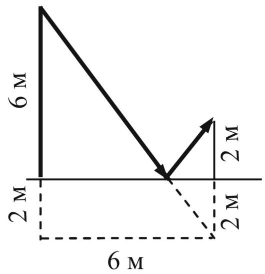
Механічний рух

1. Ворона сидить на дереві, висота якого 6 м. На дереві, що росте на відстані 6 м від першого, висить шматок сиру на висоті 2 м. Між деревами протікає річка. Яку мінімальну відстань необхідно пролетіти вороні до шматка сиру, попередньо змочивши дзьоб водою? (2002 р. з. 8 к.)

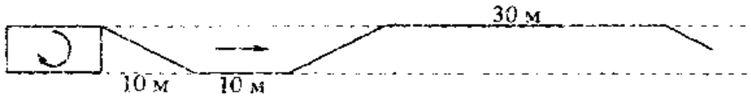


Розв'язок

Схема польоту ворони зображена на малюнку. Відстань, яку пролетить ворона $S=\sqrt{(6+2)^2+6^2}=\sqrt{64+36}=10$ м.

2. Пліт, що має форму прямокутника зі сторонами 5м×10 м, рухається вночі за течією річки зі швидкістю 1 м/с. По периметру плоту ходить людина з ліхтариком зі швидкістю 0,5 м/с. Намалюйте траєкторію руху ліхтарика відносно землі за 1 хвилину руху (вигляд зверху). Початкову точку руху виберіть самостійно. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок



3. Фігуристка, обертаючись навколо своєї осі, 20 разів повернулась лицем до свого партнера, який за цей час, що дорівнює 10 с, зробив 2 оберти навколо фігуристки. Скільки обертів за секунду робила фігуристка? (2002 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Якщо фігуристка обертається в ту ж сторону, що й фігурист, то вона робить 2,2 об/с, якщо в протилежну – 1,8 об/с.

4. Знайка живе в будинку на узбіччі дороги між зупинками А і В на відстані 800 м від А. У напрямку від А до В по дорозі щодня проїжджають автобус зі швидкістю 40 км/год і трамвай зі швидкістю 20 км/год. На зупинку В вони приїжджають одночасно в 8 годин ранку. Знайка ходить зі швидкістю 4,8 км/год, відстань між зупинками 2 км. Коли найпізніше повинен вийти з будинку Знайка і в якому напрямку, щоб встигнути на автобус? на трамвай? Час, який транспорт перебуває на зупинці, надзвичайно малий в порівнянні з часом знаходження Знайки в дорозі. (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

У Знайки є два варіанти: йти до зупинки *А* чи до зупинки *В*. Відповідно, він повинен вибрати той з них, який потребує меншого часу.

Нехай Знайка хоче встигнути на автобус. Якщо він піде на зупинку *В*, то повинен вийти за $\dfrac{2\text{ км}-0{,}8\text{ км}}{4{,}8\dfrac{\text{км}}{\text{год}}}=\dfrac{1}{4}\text{год}=15$ хв до 8 годин. Якщо він піде до зупинки *А* на автобус, то йому необхідно прийти туди не до 8, а на $\dfrac{2\text{ км}}{40\dfrac{\text{км}}{\text{год}}}=\dfrac{1}{20}\text{год}=3$ хв раніше. Тому йому треба вийти за $\dfrac{0{,}8\text{ км}}{4{,}8\dfrac{\text{км}}{\text{год}}}+\dfrac{1}{20}\text{год}=\dfrac{13}{60}\text{год}=13$ хв. до 8 годин. Отже, Знайці вигідно йти до зупинки *А*: в цьому випадку йому потрібно вийти з дому в 7,47.

Аналогічні роздуми для випадку, коли Знайка хоче встигнути на трамвай, приводять до наступного результату: якщо Знайка йде до зупинки *В*, то він повинен вийти за 15 хв до 8 годин, а якщо до *А* – за 16 хв до 8 годин. Тому Знайка повинен вийти в 7,45 і піти до зупинки *В*.

5. Три спортсмени одночасно починають велокрос і рухаються на дистанції рівномірно: перший зі швидкістю 10 м/с, другий – 9,8 м/с. Другий спортсмен на фініші відстав від першого на 10 с, зате виграв 5 с у третього. З якою швидкістю рухався третій спортсмен? (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Позначимо швидкості спортсменів відповідно υ_1, υ_2, υ_3.

Якщо час руху першого спортсмена t_1, то другого t_1+10, третього t_1+15. Тоді

$\upsilon_1 t_1=\upsilon_2(t_1+10)$, звідки $t_1=490$ с. Оскільки $\upsilon_1 t_1=\upsilon_3(t_1+15)$, то $\upsilon_3=9{,}7$ м/с.

6. Команді з двох осіб потрібно подолати відстань між пунктами А і В (20 км). Команда має один велосипед, на якому зі швидкістю 20 км/год може рухатись лише одна людина. Швидкість пішохода 6 км/год. За який мінімальний час і як команда прибуде в пункт В? Залік ведеться за останнім членом команди. (2003 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Час руху команди буде мінімальним за умови, що час руху обох спортсменів пішки однаковий $t_{11}=t_{12}=t_1$ і час руху на велосипеді однаковий $t_{21}=t_{22}=t_2$. Ці умови виконуються, якщо кожен спортсмен половину дороги йде пішки, а решту їде на велосипеді. Перший спортсмен стартує на велосипеді й на середині дистанції залишає велосипед, а далі йде пішки. Другий спортсмен робить все навпаки: $t = t_1 + t_2 = \dfrac{l}{2\upsilon_1} + \dfrac{l}{2\upsilon_2} = \dfrac{l}{2}\left(\dfrac{1}{\upsilon_1} + \dfrac{1}{\upsilon_2}\right) = 2$ год 10 хв.

7. Проїхавши третину довжини моста, велосипедист почув звук автомобіля. Якщо він поверне назад, то зустрінеться з автомобілем на початку мосту, а якщо продовжуватиме рух вперед – то у кінці мосту. Визначити у скільки разів швидкість руху автомобіля більша за швидкість руху велосипедиста. (2012 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

1) Якщо велосипедист поверне назад: $t_1 = t_2$. Позначимо довжину мосту – *l,*

Шлях пройдений автомобілем – *x*. Отже, $l_1 = x$,

$l_2 = \dfrac{1}{3}l$ – шлях, що пройде велосипедист. $\dfrac{x}{\upsilon_a} = \dfrac{l}{3\upsilon_в}$. Звідси $x = \dfrac{l \cdot \upsilon_a}{3\upsilon_в}$ (1).

2) Якщо велосипедист продовжуватиме рух вперед: $t_3 = t_4$.

$l_3 = x + l$ – шлях пройдений автомобілем, $l_4 = l - \dfrac{1}{3}l = \dfrac{2}{3}l$ – шлях пройдений велосипедистом. $\dfrac{x+l}{\upsilon_a} = \dfrac{2l}{3\upsilon_в}$.

Звідси $x = \dfrac{2l \cdot \upsilon_a}{3\upsilon_в} - l$ (2).

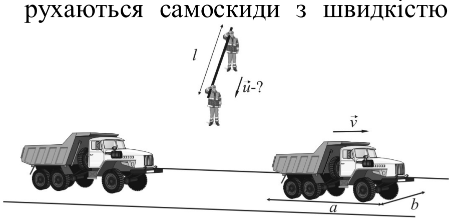
Підставимо рівняння (1) в рівняння (2) $\dfrac{l\upsilon_a}{3\upsilon_в} = \dfrac{2l\upsilon_a}{3\upsilon_в} - l$; $\dfrac{l\upsilon_a}{3\upsilon_в} = l$; $\dfrac{\upsilon_a}{\upsilon_в} = 3$.

8. Вовк і Заєць виїхали одночасно на велосипедах від своїх будинків назустріч один одному. Через 20 хв вони зустрілися і продовжили рух в тих же напрямках. Вовк доїхав до будинку Зайця і повернув назад, а Заєць доїхав до будинку Вовка і теж повернув у зворотному напрямку. Через який час від початку руху вони знову зустрінуться, якщо кожен з них проїхав весь шлях з однаковою швидкістю, але відмінною одна від одної? (2013 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай відстань між будинками Вовка і Зайця *S*. Тоді до моменту зустрічі Вовк подолає відстань $S_1 = \upsilon_B t_1$, а Заєць $S_2 = \upsilon_З t_1$. Оскільки зустріч була між будинками, то $S = S_1 + S_2 = \upsilon_B t_1 + \upsilon_З t_1 = (\upsilon_B + \upsilon_З)t_1$. Коли Вовк і Заєць роз'їхались і дісталися сусідського будинку, то вони подолали відстань *S*. Після розвороту до нової зустрічі вони втретє разом подолали відстань *S*. Тому з початку руху Вовк і Заєць разом подолали відстань 3*S*, на який затратили час, втричі більший першого: $t = 3t_1 = 3 \cdot 20$ хв $= 1$ год.

9. На будівництві проходить дорога, по якій з інтервалом t_0=11 с рухаються самоскиди з швидкістю υ=5 м/с. Двоє робітників несуть перпендикулярно до дороги трубу довжиною *l*=6,5 м і повинні перетнути з нею дорогу. З якою мінімальною швидкістю можуть рухатися робітники, щоб не перешкодити руху самоскидів? Довжина і ширина самоскида дорівнюють *a*=10 м і *b*=2,5 м відповідно. (2015 р. III е. 8 к.)



Розв'язок

За час t_0=11 с секунд самоскид встигає від'їхати на відстань *S*=υt=55 м. Довжина самоскида 10 метрів, отже, відстань між самоскидами S_1=45 м. А значить, просвіт на дорозі звільняється не 11 с, а $t_1 = \dfrac{S_1}{\upsilon} = 9$ секунд.

Робітники за цей час повинні пройти шлях *l*+*b*, який рівний сумі довжини труби і ширини самоскида: Отже швидкість робітників $u \geq \dfrac{l+b}{t_1}$=1 м/с.

10. Два літаки летять зустрічними курсами із швидкістю 200 м/с кожний. Із кулемета, розміщеного на борту першого літака, обстрілюють другий літак, причому вогонь ведеться перпендикулярно до напрямку польоту. На якій відстані один від одного повинні розміститись кульові отвори в борту другого літака, якщо кулемет робить 900 пострілів за 1 хв? (2005 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Літаки рухаються один відносно одного із швидкістю $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = 400\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Інтервал часу між двома пострілами: $t = \frac{1}{900}\text{хв} = \frac{1}{15}\text{с}$. Відстань між кульовими отворами повинна бути рівною відносному переміщенню другого літака за цей час: $S = \upsilon \cdot t = \frac{400}{15} \approx 27$ м.

11. Між містами Рівне і Житомир курсують маршрутні таксі, які рухаючись без зупинок з швидкістю 70 км/год, дотримуються встановленого графіка. В один з днів з Рівного до Житомира виїхала маршрутка і рухалася рівномірно із встановленою швидкістю. В зв'язку з реконструкцією дороги до Євро-2012 поблизу Новоград-Волинського вона змушена була зменшити швидкість до 50 км/год. Коли ця ділянка дороги закінчилася, до Житомира залишалось 40 км. Щоб не порушити графік, маршрутка збільшила швидкість до 80 км/год і прибула в Житомир точно по графіку. Визначити час руху маршрутки ділянкою дороги, де велись ремонтні роботи. (2010 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Розіб'ємо весь маршрут на три ділянки: перша – це рух з швидкістю 70 км/год, друга – ділянка, де велись ремонтні роботи, третя – ділянка довжиною 40 км. Третю ділянку маршрутка проїжджає за час $t_3 = \frac{40\ км}{80\ \frac{\text{км}}{\text{год}}} = 0{,}5$ год. Нехай час руху маршрутки другою ділянкою *t*. Тоді шлях, пройдений цією ділянкою 50*t* Час руху другою і третьою ділянками (*t*+0,5) год. Оскільки для руху згідно графіка швидкість повинна становити 70 км/год, то можна вважати, що другу і третю ділянки маршрутка рухалась саме з такою середньою швидкістю і затратила час $\frac{50t+40}{70}$. Отже,

$t + 0{,}5 = \frac{50t+40}{70}$. Звідси *t*=1/4 год=15 хв.

12. Школярі побували на екскурсії в м. Кузнецовськ і поверталися в м. Рівне на автобусах. Автобуси їхали з швидкістю υ_1=70 км/год. Пішов дощ, і водії знизили швидкість до υ_2=50 км/год. Коли дощ закінчився, автобуси знову поїхали з попередньою швидкістю і в'їхали у Рівне на 10 хвилин пізніше, ніж було заплановано. Скільки часу йшов дощ? (2011 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Запланований час $t = \frac{S}{\upsilon_1}$. Весь шлях $S = S_1 + S_2 + S_3$ (1).

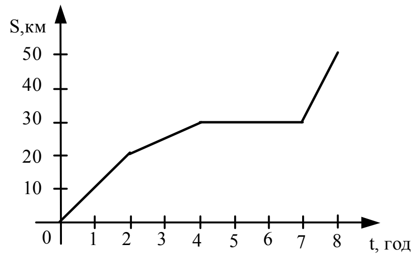
$t_1 = \frac{S_1}{\upsilon_1}$ (2), $t_2 = \frac{S_2}{\upsilon_2}$ (3), $t_3 = \frac{S_3}{\upsilon_1}$ (4).

$t = t_1 + t_2 + t_3 - \Delta t$, де t_1, t_2, t_3 – часи проходження кожної ділянки, Δt=10 хв, час запізнення.

$t_2 = \frac{S}{\upsilon_1} - \frac{S_1}{\upsilon_1} - \frac{S_3}{\upsilon_1} + \Delta t = \frac{S - S_1 - S_3}{\upsilon_1} + \Delta t = \frac{S_2}{\upsilon_1} + \Delta t$ (5), Прирівняємо (3) і (5): $\frac{S_2}{\upsilon_2} = \frac{S_2}{\upsilon_1} + \Delta t$, $S_2\left(\frac{1}{\upsilon_2} - \frac{1}{\upsilon_1}\right) = \Delta t$,

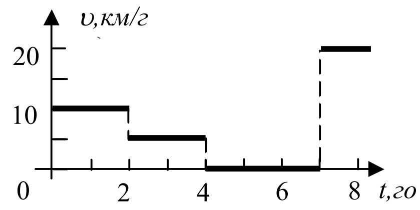
$S_2 = \Delta t \cdot \frac{\upsilon_2 \cdot \upsilon_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$. Тоді $t_2 = \frac{S_2}{\upsilon_2} = \Delta t \cdot \frac{\upsilon_2 \cdot \upsilon_1}{(\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot \upsilon_2} = \Delta t \cdot \frac{\upsilon_1}{(\upsilon_1 - \upsilon_2)}$=35 хв.

13. На малюнку подано графік залежності шляху від часу для прямолінійного нерівномірного руху. Користуючись графіком, побудуйте графік залежності швидкості від часу $\upsilon=\upsilon(t)$. (2002 р. ІІ е. 7 к.)



Розв'язок

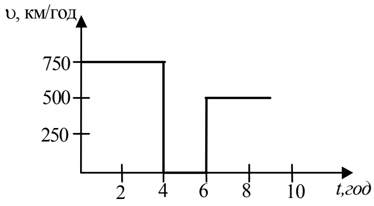
Залежність швидкості руху від часу виглядає так, як показано на малюнку.

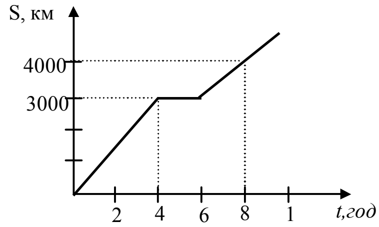


14. На малюнку подано графік залежності швидкості тіла від часу для прямолінійного нерівномірного руху. Користуючись графіком, побудувати графік залежності шляху від часу *S*=*S*(*t*). (2001 р. ІІ е. 7 к.)

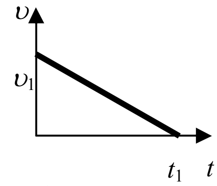
Розв'язок

Розв’язком задачі буде графік, зображений на малюнку.



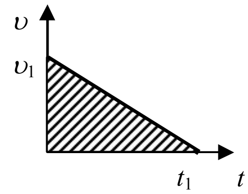


15. Перший автомобіль, гальмуючи, зменшує свою швидкість з часом так, як показано на графіку. За час t_1 він пройшов таку ж відстань, як і другий автомобіль, що рухається із постійною швидкістю 20 м/с. Визначте початкову швидкість першого автомобіля υ_1. (2004 р. II е. 7 к.)



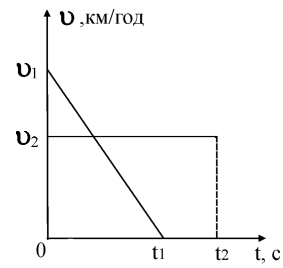
Розв’язок

Шлях, пройдений першим автомобілем за час t_1, чисельно дорівнює площі заштрихованого трикутни-ка: $S_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1 t_1$. Шлях, пройдений другим автомобілем $S_2 = \upsilon_2 t_1$. З умови $S_1 = S_2$, звідки $\upsilon_1 = 2\upsilon_2 = 40$ м/с.



16. Повз радарний пост на швидкості 216 км/год пронісся новенький „Мерседес”, не відреагувавши на вимогу зупинитися. Про порушення негайно передали по рації групі перехоплення, яка розпочала рух автомобілем з максимально можливою швидкістю в тому ж напрямку попереду порушника. Зважаючи на те, що швидкість патрульного авто була значно меншою від швидкості „Мерседеса”, було вжито кардинальних заходів: коли порушник порівнявся з патрульним автомобілем, старшина Поліщук здійснив постріл з табельної зброї по колесах його автомобіля. Внаслідок екстреного гальмування „Мерс” зупинився через 8 с після пострілу, а через 2 с його наздогнала група перехоплення. Визначте швидкість, з якою рухався патрульний автомобіль. (2005 р. II е. 7 к.)

Розв’язок

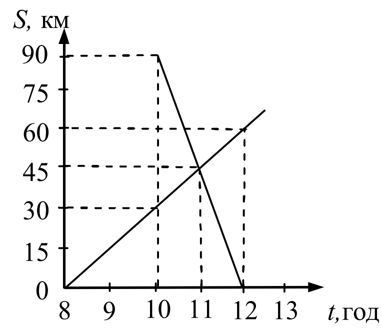


Задачу доречно розв’язати графічним методом. Шлях, пройдений “Мерседесом” $S_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1 \cdot t_1$ рівний площі трикутника. Шлях, пройдений патрульним авто $S_2 = \upsilon_2 \cdot t_2$. Оскільки $S_1 = S_2$, то $\frac{1}{2}\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2$, звідки $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1 t_1}{2t_2} = 86{,}4\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

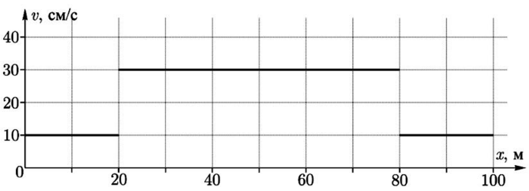
17. Із А у С, відстань між якими 90 км, о 8^{00} виїхав велосипедист, який рухався рівномірно зі швидкістю 15 км/год. В певний час із С виїхав мотоцикліст, який рухався з постійною швидкістю 45 км/год. На якій відстані знаходилися велосипедист і мотоцикліст о 10^{00} і 12^{00}, якщо відомо, що вони зустрілися на однаковій відстані між А і С? (2003 р. з. 8 к.)

Розв’язок

Задачу зручно розв’язати графічно, зобразивши залежності пройдених відстаней від часу. З графіка бачимо, що відстань між об’єктами о 10 і 12 год становить 60 км.



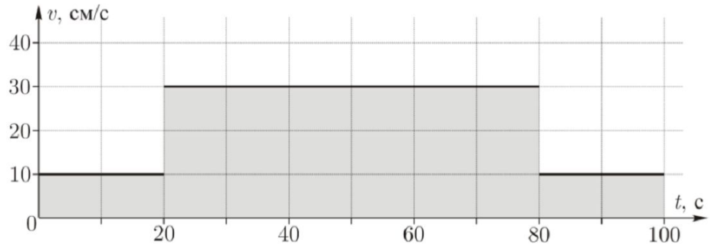
18. Хлопчик зміг перепливти річку за мінімальний час. Ширина річки 100 м. Швидкість хлопчика відносно води постійна і дорівнює 1 м/с. Залежність швидкості течії υ від відстані до берега x наведена на графіку. Зобразіть залежність швидкості течії υ від часу руху хлопчика. На яку відстань l вниз по річці його знесло течією? Вважайте що в будь-якому місці річки швидкість течії спрямована уздовж берегів. (2016 р. III е. 8 к.)



Розв’язок

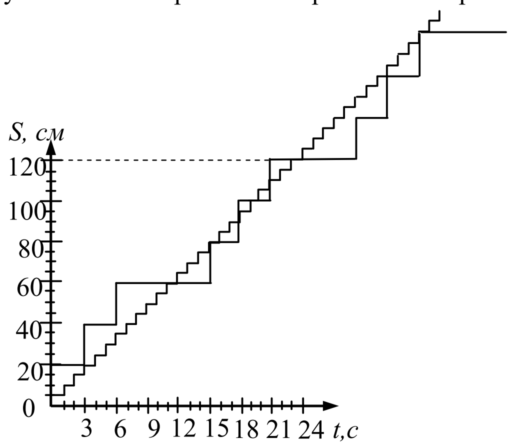
Оскільки час переправи мінімальний, хлопчик спрямовував свою швидкість прямо на протилежний берег перпендикулярно до течії і затратив на переправу час $t = \frac{100\ \text{м}}{1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 100$ с. Ділянку від 0 до 20 м він плив 20 с, від 20 м до 80 м він плив 60 с і від 80 м до 100 м він плив 20 с.

Графік залежності швидкості течії річки можна перемалювати в осях υ(t), де t – час руху хлопчика.



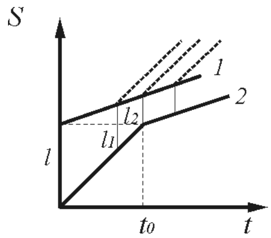
Графічний спосіб. Зміщення вниз по річці створювалося тільки швидкістю течії. Тому загальне зміщення дорівнює площі під графіком.
L=(2·10 см/с·20 с+30 см/с·60 с) = 2200 см = 22 м.
Аналітичний спосіб. Оскільки швидкість хлопчика 1 м/с, то перші 20 м він плив час t_1=20 с, а з графіка видно, що на цій відстані від берега швидкість течії була υ_1=10 см/с, отже хлопчика знесло на $l_1=\upsilon_1\cdot t_1$=200 см. Наступні 60 м хлопчик плив час t_2=60 с, швидкість течії була υ_2=30 см/с і хлопчика знесло на $l_2=\upsilon_2\cdot t_2$=1800 см. Останні 20 м хлопчик плив час t_3=20 с, швидкість течії була υ_3=10 см/с і хлопчика знесло на $l_3=\upsilon_3\cdot t_3$=200 см. Разом його знесло на 2200 см = 22 м.

19. На “легкоатлетичних змаганнях земноводних” молода жаба кинула виклик старшій на “перегони”. Старша дала згоду прийняти участь на перегонах на відстань S. Оцінити найбільшу відстань S, за якої старша жаба “виграє перегони”, якщо відомо, що:
молода жаба здійснює щосекунди один стрибок на 5 см; старша – 1 стрибок через кожні три секунди на відстань 20 см, причому після третього стрибка відпочиває 6 с. Вважати, що переміщення жаб при стрибку відбувається прак-тично миттєво. (2003 р. з. 9 к.)

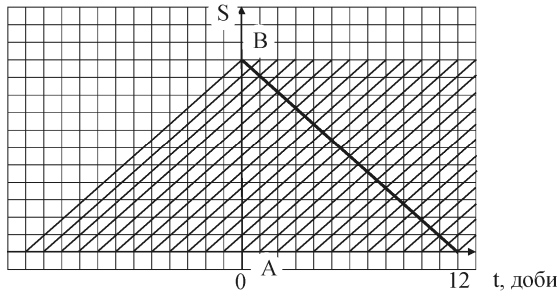


Розв’язок
Побудуємо графіки залежності відстані від часу, які відображають рух молодої та старої жаби. З графіка бачимо, що оптимальна відстань, на якій може перемогти стара жаба, становить 120 см.

20. Два автомобілі, рухаються по прямій з однаковими швидкостями υ на відстані l один від одного і долають ділянку «поганої» дороги, де їх швидкість зменшується втричі. На яку мінімальну відстань наблизяться автомобілі? (2008 р. III е. 8 к.)
Розв’язок
Намалюємо графіки залежності шляху від часу. Візьмемо за початковий момент час виїзду першого автомобіля на погану дорогу. Відстань між автомобілями l. Другий автомобіль доїде до поганої дороги за час $t_0=\dfrac{l}{\upsilon}$. Після цього він буде рухатись з швидкістю $\dfrac{\upsilon}{3}$ (графік 2). Якщо час проходження першим автомобілем поганої ділянки менший за t_0, то мінімальна відстань між автомобілями l_1, якщо це час рівний t_0, то мінімальна відстань l_2, якщо більший, то теж l_2, яка є найменшою з можливих. $l_2=\dfrac{\upsilon}{3}\cdot t_0=\dfrac{\upsilon}{3}\cdot\dfrac{l}{\upsilon}=\dfrac{l}{3}$.



21. Перехід теплоходів із порту А в порт В триває рівно 12 діб. Кожного дня опівдні із А в В відходить теплохід. Скільки теплоходів зустріне кожен теплохід під час дороги? (2005 р. II е. 7 к.)
Розв’язок
Задачу доцільно розв’язати графічно. Розглянемо, скільки теплоходів зустріне теплохід, який вийшов з порта В. З першим він зустрінеться в порту В, з останнім в порту А. В дорозі він зустріне 23 теплоходи.

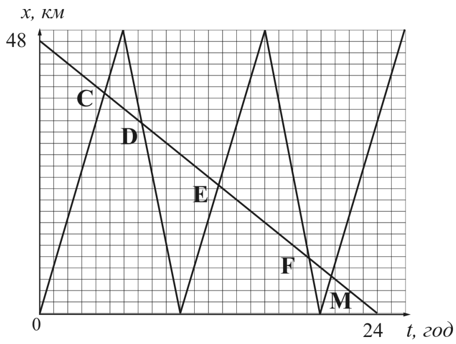


22. Між пунктами А і В, що знаходяться на березі річки на відстані
L=48 км, курсує катер, рухаючись відносно води з швидкістю u=10 км/год. У момент часу, коли катер відходить від пункту В, йому назустріч з пункту А починає пливти пліт

із швидкістю υ=2 км/год. Визначте, скільки разів катер і пліт пропливатимуть один повз одного. Часом, протягом якого катер розвертається в пунктах А і В, нехтувати. Через який час від початку руху відбудеться їхня перша зустріч? (2009 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

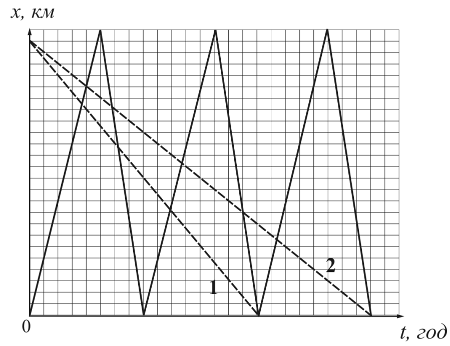
Задачу доцільно розв'язувати графічно. Зобразимо графіки залежності координати (місцеположення) катера та плоту від часу. За початок відліку вибираємо точку В. Оскільки пліт рухається з пункту А в пункт В, то саме в цьому напрямку спрямована течія. Отже катер рухається з В до А з швидкістю 8 км/год, а з А до В з швидкістю 12 км/год. З графіка видно, що катер і пліт пропливатимуть один повз одного 5 разів (точки C,D,E,F,M). Для знаходження часу, через який відбудеться перша зустріч, запишемо рівняння: $8t+2t=48$. Звідси t=4,8 год.



23. Між пунктами А і В, що знаходяться на березі річки на відстані L=48 км, курсує катер. У момент часу, коли катер відходить від пункту В, йому назустріч з пункту А починає пливти пліт із швидкістю υ=2 км/год. За час, поки пліт доплив до пункту В він зустрівся з катером 5 разів. В яких межах може лежати значення швидкості катера? Часом, протя-гом якого катер розвертається в пунктах А і В, нехтувати. (2009 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Задачу доцільно розв'язувати графічно. Зобразимо схематично графіки залежності координати катера та плоту від часу. За початок відліку вибираємо точку В. Оскільки пліт рухається з пункту А в пункт В, то саме в цьому напрямку спрямована течія. Отже катер рухається з В до А з швидкістю (υ–2) км/год, а з А до В з швидкістю (υ+2) км/год. Щоб зустрічі катера і плота відбулися 4 рази, четверта зустріч повинна відбутися в пункті В (графік плота №1). Щоб зустрічі катера і плота відбулися 6 разів, шоста зустріч повинна відбутися теж в пункті В (графік плота №2). Всі інші проміжні графіки якраз забезпечать 5 зустрічей. Отже, складемо два рівняння для граничних випадків:



$$2\left(\frac{48}{\upsilon_{\min}-2}+\frac{48}{\upsilon_{\min}+2}\right)=24 \qquad 3\left(\frac{48}{\upsilon_{\max}-2}+\frac{48}{\upsilon_{\max}+2}\right)=24\,.$$

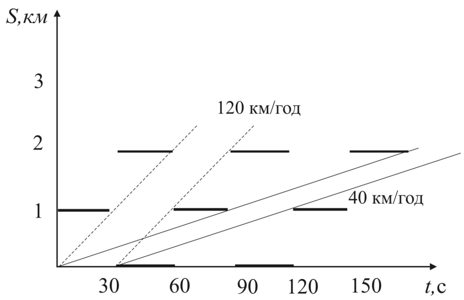
$$12\upsilon_{\min}^2-96\upsilon_{\min}-48=0 \qquad 8\upsilon_{\min}^2-96\upsilon_{\min}-32=0$$

$$\upsilon_{\min}=4+2\sqrt{5}\ \frac{\text{км}}{\text{год}}. \qquad \upsilon_{\max}=6+2\sqrt{10}\ \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

24. На довгому шосе на відстані 1 км встановлені світлофори. Червоний сигнал кожного світлофора горить на протязі 30 с, зелений – на протязі наступних 30 с. (Часом горіння жовтого сигналу знехтувати). За такої умови всі автомобілі, які рухаються зі швидкістю 40 км/год, проїхавши на зелене світло один світлофор, проїжджають без зупинки, тобто також на зелене світло всі інші світлофори. З якими іншими, більшими за 40 км/год, швидкостями можуть рухатися автомобілі, щоб, проїхавши один світлофор на зелене світло, потім ніде не зупинятися? (2007 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Намалюємо графік руху автомобіля. По горизонтальній осі відкладаємо час у секундах, по вертикальній осі – шлях у кілометрах. Нехай в початковий момент включилося зелене світло. Чорним кольором позначимо час горіння червоного світла. Відстань 1 км автомобіль, який рухається з швидкістю 40 км/год, проїжджає за 1/40 год =90 с. Отже в точці S=1 км в момент часу t=90 с повинно загорітись зелене світло. Намалюємо графік горіння світлофора. З графіка видно, що автомобіль буде їхати без зупинок, якщо 1 км проїде за 30 с, 90 с, 150 с..., отже швидкість автомобіля, яка задовольняє умову υ_1=(1км/30с)·3600с=120км/год; υ_2=(1км/150с)·3600с=24км/год, що не задовольняє умову задачі. Отже υ=40 км/год; 120 км/год.



25. Першу половину часу свого руху пішохід пройшов із швидкістю 5 км/год, а другу половину часу – з швидкістю 4 км/год. Яка середня швидкість пішохода за весь час руху? (2002 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Середню швидкість знаходять за формулою $\upsilon_c = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{2t_1}$, де t_1 – половина часу руху; S_1, S_2 – шлях пройдений пішоходом за кожну половину часу руху. $S_1=\upsilon_1 t_1$; $S_2=\upsilon_2 t_1$, тоді $\upsilon_c = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = 4{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

26. Автомобіль проїхав половину шляху зі швидкістю 60 км/год. Наступний відрізок шляху – зі швидкістю 15 км/год, а останній відрізок шляху – зі швидкістю 45 км/год. Чому рівна середня швидкість автомобіля, якщо другий та третій відрізки було пройдено за однаковий час? (2001 р. II етап. 8 клас)

Розв'язок

Знайдемо середню швидкість руху на другій половині шляху. Два відрізки цього шляху автомобіль проїхав за однаковий час.

$\upsilon_{c1} = \frac{S_1 + S_2}{t + t} = \frac{\upsilon_2 t + \upsilon_3 t}{2t} = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_3}{2} = 30\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Середня швидкість на всьому шляху:

$$\upsilon_c = \frac{S + S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{\upsilon_1} + \frac{S}{\upsilon_{c1}}} = \frac{2S}{\frac{S(\upsilon_{c1} + \upsilon_1)}{\upsilon_{c1}\upsilon_1}} = \frac{2\upsilon_{c1}\upsilon_1}{\upsilon_{c1} + \upsilon_1} = 40\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

27. Другу половину шляху потяг їхав з постійною швидкістю, яка в 1,5 рази більша від швидкості на першій половині шляху. Середня швидкість на всьому шляху становить 43,2 км/год. З якими швидкостями їхав потяг кожну половину шляху? (2004 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Скористаємося формулою для визначення середньої швидкості під час руху на двох однакових ділянках шляху: $\upsilon_c = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$. Оскільки

$\upsilon_2 = 1{,}5\upsilon_1$, то $\upsilon_c = \frac{3}{2{,}5}\upsilon_1$. Отже υ_1=36 км/год, υ_2=54 км/год.

28. Хлопчик йде від міста А до міста В. Першу половину шляху він рухався із швидкістю 2,4 км/год, потім половину часу, що залишився, із швидкістю 5 км/год, решту шляху він подолав із швидкістю, що чисельно рівна середній швидкості руху хлопчика на всьому шляху. Знайти середню швидкість руху хлопчика. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Середня швидкість хлопчика знаходиться із співвідношення: $\upsilon_c = \frac{2S}{t_1 + t_2}$ (1), де S – половина шляху, t_1, t_2 – часи, за які він проходив відповідні половини.

$t_1 = \frac{S}{\upsilon_1}$, де υ_1 – швидкість на першій половині шляху.

$t_2=2t_3$, де t_3 – половина часу, що рухався хлопчик на другій половині шляху.

$S = \upsilon_2 t_3 + \upsilon_c t_3$. Підставивши у формулу (1), отримаємо:

$\upsilon_c = \frac{2(\upsilon_2 t_3 + \upsilon_c t_3)}{\frac{\upsilon_2 t_3 + \upsilon_c t_3}{\upsilon_1} + 2t_3}$. Після спрощень $\upsilon_c^2 + 5\upsilon_c - 24 = 0$. Звідси $\upsilon_c = 3\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

29. Любитель бігу пробіг половину шляху зі швидкістю υ_1=10 км/год. Потім половину часу (що залишився) біг зі швидкістю υ_2=8 км/год, решту шляху йшов зі швидкістю υ_3=4 км/год. Визначити середню швидкість руху любителя бігу. (2005 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Середня швидкість $\upsilon_c = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + 2t_2}$, де S_1 – половина шляху, t_1 – час, за який пройдена перша половина шляху, t_2 – половина часу, що залишився.

$t_1 = \frac{S_1}{\upsilon_1}$. Оскільки $S_2 = \upsilon_2 t_2 + \upsilon_3 t_2$, то $t_2 = \frac{S_2}{\upsilon_2 + \upsilon_3}$. Враховуючи, що $S_1=S_2$,

одержимо: $\upsilon_c = \frac{2S_1}{\frac{S_1}{\upsilon_1} + \frac{2S_1}{\upsilon_2 + \upsilon_3}} = \frac{2S_1}{\frac{S_1(\upsilon_2 + \upsilon_3 + 2\upsilon_1)}{\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}} = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{\upsilon_2 + \upsilon_3 + 2\upsilon_1} = 7{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

30. Автомобіль першу третину шляху проїхав за одну четверту частину всього часу руху. Середня швидкість автомобіля на всьому шляху 54 км/год. З якими швидкостями рухався автомобіль на першій і другій ділянках шляху, якщо на кожній ділянці він рухався з постійною швидкістю? (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок Нехай автомобіль проїхав шлях S за час t. Згідно умови, протяжність першої ділянки шляху $S_1 = \frac{S}{3}$, а тривалість руху $t_1 = \frac{t}{4}$.

Отже швидкість автомобіля на першій ділянці $\upsilon_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{S}{3} \cdot \frac{4}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{S}{t}$.

Середня швидкість автомобіля на всьому шляху $\upsilon_{cp} = \frac{S}{t}$, отже $\upsilon_1 = \frac{4}{3}\upsilon_{cp} = \frac{4}{3} \cdot 54 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 72 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Аналогічно для другої ділянки шляху: $S_2 = \frac{2}{3} S$, $t_2 = \frac{3}{4} t$. Швидкість на другій ділянці в цьому випадку:

$$\upsilon_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{2S}{3} \cdot \frac{4}{3t} = \frac{8}{9} \cdot \frac{S}{t} = \frac{8}{9}\upsilon_{cp} = 48 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

31. Велосипедист першу половину часу руху між двома пунктами їхав із швидкістю 30 км/год, а другу – із швидкістю 15 км/год. З якою середньою швидкістю велосипедист проїхав другу половину шляху? (2013 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

$\upsilon_c = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Першу половину часу велосипедист їхав швидше, отже проїхав більшу частину шляху. Тому на першій половині шляху $\upsilon_1 = 30 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. $\upsilon_c = \frac{2\upsilon_1 \cdot \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$, $(\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot \upsilon_c = 2\upsilon_1 \cdot \upsilon_2$, $\upsilon_1\upsilon_c + \upsilon_2\upsilon_c = 2\upsilon_1\upsilon_2$,

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1\upsilon_c}{2\upsilon_1 - \upsilon_c} = \frac{30 \cdot 22{,}5}{60 - 22{,}5} = 18 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

32. Під час гонки Формула-1 автомобілі багато разів проходять кільцеву трасу. Ця траса умовно розбита на три ділянки однакової довжини, але різного рівня складності. Гонщик пройшов першу і другу ділянку з загальною середньою швидкістю 200 км/год, другу і третю – з загальною середньою швидкістю 150 км/год, а третю і першу – з загальною середньою швидкістю 225 км/год. На якій з ділянок (першій, другій чи третій), середня швидкість автомобіля була найбільшою? Визначте цю швидкість. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки гонщик проходив з найбільшими швидкостями першу та другу (υ_{12}=200 км/год) і третю та першу (υ_{31}=225 км/год) дільниці, слід очікувати, що найбільшою буде середня швидкість на першій ділянці: $\upsilon_1 = \frac{S}{t_1}$ (1), S – довжина однієї ділянки, t_1 – час руху на першій ділянці. За умовою $t_1 + t_2 = \frac{2S}{\upsilon_{12}}$ (2); $t_2 + t_3 = \frac{2S}{\upsilon_{23}}$ (3); $t_3 + t_1 = \frac{2S}{\upsilon_{31}}$ (4).

Для того, щоб знайти t_1, додамо рівняння (2) і (3) і віднімемо (4): $t_1 = S\left(\frac{1}{\upsilon_{12}} + \frac{1}{\upsilon_{31}} - \frac{1}{\upsilon_{23}}\right)$. Підставимо час у рівняння (1). Знаходимо, що

$$\upsilon_1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{\upsilon_{12}} + \frac{1}{\upsilon_{31}} - \frac{1}{\upsilon_{23}}}\right) = 360 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

33. Моторний човен проходить відстань між двома пунктами А і В за течією річки за 3 год, а пліт – за 12 год. Скільки часу моторний човен затратить на зворотній шлях? (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай швидкість човна υ, швидкість течії υ_m, відстань між пунктами S. Тоді $\upsilon_m = \frac{S}{12}$; $\upsilon + \upsilon_m = \frac{S}{3}$. Звідси $\upsilon = \frac{S}{3} - \frac{S}{12}$. Час руху човна проти течії $t = \frac{S}{\upsilon - \upsilon_m} = 6$ год.

34. Від пункту A до пункту B по річці відходить човен зі швидкістю 3 км/год відносно води. Назустріч човну одночасно з ним від B до A відходить катер зі швидкістю 10 км/год відносно води. За час руху човна від A до B катер встигає пройти двічі туди й назад і прибуває у пункт B одночасно з човном. Яка (за величиною і за напрямком) швидкість течії? (2001 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Відстань між пунктами А і В позначимо S. Припустимо, що течія напрямлена від А до В. Тоді час, за який цю відстань пропливе човен $t=\dfrac{S}{\upsilon_ч+\upsilon_т}$. Час, який витратить катер, щоб двічі пройти від А до В й назад: $t=\dfrac{2S}{\upsilon_к+\upsilon_т}+\dfrac{2S}{\upsilon_к-\upsilon_т}$. Оскільки ці часи рівні, то $\dfrac{S}{\upsilon_ч+\upsilon_т}=\dfrac{4S\upsilon_к}{\upsilon_к^2-\upsilon_т^2}$. Або $4\upsilon_к\upsilon_ч+4\upsilon_к\upsilon_т=\upsilon_к^2-\upsilon_т^2$.

Підставивши швидкість катера, отримаємо $\upsilon_т^2+40\upsilon_т+20=0$. Звідси $\upsilon_{т=}\dfrac{-40+4\sqrt{95}}{2}$ або $\upsilon_{т=}\dfrac{-40-4\sqrt{95}}{2}$.

Другий розв'язок не задовольняє умову задачі (швидкість течії не може бути більшою швидкості човна), отже $\upsilon_т=-20+2\sqrt{95}\approx-0{,}5\dfrac{км}{год}$. Знак "–" означає, що наше припущення невірне, а значить течія має напрям від В до А.

35. Від буксира, що йшов проти течії річки, відірвався човен. В момент часу, коли на буксирі помітили човен, він знаходився від нього на відстані S_0. З буксира спустили катер, який доплив до човна і повернувся з ним до буксира. Скільки часу на це пішло? Яку відстань пройшов катер в один та другий бік, якщо швидкості катера і буксира відповідно рівні $\upsilon_к$, $\upsilon_б$. (2004 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Тіло відліку – річка. Час руху катера до човна: $t_1=\dfrac{S_0}{\upsilon_к}$ (1). Час руху катера до буксира: $t_2=\dfrac{S_0+S_б}{\upsilon_к}$, де $S_б$ – відстань, яку пройде буксир за час

руху катера. $S_б=\upsilon_б t_1+\upsilon_б t_2$, отже $t_2=\dfrac{S_0+\upsilon_б t_1+\upsilon_б t_2}{\upsilon_к}$ (2). Після підстановок $t_2=\dfrac{\upsilon_к+\upsilon_б}{\upsilon_к-\upsilon_б}t_1$.

$t=t_1+t_2=\dfrac{2S_0}{\upsilon_к-\upsilon_б}$.

36. Відстань між кінцевими зупинками тролейбуса дорівнює 5 км. На маршруті рівномірно курсують 10 тролейбусів. Пасажир тролейбуса визначив, що зустрічні тролейбуси проїжджають повз нього через кожні 2 хв. Визначте швидкість руху тролейбуса. (2003 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Тролейбуси по маршруту розподілені рівномірно, тому відстань між ними $l_0=\dfrac{2l}{N}$, де l – довжина маршруту.

Час між зустрічами тролейбусів: $t=\dfrac{l_0}{\upsilon+\upsilon}$. Звідси $\upsilon=\dfrac{l_0}{2t}=\dfrac{l}{Nt}=4{,}2\dfrac{м}{с}$.

37. Потяг проходить повз спостерігача за 10 с, а по мосту довжиною 400 м – впродовж 30 с. Визначте довжину і швидкість руху потяга. (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай υ – швидкість потяга. Тоді його довжина 10υ. $30\upsilon=400+10\upsilon$, звідки $\upsilon=20$ м/с, а довжина потяга 200 м.

38. До мосту довжиною 100 м під'їжджає поїзд довжиною 200 м зі швидкістю 20 м/с. З якою найменшою швидкістю повинен бігти хлопчик, щоб пробігти через міст раніше за поїзд? (2005 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Час руху поїзда мостом $t=\dfrac{100\text{ м}+200\text{ м}}{20\dfrac{\text{м}}{\text{с}}}=15\text{ с}$. Швидкість хлопчика повинна бути не меншою, ніж $\upsilon=\dfrac{100}{15}=\dfrac{20}{3}$ м/с.

39. Хлопчик рухається рівномірно вздовж залізничної колії з швидкістю 4 км/год. Повз нього з однаковою швидкістю в протилежних напрямках проїжджають дві електрички, одна з яких містить 9 вагонів, друга – 10 вагонів. Визначте, з якою швидкістю рухалися електрички, якщо вони зустрілися і розійшлися навпроти хлопчика. (2003 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай l – довжина одного вагона, υ – швидкість електричок, u – швидкість хлопчика. Тоді час, за який кожна з електричок проїхала повз хлопчика

$t=\frac{n_1 l}{\upsilon-u}=\frac{n_2 l}{\upsilon+u}$, звідки $\upsilon=u\frac{n_1+n_2}{n_2-n_1}=76\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

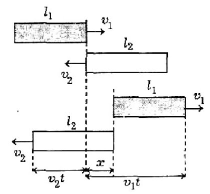
40. Потяг-експрес пройшов за час t_1=9 с повз зустрічну електричку, що рухалася з такою ж швидкістю і мала вдвічі більшу довжину. За який час експрес пройде повз зустрічний пасажирський потяг, який вдвічі довший за електричку і їде вдвічі швидше? (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Нехай υ–модуль швидкостей експреса та електрички, L–довжина експреса. Швидкість зближення експреса та електрички $\upsilon_1=\upsilon+\upsilon=2\upsilon$.

За час t_1 вони подолали сумарну відстань $L_1=L+2L=3L$. Отже $t_1=\frac{L_1}{\upsilon_1}=\frac{3L}{2\upsilon}$, звідки $\frac{L}{\upsilon}=\frac{2}{3}t_1$. Швидкість зближення експреса та пасажирського потяга $\upsilon_2=\upsilon+2\upsilon=3\upsilon$. За час t_2 вони подолали сумарну відстань $L_2=L+4L=5L$. Звідси $t_2=\frac{L_2}{\upsilon_2}=\frac{5L}{3\upsilon}=\frac{10}{9}t_1=10$ с.

41. По паралельних коліях назустріч один одному рухаються два потяги: пасажирський довжиною 300 м зі швидкістю 60 км/год і вантажний зі швидкістю 40 км/год. Машиніст пасажирського потяга визначив, що вантажний проїжджає повз нього за 21,6 с. Визначте відстань від точки зустрічі потягів до точки розходження останніх вагонів. (2006 р. II е. 8 к.)



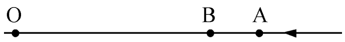
Розв'язок

Відносна швидкість потягів $\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2$. Довжина вантажного потягу $l_2=\upsilon t=(\upsilon_1+\upsilon_2)t_1$=610 м. Визначимо час t, за який потяги розминуться. Відносно пасажирського потяга $t=\frac{l_1+l_2}{\upsilon_1+\upsilon_2}$=32,76 с. З малюнка маємо: $x=\upsilon_1 t-l_1$=246 м.

42. Потяг рухається прямолінійною ділянкою з швидкістю υ=118,8 км/год. Перебуваючи на відстані l=1 км від переїзду, машиніст подає сигнал, тривалість якого τ=5 с. Протягом якого інтервалу часу чутиме сигнал людина на переїзді? Швидкість звуку в повітрі υ_1= 330 м/с. (2006 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай людина знаходиться в т. О. На момент початку подачі сигналу поїзд знаходився в т. А, а на момент закінчення в т. В. ОА=l. Початок



сигналу людина почує із запізненням $t_1=\frac{l}{\upsilon_1}$, закінчення із запізненням $t_2=\frac{l-\upsilon\tau}{\upsilon_1}$, а сам сигнал триває τ.

Тому протяжність сигналу почутого людиною буде тривати $\Delta t=\tau+\left(\frac{l-\upsilon\tau}{\upsilon_1}-\frac{l}{\upsilon_1}\right)=\frac{\upsilon_1\tau+l-\upsilon\tau-l}{\upsilon_1}=\tau\left(1-\frac{\upsilon}{\upsilon_1}\right)$.

τ=4,5 с.

43. Два тіла рухаються назустріч одне одному так, що за кожні 10 с відстань між ними зменшується на 16 м. Якщо ці тіла будуть рухатися в одному напрямку з тими ж швидкостями, то за 5 с відстань між ними збільшиться на 3 м. З якою швидкістю рухається кожне з цих тіл? (2005 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

І-й випадок: $\upsilon_I=\upsilon_1+\upsilon_2$; $\upsilon_I=\frac{S_I}{t_I}=1{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

ІІ–й випадок: $\upsilon_{II}=\upsilon_1-\upsilon_2$; $\upsilon_{II}=\frac{S_{II}}{t_{II}}=0{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}}$. $\upsilon_I-\upsilon_{II}=1\frac{\text{м}}{\text{с}}$. $\upsilon_1+\upsilon_2-(\upsilon_1-\upsilon_2)=1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $2\upsilon_2=1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\upsilon_2=0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

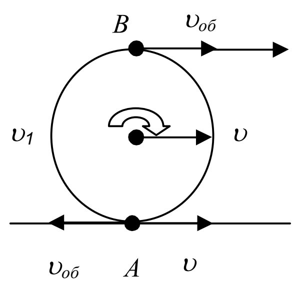
$\upsilon_1=1{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

44. Хлопчик йде вниз по ескалатору, що опускається, 1 хв. Якщо він буде йти вдвічі швидше, спуск триватиме на 15 с менше. Скільки часу він буде опускатися, стоячи нерухомо на ескалаторі? (2006 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай u – швидкість хлопчика, υ - швидкість ескалатора. Тоді в першому випадку: $u+\upsilon=\frac{S}{t_1}$(1); в другому випадку: $2u+\upsilon=\frac{S}{t_2}$ (2). Час руху нерухомого хлопчика на ескалаторі $t_3=\frac{S}{\upsilon}$. Віднявши почленно від (2) (1), отримаємо: $u=\frac{S}{180}$(3). Підставивши (3) в (1), отримаємо: $\upsilon=\frac{S}{90}$. Тоді $t_3=90\text{ с}=1{,}5\text{ хв}$.

45. З якою швидкістю відносно Землі рухаються верхні та нижні ланки гусениці трактора, якщо його швидкість 10 км/год? (2002 р. ІІ е. 7 к.)



Розв'язок

Нехай вісь колеса має швидкість υ відносно землі. Тоді рух різних точок на ободі колеса розглядатимемо як суму двох рухів: поступального руху осі колеса і обертального руху точок обода навколо осі $\upsilon_{об}$.

Розглянемо точку А. Ця точка нерухома відносно землі (відсутнє проковзування). Це означає, що з відсутністю проковзування швидкості поступального руху осі колеса (автомобіля, трактора) і обертального руху точок обода рівні $\upsilon_{об.}=\upsilon$, отже $\upsilon_A=0$. У точці В швидкості поступального і обертального рухів додаються, тому $\upsilon_B=\upsilon_{об}+\upsilon=2\upsilon$. Верхня ланка гусениці трактора має таку ж швидкість, що й точка В: $\upsilon_1=2\upsilon=20$ км/год. Нижня – нерухома: $\upsilon_2=0$.

46. Відстань між двома хлопчиками S=300 м. Поруч з першим хлопчиком знаходиться песик. Хлопці йдуть назустріч з однаковими швидкостями υ_1=1,5 м/с. Песик бігає не зупиняючись від одного хлопчика до іншого з швидкістю υ_2 =2,5 м/с до тих пір поки хлопці не зустрінуться. Яку відстань пробіжить песик? (2014 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Час зближення хлопців $t=\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_1}$. Тоді песик пробіжить відстань $l=\upsilon_2\cdot t=\upsilon_2\cdot\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_1}$=250 м.

47. Відстань між двома хлопчиками S=300 м. Поруч з першим хлопчиком знаходиться песик. Хлопці йдуть назустріч з однаковими швидкостями υ_1=1,5 м/с. Песик біжить до другого хлопчика з швидкістю υ_2 =2,5 м/с. Добігши до хлопчика, песик йде поруч з ним певний час, а потім біжить до першого хлопчика і йде поруч з ним такий же час аж до зустрічі хлопців. Скільки часу йшов песик поруч з кожним хлопцем? (2014 р. ІІІ е. 9 к.)

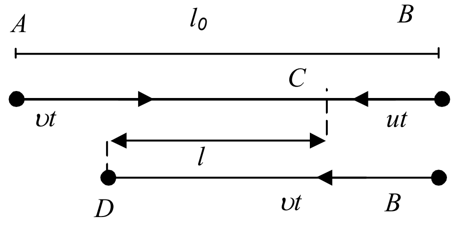
Розв'язок

До зустрічі хлопці йдуть час $t=\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_1}=100$ с. Час руху песика до другого хлопця $t_1=\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_2}=75$ с. За цей час хлопці пройдуть шлях $2\upsilon_1\cdot t_1=225$ м. Відстань між ними буде S_1=75 м. Нехай песик йде поруч з кожним хлопцем час t_0. Тоді після того, як песик йшов біля другого хлопця, відстань між хлопцями стала $S_2=S_1-2\upsilon_1 t_0$. Песик біжить до першого хлопця. Час його руху $t_2=\dfrac{S_2}{\upsilon_1+\upsilon_2}=\dfrac{S_1-2\upsilon_1 t_0}{\upsilon_1+\upsilon_2}$. Отже загальний час руху песика $t=t_1+t_0+t_2+t_0$. Після підстановки $100=75+2t_0+\dfrac{75-3t_0}{4}$. Розв'язавши це рівняння, отримуємо, що t_0=5 с.

48. Спортсмени біжать із однаковими швидкостями υ колоною, довжина якої l_0. Назустріч їм біжить тренер із швидкістю u ($u<\upsilon$). Кожен із спортсменів, порівнявшись із тренером, біжить назад з тією ж швидкістю υ. Якою буде довжина колони, коли всі спортсмени розвернуться? (2002 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

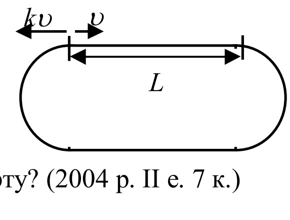
$AB=l_0$ – колона, що зустріла тренера у точці B. Точка C – точка зустрічі тренера з останнім спортсменом колони. $l_0=\upsilon t+ut$, звідки $t=\dfrac{l_0}{u+\upsilon}$, де t – час формування нової колони, в якій перший спортсмен з точки B перемістився в точку D, а останній спортсмен знаходиться у точці C. Тоді довжина нової колони $l=(\upsilon-u)t=\dfrac{(\upsilon-u)l_0}{u+\upsilon}$.



49. По колу стадіона бігають назустріч один одному двоє хлопців. Швидкість одного з них у k разів більша від швидкості другого. Щоразу хлопці зустрічаються на відстані L від попереднього місця зустрічі. Визначте довжину стадіона. (2002 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай наступна зустріч хлопців відбудеться на відстані L (див. малюнок). Тоді для першого хлопця можна записати $L=\upsilon t$, для другого – $S-L=k\upsilon t$, де S – довжина стадіона. З цих двох рівнянь визначаємо S: $S=L+kL$.



50. З лінії старту колової доріжки стадіону починають бігти два спортсмени: один із швидкістю 6,5 м/с, другий – 4,5 м/с. Через скільки кругів вони зустрінуться на лінії старту? (2004 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай це буде час *t*. За цей час перший спортсмен пройде шлях $S_1 = \upsilon_1 t$, другий – $S_2 = \upsilon_2 t$. З іншого боку $S_1 = nl$; $S_2 = ml$, де l – довжина колової доріжки, *n, m* – кількість кругів, пройдених першим та другим спортсменами відповідно. Прирівнявши, отримаємо: $nl = \upsilon_1 t$, $ml = \upsilon_2 t$, звідки $\frac{n}{m} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{6{,}5}{4{,}5} = \frac{13}{9}$. Зважаючи на те, що 13 – число просте, перша зустріч спортсменів відбудеться, коли перший спортсмен подолає 13 кругів, другий – 9 кругів відповідно.

51. Зі старту бігової доріжки стадіону стартують два бігуни з різницею в часі Δt=2 с. Через який мінімальний час бігуни зустрінуться, якщо один з них пробігає повний круг за час t_1=65 с, а інший – за час t_2=70 с? (2012 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай довжина бігової доріжки S. Тоді швидкості бігунів відповідно дорівнюють: $\upsilon_1 = \frac{S}{t_1}$, $\upsilon_2 = \frac{S}{t_2}$ (1).

Розглянемо два випадки.

І. Перший спортсмен вибіг раніше за другого. Зв'яжемо систему відліку з другим бігуном. У цій системі відліку швидкість першого бігуна $u = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Шлях, який повинен пройти перший бігун до зустрічі з другим дорівнює $S - l$, де $l = \upsilon_1 \Delta t$. Тоді час зустрічі можна знайти з рівняння: $S - l = u \cdot t$.

Або згідно з (1): $S - \upsilon_1 \Delta t = \left(\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2}\right) \cdot t$; $S - \frac{S}{t_1}\Delta t = S\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \cdot t$;

$t = \frac{t_2(t_1 - \Delta t)}{t_2 - t_1} = 882$ с.

ІІ. Другий спортсмен вибіг раніше за першого. Тоді він перед стартом першого опиниться від нього на відстані $l = \upsilon_2 \Delta t$. Зв'яжемо систему відліку з першим спортсменом. У цій системі відліку другий спортсмен рухається до першого із швидкістю $u = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Тоді час зустрічі можна знайти з умови $l = u \cdot t$.

Або згідно (1): $\upsilon_2 \Delta t = \left(\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2}\right) \cdot t$; $\frac{S}{t_2}\Delta t = S\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \cdot t$; $t = \frac{\Delta t \cdot t_1}{t_2 - t_1} = 26$ с.

52. Заєць втікає від Вовка по прямій, рухаючись рівномірно. У початковий момент часу відстань між Зайцем і Вовком 36 м, а швидкість Вовка 14 м/с. Вовк втомлюється і через кожні Δt=10 с (у моменти часу Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$..., рахуючи від початку руху) зменшує свою швидкість на $\Delta \upsilon$=1 м/с. З якою мінімальною швидкістю повинен бігти Заєць, щоб Вовк його не зловив? (2011 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

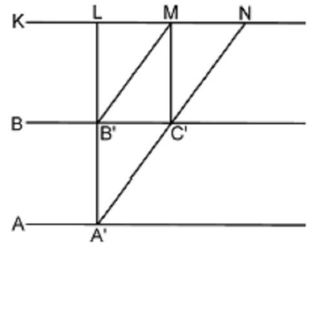
Якщо Заєць втікатиме із швидкістю 11 м/с, то Вовк наближатиметься до Зайця впродовж перших 10 с із швидкістю 3 м/с, впродовж наступних 10 с – із швидкістю 2 м/с. Тому Вовк наздожене Зайця.

Якщо Заєць втікатиме із швидкістю 12 м/с, то Вовк буде наближатися до Зайця впродовж перших 10 с із швидкістю 2 м/с, впродовж подальших 10 с – із швидкістю 1 м/с. За 20 с відстань між тваринами зменшиться на 30 м і потім перестане зменшуватися. Заєць втече від Вовка.

Таким чином, шукана мінімальна швидкість Зайця лежить в інтервалі від 11 м/с до 12 м/с. Позначимо її через (12 – *u*) м/с, де 0 < *u* < 1. За перші 10 с Вовк наближається до Зайця із швидкістю (2 + *u*) м/с, за другі 10 с – із швидкістю (1 + *u*) м/с, за треті 10 с – зі швидкістю *u* м/с. Надалі Вовк почне відставати від Зайця. За 30 с відстань між тваринами зменшиться на 10(2 + *u*) + 10(1 + *u*) + 10*u* = 30+30*u* метрів. Отже, Заєць втече від Вовка, якщо 36 > 30 + 30*u*, або *u* < 0,2. Отже, швидкість Зайця повинна бути більшою за 11,8 м/с.

53. Хлопчик А йде прямолінійною доріжкою із швидкістю υ =2 м/с. Зліва від нього, паралельно в ту ж сторону йде хлопчик В з тією ж швидкістю υ, а хлопчик С біжить з швидкістю υ_1=4 м/с. Ще лівіше, на відстані, рівній відстані між доріжками, проходить лінія електропередач, стовпи якої розміщені на відстані *a*=18 м один від одного. У початковий момент часу всі три хлопчики і один з стовпів знаходяться на одному рівні (на малюнку вигляд зверху). Побудуйте на графіку залежність від часу кількості стовпів, які хлопчик А бачить в проміжку між двома іншими хлопчиками. Розмірами хлопчиків, стовпів і шириною доріжки знехтувати. (2015 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок



Нехай за деякий час хлопчик А перемістився в точку А′. Хлопчик В рухається з тією ж швидкістю, отже ВВ′=АА′. Хлопчик С рухається з вдвічі більшою швидкістю, отже ВС′=2 ВВ′. На малюнку стовпи розміщуються на прямій KN. Точка К відповідає тому стовпу, навпроти якого знаходилися всі три хлопчики в початковий момент. Точки L і N сама ліва і сама права точки, які хлопчик А бачить в інтервалі між хлопчиками В і С. З малюнка видно, що трикутники

A′B′C′, B′LM і C′MN рівні. Отже KN=3AA′. А це значить, що точка N рухається з швидкістю 3υ=6 м/с. Отже через кожні $\frac{a}{3\upsilon} = 3$ с кількість стовпів збільшується на 1, оскільки точка N досягає нового стовпа і він буде входити у відстань LN. З іншого боку через кожні $\frac{a}{\upsilon} = 9$ с один стовп виходить з цього проміжку із-за руху точки L. В початковий момент між хлопчиками B і C не проглядалося жодного стовпа. Стовпи будуть добавлятися на 3-ій і 6-ій секунді. На 9-ій секунді один стовп добавиться, а один відніметься, тобто кількість не зміниться. Потім знову появляться стовпи на 12 і на 15 секунді, на 18-ій кількість не зміниться. Зобразимо це на графіку.