Механічна робота. Потужність. Закон збереження механічної енергії

119. Уламок античної мармурової скульптури об'ємом 0,2 м^3 рівномірно піднімають з водоймища, глибина якого 2 м. Яка мінімальна потужність механізму, якщо підйом здійснювався протягом 40 с? (2008 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

$N = \frac{A}{t}$, $A = F \cdot S$. На скульптуру діють сила тяжіння і виштовхувальна сила: $F = mg - \rho_в gV = \rho_м gV - \rho_в gV$.

Тоді $N = \frac{gV(\rho_м - \rho_в) \cdot S}{t}$. Підставивши дані отримаємо: $N = 170$ Вт.

120. Час проходження одного кола траси в змаганнях "Формула-1" першим спортсменом t_1=120 с, другим – t_2=123 с. Після 21 кола у першого автомобіля відбулася поломка, внаслідок чого його потужність зменшилася на 15 %, а сила тяги – на 10 %. Який з автомобілів на фініші буде першим, якщо кожен з них повинен проїхати 36 кіл. Вважати рухи автомобілів на окремих ділянках рівномірними, а зміну швидкості під час поломки першого автомобіля миттєвою. (2005 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Час проходження траси другим спортсменом t_3=123·36=4428 с.

Час проходження першим спортсменом 21 кола t_4=120·21=2520 с.

До поломки швидкість першого автомобіля $\upsilon_1 = \frac{N_1}{F_1}$. Після поломки швидкість першого автомобіля $\upsilon = \frac{N}{F} = \frac{0{,}85N_1}{0{,}9F_1} = \frac{0{,}85}{0{,}9}\upsilon_1$. Нехай t_5 – час, за який цей автомобіль пройде 15 кіл, що залишилися. Тоді $\frac{t_4 \cdot \upsilon_1}{21} = \frac{t_5 \cdot \upsilon}{15} = \frac{t_5 \cdot 0{,}85\upsilon_1}{0{,}9 \cdot 15}$. t_5=1905,88 с. Весь час t=4425,88 с. Отже, гонку виграє перший автомобіль.

121. З колодязя глибиною H=20 м дістають воду відром. Внизу відро заповнюється водою до країв. Внаслідок витікання через щілину в дні при підніманні відра частина води виливається назад у колодязь. Відро піднімається рівномірно. Швидкість витікання води стала. Визначте роботу з піднімання відра, якщо до кінця піднімання у відрі залишалося 2/3 початкової кількості води. Маса порожнього відра m=2 кг, його об'єм V=15 л. (2005 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Сила, що прикладається при підніманні відра: $F = mg+pgV$.

Її максимальне значення у нижній точці, мінімальне – у верхній.

$F_{max} = mg + \rho gV$, $F_{min} = mg + \frac{2}{3}\rho gV$.

Оскільки вода витікає рівномірно, відро підніматиметься рівномірно, то роботу можна розрахувати через середню силу: $F_c = \frac{F_{max} + F_{min}}{2}$.

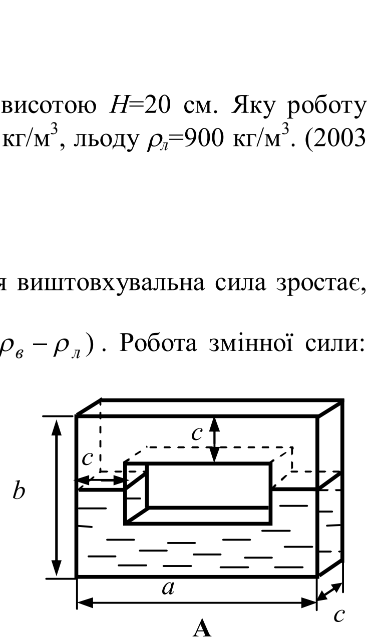
$$A = F_c \cdot H = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} \cdot H = \left(m + \frac{\rho V\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{2} \right) gH \approx 2900 \text{ Дж} = 2{,}9 \text{ кДж}.$$

122. У воді плаває шматок льоду з площею поперечного перерізу S=2 м^2 і висотою H=20 см. Яку роботу необхідно виконати, щоб повністю занурити лід у воду? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, льоду $\rho_л$=900 кг/м^3. (2003 р. ІІ е. 8 к.)

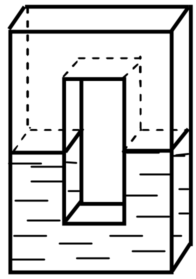
Розв'язок

Висоту частини шматка льоду, яка виступає над водою, знайдемо із співвідношення: $mg = F_A = \rho_в gS(H - h_0) \Rightarrow h_0 = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в} H$. По мірі занурення виштовхувальна сила зростає, тому слід прикладати більшу силу, максимальне значення якої: $F_{max} = gSH(\rho_в - \rho_л)$. Робота змінної сили: $A = F_{сер} \cdot h_0 = \frac{F_{max} \cdot h_0}{2} = \frac{gSH^2(\rho_в - \rho_л)^2}{2\rho_в}$. Після підстановки A= 4 Дж.

123. Яку мінімальну роботу слід виконати, щоб до половини заповнену водою посудину перевести з положення А в положення В? Масою посудини знехтувати. Отвір знаходиться точно посередині посудини. (2003 р. ІІІ е. 8 к.)



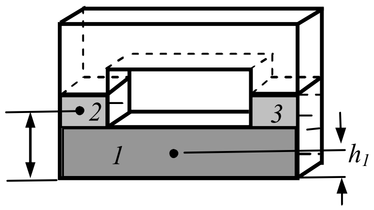
А



В

Розв'язок

Якщо посудину перевертати дуже повільно, то виконувана робота в цьому випадку буде мінімальною і дорівнюватиме збільшенню потенціальної енергії води. Знайдемо потенціальну енергію води в першому випадку. Розіб'ємо нашу воду на три частини і знайдемо їхні потенціальні енергії відносно нижнього рівня (рівня стола).



Об'єм першої частини води $V_1 = ac^2$. Об'єм другої частини води $V_2 = c^2 \cdot \frac{b-2c}{2}$. Об'єм другої і третьої разом $V_{2,3} = c^2b - 2c^3$. Висота $h_1 = \frac{c}{2}$. Висота $h_2 = c + \frac{b-2c}{4} = \frac{2c+b}{4}$. Тоді потенціальна енергія всієї води у випадку А: $E_{n1} = \rho g(V_1 \cdot h_1 + V_{2,3} \cdot h_2)$.

$$E_{n1} = \rho g\left(\frac{ac^3}{2} + \frac{2c^3b + c^2b^2 - 4c^4 - 2bc^3}{4}\right).$$

Коли посудину перевернути, то сторони a і b поміняються місцями. По аналогії можна записати:

$$E_{n2} = \rho g\left(\frac{bc^3}{2} + \frac{2c^3a + c^2a^2 - 4c^4 - 2ac^3}{4}\right).$$

Зміна потенціальної енергії $\Delta E_n = E_{n2} - E_{n1}$.

$$\Delta E_n = \frac{\rho g c^2}{4}\left(2bc + 2ca + a^2 - 4c^2 - 2ac - 2ac - 2cbb^2 + 4c^2 + 2bc\right).$$

$$\Delta E_n = \frac{\rho g c^2}{4}\left(2bc + a^2 - 2ac - b^2\right).$$

Після перетворень $A = \frac{\rho g c^2}{4}(a-b)(a+b-2c)$.

124. У неглибокій канаві з водою лежить труба, заповнена водою. Лівий кінець труби щільно закритий, а правий відкритий. Трубу піднімають за лівий кінець до вертикального положення так, що правий кінець залишається у воді. Яка робота виконується під час підняття труби при наступних даних: маса труби (без води) 20 кг, довжина труби 20 м, площа поперечного перерізу труби 0,01 м^2? Атмосферний тиск p_0=10^5 Па. (2013 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Робота йде на зміну потенціальної енергії труби і зміну потенціальної енергії води, що знаходиться в трубі. Центр тяжіння труби піднімається на висоту $\frac{l_T}{2}$, тому потенціальна енергія збільшиться на $\frac{1}{2}m_T g l_T$, де m_T – маса труби, а l_T – її довжина. При підніманні труби вода частково витікатиме з неї. Коли труба займе вертикальне положення, висота рівня води $h_\text{в}$ буде такою, що тиск стовпа рідини (води) дорівнюватиме атмосферному тиску: $p_A = \rho_в g h_в$. Звідси маємо: $h_в = \frac{p_A}{\rho_в g} = \frac{p_0}{\rho_в g}$. Маса піднятої води $m_в = \rho_в S_T h_в$. Центр тяжіння піднятої води знаходиться на висоті $\frac{h_в}{2}$, тому зміна потенціальної енергії води $\Delta E_n = \frac{1}{2}m_в g h_в = \frac{1}{2}\rho_в g S_T \cdot \frac{p_0^2}{\rho_в^2 g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S_T \cdot p_0^2}{\rho_в g}$. Повна робота рівна сумі зміни потенціальних енергій, тобто $A = \frac{1}{2}m_T g l_T + \frac{1}{2}\frac{S_T \cdot p_0^2}{\rho_в g}$. Після підстановки $A = 7000$ Дж.

Прості механізми. Коефіцієнт корисної дії механізмів

125. Хлопчик зрівноважив горизонтально важіль так, що точка обертання знаходиться на відстані 30 см і 70 см від його кінців. В розпорядженні хлопчика було 20 тягарців вагою по 1 Н. По скільки тягарців хлопчик підвісив до кінців важеля, якщо для досягнення рівноваги він використав усі тягарці? Масу важеля не враховувати. (2014 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Позначимо ліве плече l_1=0,3 м, а праве l_2=0,7 м. Нехай вага тягарців, підвішених до лівого краю F_1, тоді вага тягарців, підвішених до правого краю F_2=20 Н–F_1. Запишемо правило моментів: $\frac{F_1}{20-F_1}=\frac{l_2}{l_1}$. $\frac{F_1}{20-F_1}=\frac{0{,}7}{0{,}3}$.

Звідси F_1=14 Н, F_2=6 Н. Отже до лівого краю потрібно підвісити 14 тягарців по 1 Н, а до правого 6 тягарців по 1 Н.

126. Зважуючи на нерівноплечому невагомому важелі хлопчик встановив, що якщо кавун на лівому плечі, то маса гир для зрівноваження 4 кг, а коли він на правому плечі – маса гир 2,5 кг. Яка справжня маса кавуна? (2003 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

З умови рівноваги важеля для двох випадків:

$\frac{mg}{m_1 g}=\frac{l_2}{l_1}$, $\frac{m_2 g}{mg}=\frac{l_2}{l_1}$, звідки $\frac{m}{m_1}=\frac{m_2}{m}$. Тоді $m=\sqrt{m_1 m_2}\approx 3{,}2$ кг .

127. Продавець пропонує придбати рибу, дозволяючи покупцю самостійно її зважити на нерівноплечих терезах, виготовлених з палиці, шальок та мотузки з використанням набору гир. Причому дозволяється:

- класти рибу лише на ліву шальку терезів;
- проводити процес зважування (досягаючи рівноваги шальок підкладанням гир), при цьому не знімаючи рибу з лівої шальки, не більше двох разів.

Чи можливо за таких умов визначити справжню масу риби? «Палиця-терези» з шальками початково займають горизонтальне положення (2004 р. II е. 8 к.)

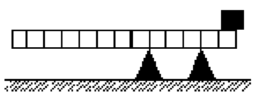
Розв'язок

Один з можливих розв'язків такий: Підвісити рибу на ліву чашку і зрівноважити терези, поклавши на праву чашку гирі масою m_1. З рівноваги терезів (важеля) $m_p g l_1 = m_1 g l_2$, де l_1 і l_2 - довжини плеч терезів-важеля, довжина яких є невідомою. Покласти на ліву чашку до риби гирю відомої маси m_2 і знову зрівноважити терези, поклавши на праву чашку гирю масою m_3. Рівновага за цих умов запишеться так: $(m_p+m_2)gl_1=(m_1+m_3)gl_2$.

Поділивши рівності, отримаємо: $\frac{m_p}{m_p+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_3}$, звідки $m_p=\frac{m_1 m_2}{m_3}$.

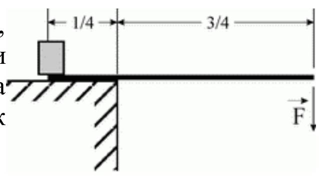
128. Лінійка масою 50 г лежить на двох опорах, як показано на малюнку. На її краю лежить тягарець. Визначити, якою може бути маса тягарця, щоб лінійка з тягарцем перебували у стані рівноваги. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок



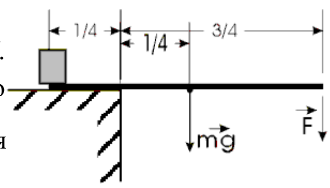
Якщо тягарець занадто легкий, то лінійка буде обертатися навколо лівої точки опори. Запишемо умову рівноваги важеля: $m_л g\cdot 1{,}5l=m_m g\cdot 5l$; $1{,}5\cdot m_л=5\cdot m_m$; m_m=15 г. Якщо тягарець занадто важкий, то лінійка буде обертатися навколо правої точки опори. Запишемо умову рівноваги важеля: $m_л g\cdot 4{,}5l=m_m g\cdot 2l$; $4{,}5\cdot m_л=2\cdot m_m$; m_m=112,5 г. Отже, маса тягарця може бути від 15 г до 112,5 г, інакше лінійка перевернеться або в одну, або в іншу сторону.

129. На платформі стоїть масивний куб. Підсунувши під куб плоский лом, виступаючий за край платформи на три чверті своєї довжини, і приклавши вертикально вниз до протилежного кінця лома силу F, куб піднімають. Маса лома m. Знайдіть масу лома тієї ж довжини, який піднімав би куб тільки за рахунок власної ваги. (2007 р. з. 8 к.)



Розв'язок

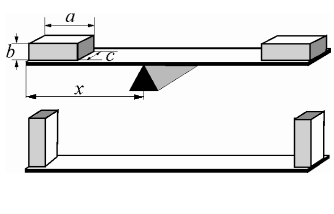
Запишемо правило моментів:



$M_1=M_2+M_3$, де M_1 - момент, створений кубом, а M_2 і M_3 ломом та силою F. Потрібно відмітити, що розв'язок задачі не залежить від конкретного місцезнаходження центра мас куба відносно лома. $M_1=mg\cdot\frac{l}{4}+F\cdot 3\frac{l}{4}$, Для другого лома $M_1=m'g\cdot\frac{l}{4}$. Тоді: $m'g\cdot\frac{l}{4}=mg\cdot\frac{l}{4}+F\cdot 3\frac{l}{4}$. $m'g=mg+3F$.

$m'=m+3\frac{F}{g}$.

130. На краю невагомої дошки довжиною l=1 м поклали, як показано на малюнку, два бруски однакової форми і розмірів, але виготовлені з матеріалів різної густини. Кожен брусок має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри якого $a\times b\times c$ (a=30 см, b=10 см, c=15 см). Дошку зрівноважили на опорі, розміщеній на відстані x=40 см від лівого краю дошки. Потім бруски розвернули і розмістили на дошці так, як



показано на іншому малюнку. Де потрібно розмістити опору, щоб дошка знову знаходилася в рівновазі? (2010 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Позначимо масу лівого бруска m_1, правого m_2, а відстань від лівого краю дошки до точки опори y. Тоді умова рівноваги для першого випадку:

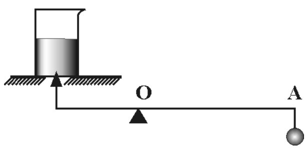
$m_1\left(x-\dfrac{a}{2}\right)=m_2\left(l-x-\dfrac{a}{2}\right)$ (1) . Умова рівноваги для другого випадку:

$m_1\left(y-\dfrac{b}{2}\right)=m_2\left(l-y-\dfrac{b}{2}\right)$ (2). Після підстановки значень в рівняння (1):

$0{,}25m_1=0{,}45m_2$ або $m_1=\dfrac{9}{5}m_2$. Після підстановки значень в рівняння (2):

$\dfrac{9}{5}(y-0{,}05)=1-y-0{,}05$, y=0,12 м.

131. Круглий отвір у дні посудини закрито корком конічної форми, який знаходиться на кінці важеля, що може обертатися у точці О. Корок утримується тягарем, підвішеним у точці А на другому кінці важеля. Вода починає підтікати з-під корка, коли рівень води у посудині перевищує h=40 см. До якого рівня можна налити воду у посудину, якщо до важеля підвісити додатковий тягар удвічі меншої маси посередині плеча ОА? (2005 р. ІІІ е. 8 к.)



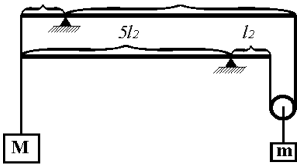
Розв'язок

Запишемо умову рівноваги важеля для двох випадків:

1. $\rho ghSl_1=mgl_2$; 2. $\rho gh_xSl_1=mgl_2+\dfrac{m}{2}g\dfrac{l_2}{2}$, де S – площа посудини, l_1 – плече сили тиску води, l_2 – плече ОА, m – масса тягаря, h_x – шуканий рівень води в посудині..

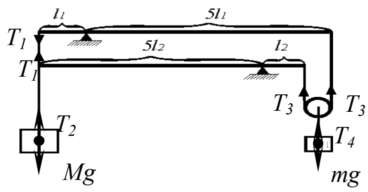
З цих двох рівнянь отримуємо $\dfrac{h_x}{h}=1+\dfrac{1}{4}$; $h_x=\dfrac{5}{4}h=50$ см.

132. Ліві кінці важелів з довжинами плеч l_1, $5l_1$ *і* $5l_2$, l_2 відповідно з'єднані ниткою, до якої підвішено вантаж масою M. До їхніх правих кінців за допомогою нитки підвішено рухомий блок з вантажем масою m=1 кг. Система зна-ходиться в рівновазі. Вважаючи, що важіль та блок невагомі, визначити M. (2005 р. ІІІ е. 9 к.)



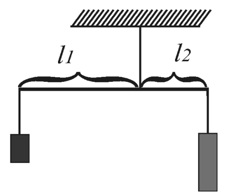
Розв'язок

Позначимо сили натягу ниток через T_1, T_2, T_3, T_4. Умови рівноваги для верхнього і нижнього важеля запишуться так: $T_1l_1=T_3\cdot 5l_1$; $(T_2-T_1)\cdot 5l_2=T_3l_2$. Оскільки блоки і вантажі знаходяться у рівновазі, то можна записати: $Mg=T_2$, $mg=T_4=2T_3$. З даних рівнянь визначимо M.



$T_1=\dfrac{5}{2}mg$; $(Mg-\dfrac{5}{2}mg)\cdot 5=\dfrac{mg}{2}$; $5Mg=13mg$; $M=\dfrac{13}{5}m=2{,}6$ кг .

133. Два тіла з міді та алюмінію зрівноважені на невагомому нерівноплечому важелі, причому $l_1=2l_2$. Після того, як тіла занурили у невідому рідину, для збереження рівноваги їх поміняли місцями. Визначити густину невідомої рідини. ρ_a=2,7 г/см^3, $\rho_м$=8,9 г/см^3. (2006 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Умова рівноваги важеля: $m_1gl_1=m_2gl_2$; $2\rho_1V_1l_2=\rho_2V_2l_2$; $2\rho_1V_1=\rho_2V_2$ (1).

Після занурення в рідину і заміни тіл місцями:

$(m_2g-\rho V_2g)l_1=(m_1g-\rho V_1g)l_2$; $(\rho_2V_2-\rho V_2)\cdot 2l_2=(\rho_1V_1-\rho V_1)l_2$; $V_1(\rho_1-\rho)=2V_2(\rho_2-\rho)$ (2).

Поділивши друге рівняння на перше, одержимо: $\dfrac{\rho_1-\rho}{2\rho_1}=\dfrac{2(\rho_2-\rho)}{\rho_2}$.

$\rho_1\rho_2-\rho\rho_2=4\rho_1\rho_2-4\rho_1\rho$. Звідси $\rho=\dfrac{3\rho_1\rho_2}{4\rho_1-\rho_2}$.

Оскільки не відомо де саме підвісити мідне, а де алюмінієве тіло то можливі два розв'язки ρ=2,19 г/см^3 або ρ=37,94 г/см^3. Оскільки найбільша густина у ртуті (13,6 г/см^3), то очевидно, що другий розв'язок нереальний.

134. На один кінець легенького стрижня довжиною 20 см нанизано намистину із слонової кістки (густина ρ_1=2 г/см^3). На відстані 3 см від іншого кінця розміщена друга намистинка. Середина стрижня підвішена до нитки і стрижень займає горизонтальне положення у повітрі. Якщо систему опустити у воду, то для збереження рівноваги другу намистину необхідно перемістити на кінець стрижня. Яка густина другої намистини? Густина води $\rho_в$=1 г/см^3. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Умова рівноваги в повітрі: $m_1 g\frac{l}{2}=m_2 g\left(\frac{l}{2}-x\right)$. Але $m_1=\rho_1 V_1$, а $m_2=\rho_2 V_2$, то відношення об'ємів кульок: $\frac{V_2}{V_1}=\frac{\rho_1 l}{\rho_2(l-2x)}$ (1). Умова рівноваги у воді:

$(m_1 g-F_{A1})\frac{l}{2}=(m_2 g-F_{A2})\frac{l}{2}$. Відношення об'ємів кульок $\frac{V_2}{V_1}=\frac{\rho_1-\rho_в}{\rho_2-\rho_в}$ (2).

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), отримаємо:

$$\rho_2=\frac{\rho_1\rho_в l}{\rho_в(l-2x)+2\rho_1 x}=1{,}53\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

135. На кінцях легенького стрижня довжиною l=20 см закріплено дві кульки зі свинцю та алюмінію. Стрижень шарнірно закріплено посередині й опущено у воду, де він перебуває в рівновазі. На яку відстань треба пересунути по стрижню другу кульку, щоб рівновага відновилася в повітрі? Густина свинцю ρ_1=8,9 г/см^3, алюмінію ρ_2=2,7 г/см^3, води ρ_0=1 г/см^3 (2007 р. з. 8 к.)

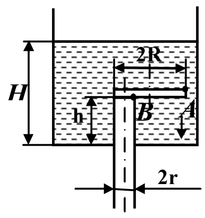
Розв'язок

Запишемо умову рівноваги стрижня у воді:

$$\left(\rho_1 gV_1-\rho_0 gV_1\right)\frac{l}{2}=\left(\rho_2 gV_2-\rho_0 gV_2\right)\frac{l}{2} \quad (1);$$

у повітрі: $\rho_1 gV_1\frac{l}{2}=\rho_2 gV_2\left(\frac{l}{2}-x\right)$ (2), де V_1, V_2 – об'єми кульок.

Визначивши з першого рівняння $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\rho_2-\rho_0}{\rho_1-\rho_0}$, і підставивши в друге рівняння, дістанемо: $x=\frac{l\rho_0\left(\rho_1-\rho_2\right)}{2\rho_2\left(\rho_1-\rho_0\right)}\approx 3{,}1$ см.

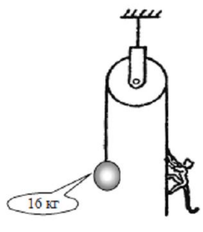


136. Із посудини, заповненої водою виходить трубка радіусом r і висотою h. Трубка закрита круглою пластиною радіусом R і масою M, яку притискує до трубки вода. З якою силою F треба подіяти на пластину в точці А (в напрямку стрілки), щоб вона повернулася і відкрила трубку. Посудину заповнено водою до висоти H. Густина води ρ. Товщиною пластини знехтувати. (2002 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Пластина повертатиметься навколо точки В. Оскільки товщиною пластини нехтують, то тиски води з обох боків пластини зрівноважуються скрізь, крім площини над трубкою. Тут сила тиску води $F_т=\rho g(H-h)\pi r^2$. Її момент відносно точки В: $\rho g(H-h)\pi r^3$. Пластина повертатиметься, якщо $\rho g(H-h)\pi r^3<Mg(R-2r)+F(2R-2r)$.

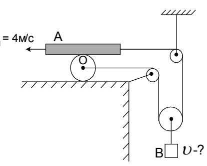
Тоді $F>\frac{\rho\left(H-h\right)\pi r^3-M\left(R-2r\right)}{2\left(R-r\right)}g$.



137. Через легкий блок перекинута мотузка, на якій зрівноважені мавпа і тягар так, як показано на малюнку. Яку роботу виконає мавпа, якщо вона підніметься по мотузці вгору на 1 м? (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

При підніманні мавпи тягар теж підніметься на 1 м. Тому мавпа виконає роботу $A=2mgh$=320 Дж.

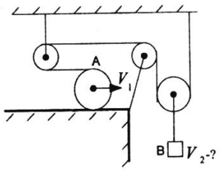


138. У системі тіл дошка А рухається зі швидкістю υ_1 = 4 м/с, циліндр О котиться без проковзування. Яка швидкість тіла В? (2007 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Швидкість осі циліндра О υ_2=2 м/с. Нехай за час t верхня нитка перемістилась на $\upsilon_1 t$, а нижня нитка – на $\upsilon_2 t$. Тоді нитка, до якої підвішено вантаж за цей час переміститься на відстань $\upsilon t = \frac{\upsilon_1 t_1 + \upsilon_2 t}{2}$.

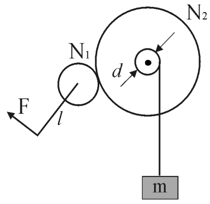
Звідси $\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = 3\frac{\text{м}}{\text{с}}$.



139. В механічній системі, зображеній на рисунку, циліндр А котиться без проковзування зі швидкістю υ_1=2 м/с і намотує на себе нитку. Яка швидкість υ_2 тягарця В? (2007 р. з. 10 к.)

Розв'язок

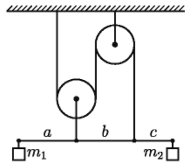
Точка А циліндра і нитки має швидкість $\upsilon_3=2\upsilon_1$= 4 м/с. Верхня нитка має таку саму швидкість, що і точка А, але напрямлену вліво. Це означає, що тіло В піднімається вверх зі швидкістю $\upsilon_2=0{,}5\upsilon_3$=2 м/с.



140. Механізм складається з двох шестерень, які мають 12 і 60 зубців. До меншої шестерні прикріплено рукоятку довжиною l=40 см, до осі більшої – вал діаметром d=4 см, на який намотано трос з підвішеним вантажем. Якої маси вантаж можна підняти, прикладаючи до рукоятки силу 200 Н? (2007 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Щоб більша шестерня зробила 1 оберт, меншій потрібно 60/12=5 обертів. Вантаж при цьому підніметься на відстань πd, а рука пройде шлях $5\cdot 2\pi l$. Тоді програш в шляху і відповідно виграш в силі буде $\frac{10\pi l}{\pi d} = 100$. Отже $mg = 100F$; m=2000 кг.

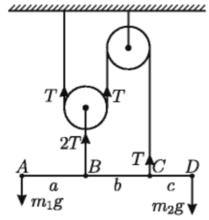


141. Важіль підвішений до системи блоків так, що точки підвісу ділять його у відношенні $a : b : c$. Блоки, важіль і нитки невагомі, тертя немає. Яке відношення мас вантажів m_1 і m_2, якщо система знаходиться в рівновазі? (2011 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

На вантаж m_1 діє сила тяжіння рівна $m_1 g$.

На вантаж m_2 діє сила тяжіння рівна $m_2 g$.

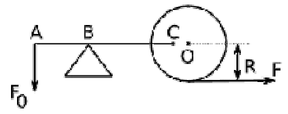


Нехай в точці С з боку нитки, до якої підвішений важіль, діє сила реакції T. Блок 1 – рухомий, а блок 2 – нерухомий, тому в точці В з боку нитки, до якої підвішений важіль діє сила реакції $2T$.

Запишемо правило моментів відносно осі, що проходить через точку В (обертання за годинниковою стрілкою беремо за додатнє):

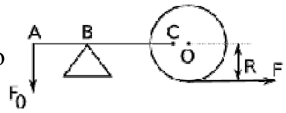
$m_2 g\cdot(c+b) - T\cdot b - m_1 g\cdot a = 0$ (1);

через точку С: $m_2 g\cdot c + 2T\cdot b - m_1 g\cdot(a+b) = 0$ (2). З рівняння (1) виражаємо Tb і підставляємо в (2). Після спрощень отримаємо: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2b+3c}{3a+b}$.



142. На блок радіусом R = 12 см, що закріплений на осі О, намотана мотузка, яку тягнуть з силою F = 10 Н. В точці С до блока прироблено легкий стержень АС, який спирається на нерухому опору в точці В. При цьому ВС = 30 см, АВ = 15 см, ОС = 4 см. Яку силу F_0 потрібно прикласти до лівого кінця стержня, щоб вся конструкція знаходилась в рівновазі? (2012 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок



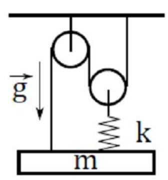
Розглянемо блок, закріплений на осі О. Цей блок можна вважати важелем з віссю обертання в точці О.

СО і R – це плечі сил F_1 і F відповідно. (F_1–сила, прикладена в точці С вертикально вниз)

Отож, умова рівноваги запишеться: $F_1\cdot OC = F\cdot R$. Звідси $F_1 = \frac{F\cdot R}{OC}$.

$F_1 = \frac{10\cdot 12}{4} = 30$ Н. Розглянемо важіль АС, який спирається на нерухому опору в точці В. Умова рівноваги важеля для даного випадку:

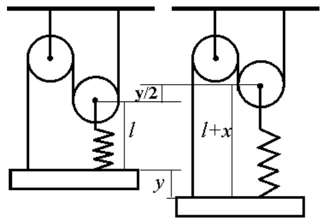
$F_0\cdot AB = F_1\cdot BC$. Звідси $F_0 = \frac{F_1\cdot BC}{AB}$. $F_0 = \frac{30\cdot 30}{15} = 60$ Н.



143. В системі блоків, зображеній на малюнку, балку утримують в горизонтальному положенні так, що пружина не розтягнута. Жорсткість пружини k=200 Н/м, маса балки m=9 кг, нитки і блоки ідеальні. Балку відпускають і система знову приходить в стан рівноваги так, що балка горизонтальна. Визначте, на скільки розтягнеться пружина і на яку відстань зміститься балка від початкового положення. (2015 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай видовження пружини x, а в нитці виникає сила натягу T. Тоді в пружині виникає сила пружності $F=kx$. На правий блок діє ця сила пружності і сила натягу з боку ниток $2T$ (блок рухомий). $2T=kx$, звідки $T=\frac{kx}{2}$.

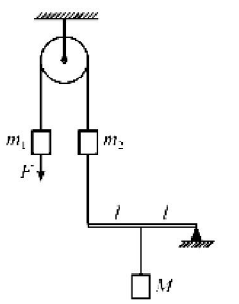


Розглянемо тепер сили, які діють на балку: Силя тяжіння mg донизу, сила пружності kx і сила нятягу T доверху. Отже $mg=kx+T$. $mg=\frac{3kx}{2}$, звідки $x=\frac{2mg}{3k}$=0,3 м.

Нехай довжина нерозтягнутої пружини l, а балка опустилась на y.

Тоді центр рухомого блока піднявся на $y/2$, оскільки нитка нерозтяжна, а нова довжина пружини стала $l+x$.

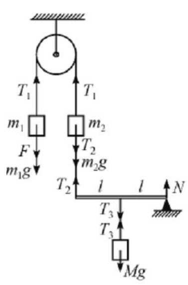
Отже $l+x=\frac{y}{2}+l+y$. Звідси $y=\frac{2}{3}x$. y=0,2 м.



144. З якою вертикально направленою силою F потрібно утримувати вантаж масою m_1 для того, щоб зображена на малюнку конструкція з невагомого блока, невагомих ниток, легкого стрижня і вантажів знаходилась у рівновазі? Маси вантажів m_1=1 кг, m_2=2 кг, M=3 кг.

(2016 р. ІІІ е. 8 к.)

Класичний розв'язок .



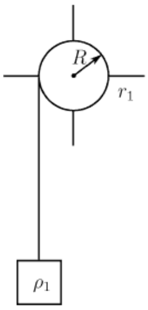
Зобразимо на малюнку сили, діючі на вантажі та на стрижень. На вантаж m_1 діють сила тяжіння m_1g і сила натягу T_1 з боку перекинутої через блок нитки. Оскільки тертя в осі блоку немає, то на вантаж m_2 з боку цієї ж нитки діє така ж сила натягу T_1, а також сила тяжіння m_2g і сила натягу T_2 з боку нитки, що з'єднує вантаж m_2 і лівий кінець стрижня. На лівий кінець стрижня з боку нитки діє сила її натягу T_2, на середину стрижня – сила натягу іншої нитки T_3, а на правий кінець стрижня – сила реакції опори N. Оскільки всі вантажі знаходяться в рівновазі, то для кожного з них сума прикладених сил дорівнює нулю: $m_1g+F=T_1$ (1); $m_2g+T_2=T_1$ (2); $Mg=T_3$ (3).

Крім того, оскільки стрижень знаходиться в рівновазі, для нього справедливе правило важеля, записане відносно точки опори: $T_2\cdot 2l=T_3\cdot l$ (4). З рівнянь (3) і (4) $T_2=\frac{Mg}{2}$=15 Н. З рівняння (2) T_1=35 Н. З рівняння (1) F=25 Н.

Аналітичний розв'язок.

Оскільки нерухомий блок не дає виграшу в силі, то на лівий кінець стрижня (важеля) буде діяти сила (m_2g–m_1g) направлена донизу. Нерухомий блок змінює напрям дії сили, отже сила F, прикладена до вантажу m_1 буде діяти на лівий кінець стрижня (важеля) вгору. Запишемо правило моментів відносно точки опори. $(m_2g-m_1g)\cdot 2l+Mg\cdot l=F\cdot 2l$. Звідси F=25 Н.

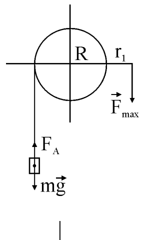
145. До блока радіуса R=40 см, закріпленого на осі, прироблені ручки. На блок намотана міцна нитка. За допомогою цього пристрою людина піднімає вантаж з води. Виявилося, що при довжині ручок r_1=20 см людина, прикладаючи максимальні зусилля, може підняти вантаж тільки до поверхні води (вантаж при цьому цілком занурений у воду). Якою повинна бути довжина ручок, щоб людина могла повністю витягнути вантаж з води? Густина вантажу ρ_1=5000 кг/м^3, води $\rho_в$=1000 кг/м^3. Нитку вважати невагомою і нерозтяжною. (2011 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

Правило моментів при довжині ручок $r_1=0{,}2$ м: $(mg-F_A)R=F_{\max}(R+r_1)$; $(\rho_1-\rho_в)gVR=F_{\max}(R+r_1)$ (1).

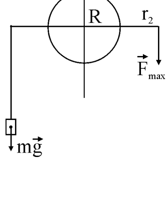
Правило моментів при довжині ручок r_2 (вантаж піднімають у повітрі, максимальні зусилля $F_{\max}$, які прикладає людина, не змінились): $mgR=F_{\max}(R+r_2)$; $\rho_1VgR=F_{\max}(R+r_2)$ (2).



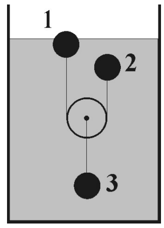
Поділимо рівняння (1) на рівняння (2):

$$\frac{(\rho_1-\rho_в)gVR}{\rho_1VgR}=\frac{F_{\max}(R+r_1)}{F_{\max}(R+r_2)};\ \rho_1(R+r_1)=(\rho_1-\rho_в)(R+r_2),$$

$$r_2=\frac{\rho_1(R+r_1)}{\rho_1-\rho_в}-R,\ r_2=0{,}35\text{ м}.$$



146. В посудині з водою (ρ_0=1000 кг/м^3) перебувають у рівновазі три кульки однакового радіуса, з'єднані нитками через рухомий блок (блок невагомий, об'ємом знехтувати). Кулька 1 занурена у воду на ¾ об'єму і її густина ρ_1=500 кг/м^3. Визначити густину кульок 2 і 3. Поверх води наливають шар бензину так, що він повністю покриває кульку 1. Яка частина об'єму цієї кульки буде при цьому занурена у воду, а яка в бензин? Густина бензину $\rho_б$= 700 кг/м^3. (2013 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

Оскільки кульки перебувають в рівновазі то рівнодійна сил, що діє на кожну кульку, рівна нулю.

I кулька: $m_1 g + T = \rho_0 g \cdot \frac{3}{4} V$ (1); II кулька: $m_2 g + T = \rho_0 g V$ (2);

III кулька: $m_3 g = 2T + \rho_0 g V$ (3).

Із першого та другого рівнянь маємо: $\rho_0 g \cdot \frac{3}{4} V - \rho_1 g V = \rho_0 g V - \rho_2 g V$; $\frac{3}{4}\rho_0 - \rho_1 = \rho_0 - \rho_2$. Звідси $\rho_2 = \frac{1}{4}\rho_0 + \rho_1 = \frac{1}{4}\cdot 1000 + 500 = 750 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. З рівняння 2 і 3 маємо: $2\rho_0 g V - 2\rho_2 g V = \rho_3 g V - \rho_0 g V$;

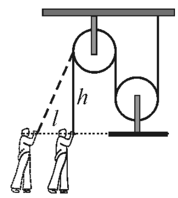
$2\rho_0 - 2\rho_2 = \rho_3 - \rho_0$. Звідси $\rho_3 = 3\rho_0 - 2\rho_2$. $\rho_3 = 3\cdot 1000 - 2\cdot 750 = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Якщо на воду налити бензин, то сила натягу мотузки, що діє на першу кульку не зміниться, бо не зміняться сили, що діють на інші кульки. Тоді умова рівноваги першої кульки: $\rho_0 g V_1 + \rho_б g (V - V_1) = \rho_1 g V + T$ (4).

З рівнянь (1) і (4) слідує, що: $\rho_0 g V_1 + \rho_б g (V - V_1) = \frac{3}{4}\rho_0 g V$.

Звідси $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{3}{4}\rho_0 - \rho_б}{\rho_0 - \rho_б} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$.

147. Робітник піднімає трубу масою m=20 кг за допомогою системи невагомих блоків так, як показано на малюнку. У початковий момент руки робітника, які тримають невагому мотузку знаходяться на одному рівні по горизонталі з трубою, яка підвішена за свою середину до рухомого блока. Довжина мотузки від рук до нерухомого блока h=4 м. Яку роботу виконає робітник, піднявши трубу, якщо він відійде по горизонталі на відстань l=3 м, утримуючи мотузку на тому ж горизонтальному рівні? (2016 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

Після того як робітник відійшов на відстань l, довжина мотузки від його рук до блока стала $L = \sqrt{h^2 + l^2}$ =5 м. Отже мотузка витягнулася на Δh=L–h=1 м. Блок, до якого під'єднана труба рухомий, отже він піднявся на висоту Δh/2=0,5 м. Робота по підняттю труби $A = mg\frac{\Delta h}{2}$ = 100 Дж. Оскільки прості механізми не дають виграшу в роботі, то робітник виконав роботу 100 Дж.

148. Вантаж піднімають за допомогою системи простих механізмів – блока і важеля. ККД блока 40 %, важеля – 30 %. Який ККД системи? (2002 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки $\eta_1 = \frac{E_1}{E}$, $\eta_2 = \frac{E_2}{E_1}$, то

$\eta_{сист,} = \frac{E_2}{E} = \frac{\eta_2 E_1}{E} = \frac{\eta_2 \eta_1 E}{E} = \eta_1 \eta_2 = 0{,}12 = 12\,\%$, де E – повна енергія, E_1 і E_2 - корисні енергії після використання відповідно блока і важеля.

149. Вантаж масою 200 кг піднімають на висоту 15 м за допомогою рухомого блока, ККД якого 80 %. Яку силу прикладають до кінця мотузки? (2011 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Коефіцієнт корисної дії $\eta = \frac{A_к}{A_з}\cdot 100\%$.

Корисна робота $A_к = mg\Delta h$. Затрачена (повна) робота $A_{з(п)} = F \cdot 2\Delta h$.

$\eta = \frac{mg\Delta h}{2F\cdot\Delta h}\cdot 100\%$. Тоді $F = \frac{m\cdot g\cdot 100\%}{2\eta} = 1250$ Н.