34% потужності йшло на нагрівання печі. Така ж частка потужності нагрівача затрачувалася на плавлення олова при $t=t_{пл.}$ З цих даних можна визначити питому теплоту плавлення олова: $\lambda = \dfrac{0{,}34P_0\Delta\tau}{m} = 61\dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}}$.



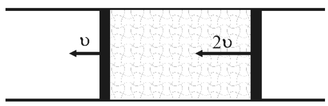
148. У циліндрі під поршнем площею S=300 см^2 знаходиться лід при температурі 0 ^{0}С. У поршні знаходиться нагрівник потужністю P=1 кВт. Після вмикання нагрівника поршень почав рівномірно опускатися. Визначте швидкість поршня під час плавлення льоду. Вважати, що виділена теплота рівномірно поглинається льодом. Густина води 1000 кг/м^3, густина льоду 900 кг/м^3, питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг. Втратами теплоти нехтувати. (2009 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Якщо нагрівач ввімкнений, то лід починає танути. При цьому його об'єм зменшується, що приводить до опускання поршня. Доки під поршнем є лід і вода, їх температура рівна 0 ^{0}С. Розглянемо проміжок часу t. За цей час нагрівач віддає для льоду кількість теплоти $Q = Pt$ (P – потужність нагрівача). Цієї кількості теплоти вистачає, щоб розтанула маса льоду $m = \dfrac{Pt}{\lambda}$. Це призведе до зменшення об'єму речовин під поршнем на $\Delta V = \dfrac{m}{\rho_2} - \dfrac{m}{\rho_1}$, де ρ_2 – густина льоду ρ_1 – густина води. Якщо об'єм речовин під поршнем зменшиться на ΔV, поршень опуститься на відстань $x = \dfrac{\Delta V}{S} = \dfrac{Pt\left(\dfrac{1}{\rho_2} - \dfrac{1}{\rho_1}\right)}{\lambda S}$. Швидкість поршня $\upsilon = \dfrac{x}{t}$, тому: $\upsilon = \dfrac{P}{\lambda S}\left(\dfrac{1}{\rho_2} - \dfrac{1}{\rho_1}\right)$.

Після підстановки υ=1,12·10^{-5} м/с.

149. У довгій трубці між двома масивними поршнями знаходиться 1 моль одноатомного ідеального газу при температурі T_0. У початковий момент перший поршень рухається з швидкістю υ, а другий – з швидкістю 2υ. Маса кожного поршня m. Визначити температуру газу в момент, коли його стиснення буде максимальним. Система теплоізольована, маса газу набагато менша маси поршнів, тертям і теплоємністю поршнів знехтувати. Поза поршнями вакуум. (2006 р. ІІІ е. 10 к.)



Мал. 3

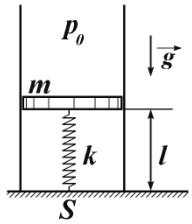
Розв'язок

Стиснення газу буде максимальним, коли швидкості поршнів однакові. Згідно закону збереження імпульсу ($m_{газу}$<<$m_{поршнів}$): $m\upsilon + 2m\upsilon = 2m\upsilon_1$, де υ_1 – швидкість, коли поршні найближче. $\upsilon_1 = \dfrac{3}{2}\upsilon$. Згідно закону збереження енергії: $W_{k_1} + W_{k_2} = W'_{k_1} + W'_{k_2} + Q$, де W_k – початкові кінетичні енергії, W'_k – кінетичні енергії під час максимального зближення. $Q=\Delta U$ – кількість

теплоти, яка дорівнює зміні внутрішньої енергії. Враховуючи, що $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}R(T - T_0)$, запишемо:
$\frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m(2\upsilon)^2}{2} = \frac{2m\upsilon_1^2}{2} + \frac{3}{2}R(T - T_0)$. Звідси $T = \frac{m\upsilon^2}{6R} + T_0$.

150. У вертикальному циліндрі з площею основи S під поршнем масою m знаходиться ν моль гелію. Поршень з'єднано з дном циліндра пружиною жорсткістю k і довжиною l, яка знаходиться в нерозтягнутому стані. Яку кількість теплоти необхідно підвести до газу, щоб його об'єм подвоївся? Атмосферний тиск p_0, прискорення вільного падіння g. (2009 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

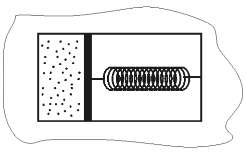


Позначимо: T_1 і T_2 – температури газу до і після підведення теплоти. Рівняння стану газу для двох випадків мають вигляд: $p_1 lS = \nu RT_1$, $p_2 \cdot 2lS = \nu RT_2$, де тиск газу $p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$, $p_2 = p_0 + \frac{mg}{S} + \frac{kl}{S}$. Тепло, отримане газом, піде на збільшення внутрішньої енергії газу, роботу газу проти сили атмосферного тиску, збільшення потенціальних енергій поршня в полі тяжіння і деформованої пружини: $Q = \Delta U + p_0 lS + mgl + \frac{1}{2}kl^2$. Оскільки гелій одноатомний газ, то зміна внутрішньої енергії газу $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(2p_2 - p_1)lS$.

$$\Delta U == \frac{3}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S} + \frac{2kl}{S}\right)lS.$$

Остаточно $$Q = \frac{3}{2}\left(p_0 lS + mgl + 2kl^2\right) + p_0 lS + mgl + \frac{1}{2}kl^2 = \frac{5}{2}p_0 lS + \frac{5}{2}mgl + \frac{7}{2}kl^2.$$

151. В розміщеному горизонтально циліндрі зліва від закріпленого поршня знаходиться ідеальний одноатомний газ, а в правій частині – вакуум. Циліндр теплоізольований від навколишнього середовища, а пружина, розміщена між поршнем і стінкою – недеформована. Поршень звільняють і після встановлення рівноваги, об'єм газу збільшується вдвічі. У скільки разів змінилися при цьому температура і тиск газу? Теплоємністю циліндра, поршня і пружини знехтувати. (2016 р. ІІІ е. 11 к.)



Розв'язок

За умовою задачі пружина спочатку недеформована. Коли поршень звільняють, то він під тиском газу рухається вправо і стискає пружину. Стиснута пружина штовхає поршень назад і таким чином виникнуть затухаючі коливання і поршень встановиться в положенні рівноваги.

В початковому положенні вся енергія системи складалась лише з внутрішньої енергії газу. В кінцевому стані енергія системи – це енергія газу і потенціальна енергія стиснутої пружини. Система теплоізольована, не виконувала роботи над зовнішніми тілами, тому можна стверджувати, що повна енергія системи не змінилась.

$U_1 = U_2 + \frac{kx^2}{2}$, або

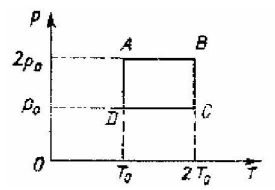
$\Delta U + \frac{kx^2}{2} = 0$ (1), де $\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$ (2).

В положенні рівноваги сила тиску газу на поршень зрівноважується силою пружності пружини. $p_2 S = kx$ (3).

Зміщення поршня можна пов'язати зі зміною об'єму газу: $V_2 - V_1 = Sx$. Тоді $x = \frac{V_2 - V_1}{S}$ (4).

Рівняння стану газу $p_2 V_2 = \nu RT_2$ (5). Рівняння (5) і (4) підставляємо в (3), а рівняння (2) і (4) в (1):

$\frac{\nu RT_2}{V_2} = k\frac{(V_2 - V_1)}{S^2}$ (6); $\frac{3\nu R(T_2 - T_1)}{2} = -k\frac{(V_2 - V_1)^2}{2S^2}$ (7). Поділимо (7) на (6):

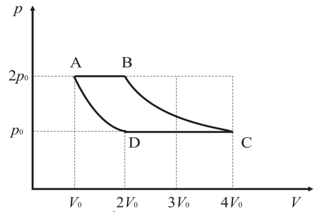


$\frac{3(T_2 - T_1)V_2}{T_2} = V_1 - V_2$, або $3 - 3\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} - 1$. Звідси $3\frac{T_1}{T_2} = 4 - \frac{V_1}{V_2}$. Оскільки $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ за умовою, то $\frac{T_1}{T_2} = \frac{7}{6}$. З рівняння Клапейрона для двох станів газу

$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ отримаємо: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}\frac{T_1}{T_2} = \frac{7}{3}$.

152. На pT діаграмі показано цикл теплової машини, робочим тілом якої є ідеальний газ. Визначити, на якій ділянці робота, виконана газом найбільша, а на якій – найменша? (2006 р. з. 11 к.)

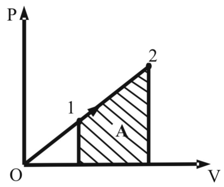
Розв'язок



Зобразимо цикл ABCDA у координатах pV. Нехай $V_A=V_0$. Тоді $V_B=2V_0$, $V_C=4V_0$, $V_D=2V_0$.
Робота, яку виконує газ на кожній ділянці циклу, чисельно рівна площі під відповідним графіком. Порівнюючи ці площі, отримаємо: $A_{BC} > A_{DC} = A_{AB} > A_{AD}$.

153. При нагріванні ідеального одноатомного газу його тиск прямо пропорційний об'єму. Знайдіть кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання 1 моля на 1 ^{0}С. (2003 р. III е. 10 к.)

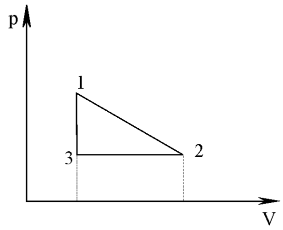
Розв'язок



$Q = \Delta U + A;$ $\Delta U = \frac{3}{2} R\Delta T$ (для 1 моля одноатомного газу). Зобразимо схематичний графік в координатах PV. З графіка $A = S = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1)$.
Враховуючи, що $P_1V_2=P_2V_1$, так як $P \sim V$ і згідно рівняння Менделєєва-Клапейрона $PV=RT$, отримаємо:

$$A = \frac{1}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{1}{2}(RT_2 - RT_1) = \frac{1}{2} R\Delta T.$$

$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} R\Delta T + \frac{1}{2} R\Delta T = 2R\Delta T$. При $\Delta T = 1^0$С, $Q=2R$.



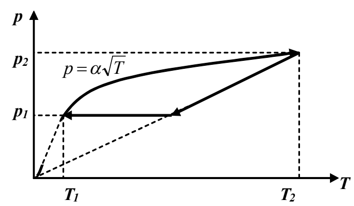
154. Над ідеальним одноатомним газом здійснюється замкнутий цикл 1 – 2 – 3 – 1. Відомо, що об'єм газу в стані 2 у три рази більший, ніж у стані 1. Визначити відношення роботи газу за цикл до кількості теплоти, підведеної до газу при ізохорному процесі. (2010 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Робота газу за цикл дорівнює площі, яка утворена трикутником 1 – 2 – 3.

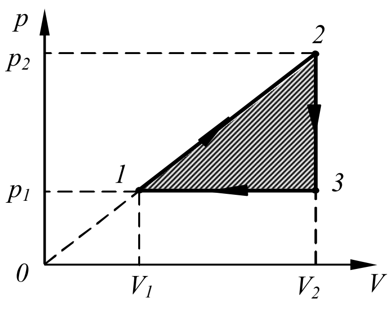
$A = \frac{1}{2}(P_1 - P_3)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(P_1 - P_3)2V_1 = (P_1 - P_3)V_1$. Кількість теплоти у процесі 3 – 1 дорівнює зміні внутрішньої енергії, оскільки робота у цьому процесі не виконується: $Q = \Delta U = \left(\frac{3}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu RT_3\right)$. $Q = \frac{3}{2} p_1V_1 - \frac{3}{2} p_3V_3 = \frac{3}{2}(p_1 - p_3)V_1$.

Тоді $\frac{A}{Q} = \frac{3}{2}$.

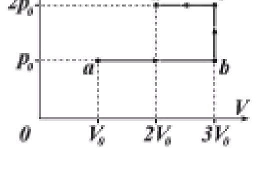


155. Над одним молем ідеального газу здійснюється замкнутий цикл, показаний на малюнку. Яку роботу виконав газ під час цього процесу? (p_1, p_2, T_1, T_2 вважати заданими) (2004 р. II е. 11 к.)

Розв'язок



На ділянці 1-2 тиск змінюється за законом $p = \alpha\sqrt{T}$, де α – деяка стала. Виразимо температуру газу через тиск: $T = \frac{p^2}{\alpha^2}$ і підставимо в рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV=RT$. Отримаємо, що $p = \frac{\alpha^2}{R} V$.
Залежність тиску від об'єму прямо пропорційна. Накреслимо графік в координатах pV. На ділянці 1-2 газ виконує додатню роботу. Процес 2-3 – ізохорний, під час цього процесу робота дорівнює нулю. В ізобарному процесі 3-1 робота виконувалась над газом, тобто газ виконував від'ємну роботу. Таким чином, повна робота газу рівна площі трикутника 123: $A = \frac{p_2 - p_1}{2}(V_2 - V_1)$. Оскільки $V_2 = \frac{RT_2}{p_2}$, $V_1 = \frac{RT_1}{p_1}$, то $A = \frac{p_2 - p_1}{2}\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right)R$.



156. З молем ідеального одноатомного газу відбувається процес a→b→c→d, показаний на графіку в координатах pV. Визначте підведену до газу за весь процес кількість теплоти, якщо різниця між максимальною і мінімальною температурою в процесі ΔT= 100 К. (2011 р. III е. 11 к.)

Розв'язок

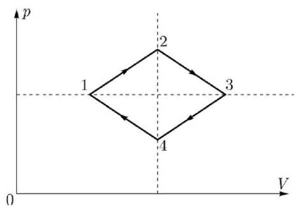
Перший закон термодинаміки: $Q = A + \Delta U$.

Робота, виконана газом $A = A_{ab} + A_{bc} + A_{cd}$

$A_{ab} = p\Delta V = p_0(3V_0 - V_0) = 2p_0V_0$. $A_{bc} = 0$. $A_{cd} = 2p_0(2V_0 - 3V_0) = -2p_0V_0$,

Отже $A = 0$. Зміна внутрішньої енергії газу $\Delta U = \frac{3}{2}R(T_d - T_a)$.

З рівняння стану ідеального газу $pV = \nu RT$ отримаємо: $T_d = \frac{4p_0V_0}{R}$, $T_a = \frac{p_0V_0}{R}$. $T_c = \frac{2p_0 \cdot 3V_0}{R}$. Максимальна (мінімальна) температура буде при максимальному (мінімальному) значенні добутку pV. З умови задачі $\Delta T = T_c - T_a = \frac{2p_0 \cdot 3V_0 - p_0V_0}{R} = \frac{5p_0V_0}{R}$. Отже $Q = \Delta U = \frac{3}{2}R(T_d - T_a) = \frac{9}{2}p_0V_0 = 0{,}9R\Delta T$. $Q \approx 748$ Дж.



157. Циклічний процес, який здійснюють над ідеальним газом, у координатах pV являє собою ромб. Вершини (1) і (3) лежать на одній ізобарі, а вершини (2) і (4) - на одній ізохорі. За один цикл газ виконав роботу A. Визначте різницю між кількістю теплоти Q_{12}, підведеною до газу на ділянці 1-2 і кількістю теплоти Q_{34}, відведеною від газу на ділянці 3-4. (2017 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

Позначимо тиск точок 1 і 3 через p_0, а об'єм точок 2 і 4 через V_0.

Нехай при переході з 1 в 2 тиск змінюється на Δp, а об'єм на ΔV. Такі ж самі зміни тиску і об'єму будуть і при переході з 3 в 4.

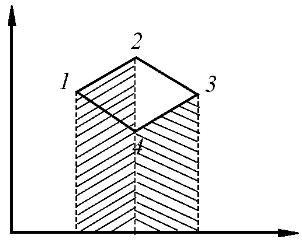
Кількість теплоти, яка підводиться до газу на ділянці 1-2: $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$.

Кількість теплоти, яка відводиться від газу на ділянці 3-4: $|Q_{34}| = \Delta U_{43} + A_{43}$.

Запишемо рівняння Менделєєва-Клапейрона для кожного стану газу.

1: $\nu RT_1 = p_0(V_0 - \Delta V)$; 2: $\nu RT_2 = (p_0 + \Delta p)V_0$;

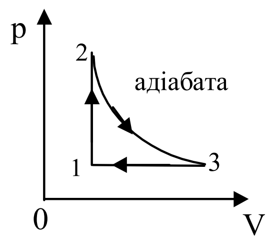
3: $\nu RT_3 = p_0(V_0 + \Delta V)$; 4: $\nu RT_4 = (p_0 - \Delta p)V_0$.



Віднімемо від (2) (1) і від (3) (4).

$\nu R(T_2 - T_1) = \Delta pV_0 + p_0\Delta V$; $\nu R(T_3 - T_4) = \Delta pV_0 + p_0\Delta V$. Як бачимо зміна температури $T_2 - T_1$ дорівнює зміні температури $T_3 - T_4$, отже однакові і зміни внутрішніх енергій ΔU_{12} і ΔU_{43}.

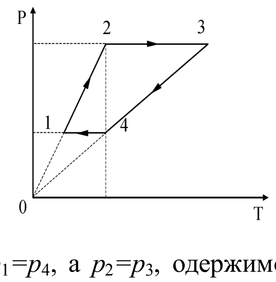
Робота A_{12} більша за роботу A_{43} на величину $\frac{A}{2}$ (половину площі ромба), отже і кількість теплоти Q_{12} більша за кількість теплоти Q_{34} на величину $\frac{A}{2}$.



158. Визначте ККД замкнутого циклу для трьох молів ідеального одноатомного газу, якщо відомо, що газ одержав 3 кДж тепла, а при адіабатному розширенні температура понизилася на 40 К. (2001 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Коефіцієнт корисної дії циклу $\eta = \frac{A}{Q_н}$, де A – робота системи, $Q_н$ – кількість теплоти, наданої системі. Кількість теплоти системі надавалась лише в процесі 1-2. $Q_н = Q_{12}$. Робота протягом циклу $A = A_{23} + A_{31}$, де A_{23} – робота системи при адіабатному процесі, A_{31} – робота над газом при ізобарному процесі. Оскільки при адіабатному процесі $Q_{зов.} = 0$, то $A_{23} + \Delta U = 0$. Тоді $A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_3)$. Оскільки $A_{31} = p(V_1 - V_3) = \nu R(T_1 - T_3)$, одержуємо: $A = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_3) + \nu R(T_1 - T_3)$. Враховуючи, що для процесу 1-2 $Q_{12} = \Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$, визначимо T_1 і підставимо в формулу для роботи. $T_1 = T_2 - \frac{2Q_{12}}{3\nu R}$. Тоді $A = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_3) - \frac{2}{3}Q_{12}$. За цих умов коефіцієнт корисної дії циклу $\eta = \frac{5}{2}\frac{\nu R\Delta T}{Q_{12}} - \frac{2}{3} = 16\%$.

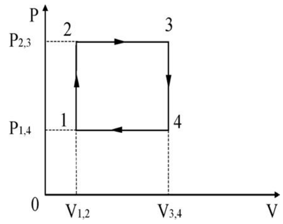


159. З 1 молем одноатомного ідеального газу здійснено процес, графік якого зображено на малюнку в координатах pT. Визначити ККД циклу, якщо мінімальна температура під час процесу 400 К, а максимальна – 900 К. (2006 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Максимальна температура відповідає точці T_3, мінімальна – T_1. Процеси 1-2 і 3-4 є ізохорними, тому $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ і $\frac{p_3}{p_4} = \frac{T_3}{T_4}$. Перемножимо рівняння і, враховуючи, що $p_1 = p_4$, а $p_2 = p_3$, одержимо:

$\frac{T_1}{T_2}=\frac{T_4}{T_3}$. Враховуючи, що $T_2=T_4$, одержимо: $T_4=T_2=\sqrt{T_1\cdot T_3}$. Для знаходження ККД, зобразимо процес у координатах pV. $\eta=\frac{A}{Q_н}$. Робота дорівнює площі прямокутника: $A=(p_2-p_1)(V_3-V_2)$; $A=p_2V_3-p_1V_3-p_2V_2+p_1V_2$. Оскільки $p_1=p_4$, $p_2=p_3$, $V_1=V_2$, $V_3=V_4$, то $A=p_3V_3-p_4V_4-p_2V_2+p_1V_1$. Враховуючи, що $pV=\nu RT$, ν=1 моль і $T_2=T_4$, одержимо: $A=R(T_3-2\sqrt{T_1T_3}+T_1)=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2$. Тепло надається системі на ділянках 1-2 і 2-3, тому $Q_н=A_{1-3}+\Delta U_{1-3}$. $A_{1-3}=A_{1-2}+A_{2-3}=p_2(V_3-V_2)$. $A_{1-3}=p_2V_3-p_2V_2=R(T_3-T_2)$.

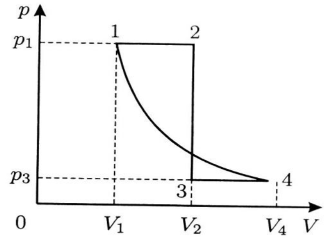


$\Delta U_{1-3}=\frac{3}{2}\nu R(T_3-T_1)=\frac{3}{2}R(T_3-T_1)$.

$Q_н=R(T_3-T_2)+\frac{3}{2}R(T_3-T_1)=R\left(\frac{5}{2}T_3-\frac{3}{2}T_1-\sqrt{T_3T_1}\right)$.

$$\eta=\frac{\left(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1}\right)^2}{\frac{5}{2}T_3-\frac{3}{2}T_1-\sqrt{T_3T_1}}\approx 10\%.$$

160. Теплова машина, робочим тілом якої є ідеальний одноатомний газ виконує роботу в циклі 1-2-3-4-1, який складається з двох ізобар, ізохори та адіабати. Знайти ККД теплової машини, яка працює за таким циклом, якщо, $p_1=3{,}17\cdot10^5$ Па, $p_3=0{,}51\cdot10^5$ Па, V_1=5 л, V_2=10 л, V_4=15 л. (2007 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

В даному процесі газ віддає кількість теплоти Q_1 на ділянці 2-3 і отримує кількість теплоти Q_2 та Q_3 на ділянках 1-2 і 3-4. На ділянці 4-1 над робочим тілом виконується робота без теплообміну з зовнішнім середовищем, тому Q_4=0. На ділянці 2-3 A=0, тому згідно I закону термодинаміки $Q_1=\Delta U_1=\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_3)$. Враховуючи рівняння Менделєєва-Клапейрона, отримаємо: $Q_1=\frac{3}{2}V_2(p_1-p_3)$. Для ізобарних процесів 1-2 і 3-4 запишемо I закон термодинаміки:

$Q_2=\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1)+p_1(V_2-V_1)$; $Q_3=\frac{3}{2}\nu R(T_4-T_3)+p_3(V_4-V_2)$.

Враховуючи рівняння Менделєєва-Клапейрона і те, що $p_1=p_2$, $p_3=p_4$, $V_2=V_3$, отримаємо: $\nu RT_2=p_1V_2$; $\nu RT_1=p_1V_1$; $\nu RT_4=p_3V_4$; $\nu RT_3=p_3V_2$. Тоді

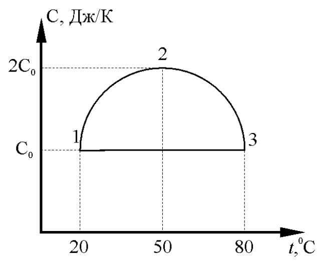
$Q_2+Q_3=\frac{3}{2}p_1(V_2-V_1)+p_1(V_2-V_1)+\frac{3}{2}p_3(V_4-V_2)+p_3(V_4-V_2)$.

$Q_2+Q_3=\frac{5}{2}p_1(V_2-V_1)+\frac{5}{2}p_3(V_4-V_2)$.

$$\eta=\frac{Q_2+Q_3-Q_1}{Q_2+Q_3}=1-\frac{Q_1}{Q_2+Q_3}=1-\frac{3V_2(p_1-p_3)}{5(p_1(V_2-V_1)+p_3(V_4-V_2))}.$$

$\eta\approx 0{,}133=13{,}3\%$.

161. Один моль ідеального одноатомного газу здійснює процес 1-2-3-1, відображений на малюнку, де C – теплоємність одного моля газу ($C_0=3R/2$, R=8,31 Дж/К). Визначити кількість теплоти, отриману від нагрівника і ККД за «цикл». (2015 р. III е. 11 к.)



Розв'язок

По аналогії до того, що формула роботи $A=p\Delta V$ і робота дорівнює площі фігури в координатах pV, можна вважати, що кількість теплоти, отримана газом від нагрівника чисельно рівна площі фігури в координатах Ct ($Q=C\Delta t$). Ця площа складається з півкола і прямокутника (тепло отримувалося в процесах 1-2-3) . Площа півкола $Q_1=\frac{\pi(2C_0-C_0)\cdot(t_2-t_1)}{2}$. Площа прямокутника $Q_2=C_0(t_3-t_1)$. Тоді $Q_{нагр.}=C_0\left(\frac{\pi\cdot(t_2-t_1)}{2}+(t_3-t_1)\right)$. Після підстановки $Q_{нагр.}$=8,31·1,5·(3,14·15+60)=1335 Дж.

На ділянці 3-1 тепло віддавалося. Кількість теплоти чисельно рівна площі прямокутника.

$Q_{холод.}=C_0(t_3-t_1)$=8,31·1,5·60=747,9 Дж.

Коефіцієнт корисної дії $\eta=\frac{Q_{нагр}-Q_{холод}}{Q_{нагр.}}\approx 0{,}44$. η=44%.