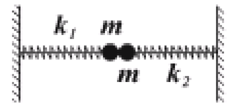
Механічні коливання



104. В якому випадку годинник із маятником буде йти швидше: коли його підняли на деяку висоту чи настільки ж опустили в шахту? Проведіть аналіз аж до віддалей, рівних радіусу Землі, вважаючи її однорідною кулею (скрізь густина однакова). (2003 р. III е. 11 к.)

Розв'язок

Біля поверхні землі $g = G\dfrac{M}{R^2} = G\dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \dfrac{4}{3}G\rho\pi R$. На висоті h над землею $g_1 = G\dfrac{M}{(R+h)^2}$. Звідси $g_1 = \left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 g$. В шахті тіло притягується лише кулею радіуса (R–h), сили притягання верхніх шарів взаємно компенсуються.

$g_2 = G\dfrac{m}{(R-h)^2} = G\cdot\dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi(R-h)^3}{(R-h)^2} = \dfrac{4}{3}\pi G\rho(R-h)$. При $h=0$, $g = \dfrac{4}{3}G\rho\pi R.$

Звідси $g_2 = \dfrac{R-h}{R}g.$ Складемо рівняння $g_1 = g_2$. $\dfrac{R^2}{(R+h)^2} = \dfrac{R-h}{R}$. Очевидно, що воно справджується при h=0. Знайдемо інший корінь.

$R^3 = (R^2 + 2Rh + h^2)(R-h)$. Після спрощень отримуємо квадратне рівняння

$h^2 + hR - R^2 = 0$. Корінь цього рівняння $h = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R.$ Розв'язавши нерівність $g_1>g_2$ (або $g_1<g_2$), можна знайти, що при $h < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R \approx 0{,}618R$, $g_1 < g_2$, отже $T_1 > T_2$ – піднятий годинник йде повільніше, при $0{,}618R < h < R$, $g_1 > g_2$, отже $T_1 < T_2$ – піднятий годинник йде швидше. (При $h \to R$, $g_2 \to 0$, отже $T_2 \to \infty$ – опущений годинник зупиняється).

105. Тягарець, підвішений до пружини, видовжує її на 3,6 см. Визначити період власних коливань тягарця, якщо його вивести з положення рівноваги і відпустити. (2006 р. III е. 11 к.)

Розв'язок

На підвішений тягарець діє сила пружності $F = -kx$, яка зрівноважена силою тяжіння. Отже $mg = -kx$. Період коливань $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Отже, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x}{g}}$. T=0,12π с≈0,37 с.

106. На стрижні знаходяться дві однакові кульки масою m, які пружинами жорсткістю k_1=k і k_2=4k з'єднані з кінцями стрижня. У початковий момент часу кульки нерухомі і торкаються одна одної, а пружини не розтягнуті. Потім кульку, з'єднану з пружиною, жорсткість якої більша, відводять убік, стискаючи відповідну пружину, і відпускають без початкової швидкості. Через який час кульки зіткнуться в перший, другий і третій раз? Зіткнення кульок абсолютно пружні. (2011 р. III е. 11 к.)

Розв'язок

За умовою друга кулька відведена в бік, здійснює коливання за рахунок сили пружності протягом часу $t_1 = \dfrac{1}{4}T_2$ до зіткнення з першою кулькою (де $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_2}}$). Отже, час першого зіткнення: $t_1 = \dfrac{1}{4}2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_2}} = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Так як удар абсолютно пружний, то друга кулька після удару зупиниться і змусить рухатися першу кульку. Час її руху до зіткнення буде становити:

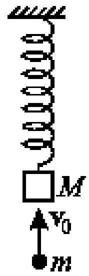
$t_2' = \dfrac{1}{2}T_1$ (де $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1}}$); $t_2' = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Отже, весь час до другого зіткнення становить: $t_2 = t_1 + t_2'$,

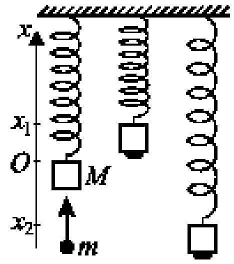
$t_2 = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{m}{k}} + \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{5}{4}\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Після другого зіткнення друга кулька починає рухатися, а перша зупиняється. Час протягом якого рухається друга кулька: $t_3' = \dfrac{1}{2}T_2 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Отже, загальний час до третього зіткнення становить: $t_3 = t_2 + t_3'$,

$$t_3 = \frac{5}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{7}{4}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$



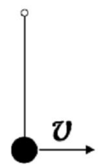


107. Брусок масою 100 г підвішений на невагомій пружині жорсткістю 10 Н/м. Знизу в нього попадає пластилінова кулька масою 10 г, яка летить вертикально вгору зі швидкістю 2,2 м/с і прилипає до бруска. Знайти амплітуду гармонічних коливань, які виникають при цьому. (2013 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Виберемо початок відліку в положенні рівноваги бруска до прилипання кульки. В цьому стані пружина розтягнута на $x_0 = \frac{Mg}{k}$, x_0=0,1 м. Згідно закону збереження імпульсу в момент прилипання кульки $m\upsilon_0 = (M+m)u$, звідки $u = \frac{m\upsilon_0}{M+m}\cdot$ u=0,2 м/с. В точках максимального зміщення від нового положення рівноваги швидкість бруска і кульки дорівнює нулю. Із закону збереження енергії: $\frac{(M+m)u^2}{2} + \frac{(kx_0)^2}{2} = (M+m)gx + \frac{k(x-x_0)^2}{2}$. $\frac{0{,}11\cdot 0{,}2^2}{2} + \frac{10\cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}11\cdot 10\cdot x + 5(x-0{,}1)^2$; $5x^2 + 0{,}1x - 0{,}0022 = 0$.

x_1≈0,013 м, x_2≈–0,033 м. Тоді амплітуда коливань $A = \frac{(x_1 - x_2)}{2} = 2{,}3$ см.



108. Легкий стрижень довжиною l із закріпленим на кінці вантажем масою m може обертатися у вертикальній площині навколо іншого свого кінця. Спочатку вантаж знаходиться в нижньому положенні рівноваги. Йому надають горизонтальну швидкість υ. При яких значеннях цієї швидкості стрижень коливатиметься, а при яких буде обертатися? Знайти силу пружності, яка виникає в стрижні, коли вантаж знаходиться у верхній точці. При якому значенні початкової швидкості υ стрижень у верхній точці буде стиснутий, а при якому – розтягнутий? (2015 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

Згідно закону збереження механічної енергії умову переходу від коливального руху до обертального можна записати так: $\frac{m\upsilon^2}{2} = mg\cdot 2l$. Отже, при швидкості $\upsilon^2 > 4gl$ відбувається обертання, а при меншій – коливання біля нижньої точки. Під час проходження тілом верхньої точки з швидкістю υ_1 можемо записати ІІ закон Ньютона: $mg + T = \frac{m\upsilon_1^2}{l}$, звідки $T = m\left(\frac{\upsilon_1^2}{l} - g\right)$. Отже, якщо $\frac{\upsilon_1^2}{l} > g$, то T>0 (стрижень розтягнутий), якщо $\frac{\upsilon_1^2}{l} < g$, то T<0 (стрижень стиснутий). Згідно закону збереження механічної енергії $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + mg\cdot 2l$. Звідси $\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + 4gl$. Після підстановки отримуємо, що якщо $\upsilon^2 > 5gl$, то стрижень у верхній точці розтягнутий, якщо $4gl < \upsilon^2 < 5gl$, то стрижень стиснутий і якщо $\upsilon^2 < 4gl$, то відбувається коливальний рух.

109. Вантаж масою m, приєднаний до одного з кінців пружини жорсткістю k здійснює гармонічні коливання вздовж горизонтальної осі з амплітудою A. Визначити максимальне значення потужності, що розвиває пружина. (2007 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

Нехай координата вантажу змінюється за законом $x = A\sin\omega t$.

Тоді $\upsilon = x' = \omega A\cos\omega t$. $a = \upsilon' = x'' = -\omega^2 A\sin\omega t$. Миттєва потужність $p = f\cdot\upsilon = ma\upsilon = -\frac{1}{2}m\omega^3 A^2\sin 2\omega t$.

Максимальне значення потужності $P_0 = \frac{1}{2}m\omega^3 A^2$, де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тоді $P_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^3}{m}}\cdot A^2$.

110. Кульку, яка закріплена на пружині, відвели на 2 см від положення рівноваги і відпустили. Власна частота коливань кульки становить 5 Гц. Який шлях пройде кулька за 10 с? За який час вона пройде шлях 3 см? (2005 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Період коливань кульки $T = \frac{1}{\nu} = 0{,}2$ с. За період кулька проходить шлях 8 см. Оскільки $\frac{t}{T} = 50$ – число ціле, то за 10 с кулька пройде шлях 50·8=400 см. Час руху кулькою шляху 3 см від початкового положення складається з часу руху від нижнього положення до положення рівноваги (x_0=2 см і відповідно $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{20}$ с) і 1 см від положення рівноваги. Для знаходження часу, за який кулька пройде шлях 1 см від положення рівноваги, скористаємось її рівнянням руху: $x = x_m \sin 2\pi\nu t_2$ або $1 = 2\sin 10\pi t_2$. Тоді $\sin 10\pi t_2 = \frac{1}{2}$. Звідси $10\pi t_2 = \frac{\pi}{6}$ і відповідно $t_2 = \frac{1}{60}$ с . Отже, час, за який кулька пройде 3 см, дорівнює $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{15}$ с .

111. Куля масою 10 г рухається горизонтально з швидкістю 500 м/с і застряє в бруску масою 490 г, який закріплений на пружині жорсткістю 5000 Н/м. Визначити час, за який брусок пройде відстань 0,5 см. Тертям знехтувати. (2006 р. з. 11 к.)

Розв'язок

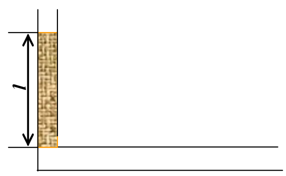
Визначимо швидкість бруска і кулі після взаємодії із закону збереження

імпульсу: $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon$. Звідси υ=10 м/с. Згідно закону збереження енергії $\frac{kx_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2}$.

$x_0 = \upsilon\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 10$ см . Циклічна частота коливань $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Запишемо рівняння гармонічних коливань: $x = x_0 \sin \omega t$, де x=0,5 см , x_0=10 см (амплітуда коливань).

$0{,}5 = 10\sin 100t$; $\sin 100t = \frac{1}{20} = 0{,}05$; $100t \approx 0{,}05$; $t = 5 \cdot 10^{-4}$ с .

112. У вертикальній частині Г-подібної скляної трубки утримується мотузка, довжина якої l. За який інтервал часу мотузка зміститься у горизонтальне коліно, коли її відпустять? Силами тертя знехтувати. (2004 р. ІІ е. 11 к.)



Розв'язок

У будь-який момент часу, коли у вертикальній частині трубки знаходиться мотузка, довжина якої x від коліна, прискорення руху мотузки $a = -\frac{m_1 g}{m} = -\frac{mxg}{lm} = -\frac{g}{l}x$. Як бачимо, прискорення руху мотузки прямо пропорційне довжині, яка знаходиться у вертикальній трубці, і обернене за напрямком. За аналогією з коливальним рухом, мотузка залишить вертикальну частину трубки за четвертину періоду. Тобто, $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$.

113. Санчата довжиною l, ковзаючи по горизонтальній поверхні, вкритій снігом, потрапляють на ділянку, посипану піском. Визначте швидкість руху санчат по снігу і час гальмування, якщо вони заїжджають на пісок рівно наполовину своєї довжини. Маса санчат m (масу вважати розподіленою рівномірно вздовж всієї довжини). Тертям санчат об сніг знехтувати, коефіцієнт тертя об пісок μ. (2004 р. ІІ е. 11 к.)

Розв'язок

Під час руху санок поверхнею, посипаною піском, діє сила тертя, яка змінюється за значенням від 0 до $F_{\text{т.max.}} = \mu mg$. Сила тертя, коли на поверхні, посипаній піском, знаходиться довжина санок x, дорівнює: $F_{\text{т}} = \mu\frac{mg}{l}x$,

де l – загальна довжина санок. Прискорення руху санок у цей момент $a = -\frac{F_{\text{т}}}{m} = -\frac{\mu g}{l}x$. Аналізуючи рівняння, бачимо, що прискорення прямо пропорційне переміщенню і обернене йому за напрямком. За таким же законом змінюється прискорення при коливальному русі. Оскільки швидкість руху санок змінюється від максимального значення до нуля, то час цієї зміни відповідає одній четвертій періоду коливального руху. Враховуючи, що $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$, а $T = \frac{2\pi}{\omega}$, одержимо: $t_{\text{гальм.}} = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2\omega} = 0{,}5\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$. За аналогією з рівнянням руху тіла під час гармонічних коливань з амплітудою $l/2$, запишемо рівняння руху санок: $x = \frac{l}{2}\sin\omega t = \frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t$. Враховуючи, що $\upsilon = x'$, одержимо: $\upsilon = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{l}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{\mu g}{l}}t\right)$. Початкова швидкість санок відповідає моменту часу $t = 0$, тобто відповідає амплітудному значенню швидкості під час коливального руху: $\upsilon_0 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{l}} = 0{,}5\sqrt{\mu g l}$.

Це співвідношення можна також одержати із закону збереження енергії, вважаючи, що квазіпружність системи $k = \frac{\mu mg}{l}$. Тоді з рівності $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}$, одержимо: $m\upsilon_0^2 = \frac{\mu mg}{l}x_0^2$. Звідси, враховуючи що $x_0 = \frac{l}{2}$, одержимо: $\upsilon_0 = 0{,}5\sqrt{\mu gl}$.

114. Після завантаження баржі період її коливань по вертикалі збільшився від 7 с до 8 с. Знайдіть масу вантажу, якщо площа поперечного перерізу баржі по ватерлінії дорівнює 600 м². Характер руху води довкола баржі вважати незмінним. (2003 р. з. 11 к.)

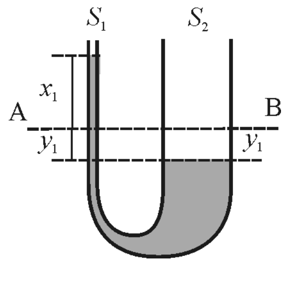
Розв'язок

З умов плавання баржі: $mg=F_в$. Якщо баржу змістити так, щоб глибина занурення змінилася на x, то рівнодійна сила $F=F_{1в}-mg$ буде спрямована у положення рівноваги. Виштовхувальна сила зросте $F_{1в} = F_в + \rho g\Delta V = F_в + \rho gSx$. За цих умов рівнодійна $F=F_в+\rho gSx - mg = \rho gSx$. Рівняння руху баржі $-F=ma$ або $-\rho gSx=ma$, звідки $a = -\frac{\rho gS}{m}x$. Отже, прискорення руху прямо пропорційне зміщенню і протилежне йому за напрямком. А це є умова виникнення гармонічних коливань. Враховуючи, що при гармонічнинх коливаннях $a = -\omega^2 x$, де ω – циклічна частота коливань баржі, одержимо: $\frac{\rho gS}{m} = \omega^2$. Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$.

Застосовуючи це рівняння для двох випадків, одержимо: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{\rho gS}}$ і $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{\rho gS}}$. Визначимо масу баржі у двох випадках і знайдемо різницю мас: $\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{\rho gS}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = 2{,}25 \cdot 10^6$ кг.

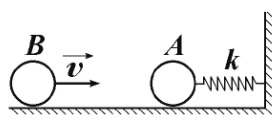
115. Визначити можливий період власних коливань води у сполучених посудинах, якщо площа перерізу лівої трубки S_1, правої S_2. Капілярними явищами і тертям при русі рідини знехтувати. (2003 р. II е. 11 к.)

Розв'язок



Початковий рівень рідини АВ. Коли рівень води підніметься у лівому коліні, то різниця рівнів $\Delta V_1 = (x_1 + y_1)S_1$. Оскільки $x_1S_1 = y_1S_2$, то виразивши y_1 і підставивши у перше рівняння, отримаємо: $\Delta V_1 = \frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)x_1$. Запишемо вираз для сили, яка повертає рідину масою $\Delta m_1=\rho \cdot \Delta V_1$ у положення рівноваги при її підніманні на x_1 (у лівому коліні) та опусканні на y_1 (у правому коліні) відносно деякого рівноважного положення АВ. $F_1 = \Delta m_1 g = \rho g\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)x_1 \Rightarrow k_{1сист.} = \rho g\frac{S_1}{S_2}(S_1 + S_2)$ (по аналогії з силою пружності, оскільки сила протилежно напрямлена до зміщення). Аналогічно, коли рівень води підніметься у правому коліні: $\Delta V_2 = (x_2 + y_2)S_2$, $F_2 = \rho g\frac{S_2}{S_1}(S_1 + S_2)y_2 \Rightarrow k_{2сист.} = \rho g\frac{S_2}{S_1}(S_1 + S_2)$. Тоді півперіод коливань $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ і $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$ визначається масою і коефіцієнтом k системи, коли рідина перебуває вище в лівому коліні і відповідно у правому. Отже $T = \pi\sqrt{m}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right) = \pi\sqrt{\frac{m}{\rho g}\frac{(S_1 + S_2)}{S_1S_2}}$.

116. На гладкій горизонтальній поверхні розташована куля А масою m, яка з'єднана пружиною жорсткістю k з нерухомою вертикальною стінкою. У початковий момент часу пружина не деформована. Куля В масою $m/2$ рухається із швидкістю υ вздовж осі симетрії пружини. Відбувається центральний абсолютно пружний удар куль. Описати закони руху куль А і В після зіткнення. (2009 р. III е. 11 к.)



Розв'язок

Визначимо швидкості $\upsilon_А$ та $\upsilon_В$ кульок після центрального удару. Запишемо закони збереження імпульсу та енергії (напрями руху кульок після удару будемо вважати співпадаючими з напрямом швидкості υ): $m_B\upsilon = m_B\upsilon_B + m_A\upsilon_A$, $\frac{1}{2}m_B\upsilon^2 = \frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2 + \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2$. Перепишемо ці рівняння по-іншому: $m_B(\upsilon - \upsilon_B) = m_A\upsilon_A$ (1) і $m_B(\upsilon^2 - \upsilon_B^2) = m_A\upsilon_A^2$ (2). Поділимо рівняння (2) на (1). Отримаємо $\upsilon + \upsilon_B = \upsilon_A$. Підставивши це рівняння в (1), отримаємо: $\upsilon_A = \dfrac{2m_B}{m_A + m_B}\upsilon = \dfrac{2}{3}\upsilon$, $\upsilon_B = \dfrac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\upsilon = -\dfrac{1}{3}\upsilon$. Після удару кулька B буде рухатися рівномірно прямолінійно зі швидкістю $\upsilon_B = -\upsilon/3$, тобто в напрямку, протилежному початковому руху: $x_B = -\dfrac{1}{3}\upsilon t$. Після удару кулька A буде коливатися відносно початкового положення за законом, який знаходимо з рівняння $m_A a = -kx$ (вісь OX направлена вздовж швидкості υ). Загальний розв'язок даного рівняння $x_A = A\sin(\omega t + \varphi)$, де A – амплітуда коливань, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – частота коливань, φ– початкова фаза коливань. Із початкових умов $(t_0 = 0, x_0 = 0)$ одержимо: $\varphi = 0$. Із закону збереження енергії для руху кульки A $\dfrac{m_A \upsilon_A^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}$ одержимо: $A = \upsilon_A\sqrt{\dfrac{m_A}{k}} = \dfrac{2\upsilon}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Таким чином кулька A здійснює малі коливання за законом $x_A = \dfrac{2\upsilon}{3}\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$.