2.72. Позначимо швидкість катера в стоячій воді через $v\left(\frac{\text{км}}{\text{год}}\right)$, а швидкість течії річки (плота) — $u\left(\frac{\text{км}}{\text{год}}\right)$. З умов задачі маємо таку систему рівнянь:

$$\frac{96}{v+u}+\frac{96}{v-u}=14 \text{ і } \frac{96}{v+u}+\frac{72}{v-u}=\frac{24}{u}.$$

Для розв'язання цієї системи введемо нову невідому величину $\frac{v}{u}=z$. Помножимо друге рівняння системи на u, знайдемо

$$\frac{96}{z+1}+\frac{72}{z-1}=24,$$

звідки після простих перетворень дістанемо квадратне рівняння $z^2-7z=0$. Але $z\neq 0$, тому $z=7$. Підставивши $v=7u$ в перше рівняння системи, маємо:

$$\frac{6}{u}+\frac{8}{u}=7, \text{ звідки } u=2.$$

Отже, швидкість катера $v = 14\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, швидкість течії річки $u = 2\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

2.73. Якщо позначити довжину спуску через l, то число східців на одиницю його довжини буде $\frac{N}{l}$. Час пробігу зайця вздовж всього спуску дорівнює $\frac{l}{v+u}$, а пройдена відстань відносно ескалатора дорівнює $\frac{ul}{v+u}$, де v — швидкість ескалатора, а u — швидкість зайця відносно ескалатора. Час пробігу вовка $\frac{l}{v+2u}$, а пройдена ним відстань відносно ескалатора — $\frac{2ul}{v+2u}$. Число східців, нараховане зайцем і вовком, відповідно дорівнює:

$$\frac{ul}{v+u} \cdot \frac{N}{l} = 40 \text{ і } \frac{2ul}{v+2u} \cdot \frac{N}{l} = 60.$$

Розв’язавши ці рівняння як систему, дістанемо $N = 120$ східців.

2.74. Виберемо за систему відліку автомобіль, що рухається рівномірно. Під час руху автомобіля назустріч вітру дощова крапля бере участь у двох рухах: 1) вона вертикально падає згори вниз зі швидкістю v_y і 2) рівномірно рухається зі швидкістю $v_a + v_b$ в напрямі, протилежному до напряму руху автомобіля. Для швидкостей краплі можна записати відношення:

$$\frac{v_a + v_b}{v_y} = \operatorname{tg} 60^\circ.$$

Під час руху автомобіля за вітром дощова крапля рухатиметься відносно автомобіля в горизонтальному напрямі зі швидкістю $v_a - v_b$, тоді відношення швидкостей запишеться:

$$\frac{v_a - v_b}{v_y} = \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Тоді можна записати:

$$\frac{v_a + v_b}{v_a - v_b} = 3, \text{ звідки } \frac{v_a}{v_b} = 2.$$

2.75. До моменту початку поїздки спостерігача в дорозі перебувало 60 автобусів. За годину подорожі спостерігача з кінцевої зупинки назустріч йому вирушить ще 61 автобус (останній вирушить в момент прибуття на кінцеву зупинку). Отже, спостерігач побачить 121 автобус.

2.76. Спортсмен A пройде відстань s за час $t_A = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1 v_2}$, а B — за час t_B, який визначається з умови $s = \frac{v_1 + v_2}{2} t_B$. Різниця в часі Δt дорівнює $\Delta t = \frac{s(v_1 - v_2)^2}{2v_1 v_2 (v_1 + v_2)}$.

Вочевидь, $\Delta t > 0$, тобто $t_A > t_B$. Відстань, на яку спортсмен A відстане від спортсмена B на момент досягнення ним фінішу, дорівнює

$$d_2 = v_2 \Delta t = \frac{s(v_2 - v_1)^2}{2v_1(v_1 + v_2)}.$$

2.77. Якщо відстань між літаками в момент відправлення сигналу дорівнює d, то сигнал досягає зустрічного літака за час t_1, який можна визначити з умови $ct_1 + vt_1 = d$ і $t_1 = \frac{d}{c+v}$. В момент відбивання сигналу відстань між літаками дорівнює $d_1 = d - 2vt_1 = d\frac{c-v}{c+v}$. Аналогічно, час t_2 повертання сигналу можна визначити з рівняння $ct_2 + vt_2 = d_1$. Звідси $t_2 = d\frac{(c-v)}{(c+v)^2}$ і $t = t_1 + t_2 = \frac{2dc}{(c+v)^2}$. Тоді $d = \frac{(c+v)^2 t}{2c}$. Якщо $v \ll c$, то $d = \frac{1}{2}ct$.

2.78. Якщо вода відносно руля не рухається, то вона на руль не тисне.

2.79. Якщо відстань $AB = BC = l$, то час польоту від A до B і від B до A становитиме відповідно $\frac{l}{u-v}$ і $\frac{l}{u+v}$. Весь час польоту:

$$t_1 = \frac{l}{u-v} + \frac{l}{u+v} = \frac{2lu}{u^2 - v^2}.$$

Для того, щоб другий літак потрапив з A в C, його швидкість повинна бути спрямована під кутом до вітру (*рис. 275*), так що результуюча швидкість в напрямі до C становитиме $\sqrt{u^2 - v^2}$. Час його польоту в обох напрямках $t_2 = \frac{2l}{\sqrt{u^2 - v^2}}$. Другий літак прилетить швидше, і відношення часу становитиме $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

2.80. З *рис. 276* видно, що

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0 \sin\alpha + u}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{u}{v_0 \cos\alpha}.$$

Швидкість v визначимо з рівності $(v_0 \sin\alpha + u)^2 + v_0^2 \cos^2\alpha = v^2$. Дістанемо:

$$v = v_0 \sqrt{1 + 2\frac{u}{v_0}\sin\alpha + \left(\frac{u}{v_0}\right)^2}.$$

Човен перепливе річку перпендикулярно до течії, якщо $\theta = 0$. При цьому $\sin\alpha = -\dfrac{u}{v_0}$. Зрозуміло, що човен зможе перепливти річку поперек лише тоді, коли $v_0 > u_0$.

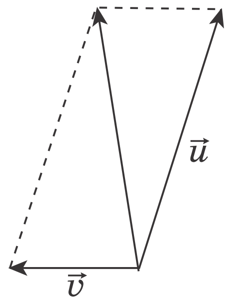

Рис. 275

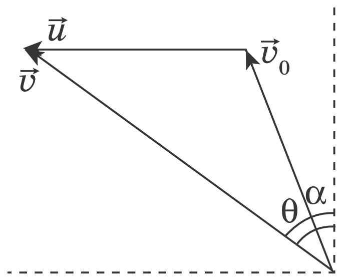

Рис. 276

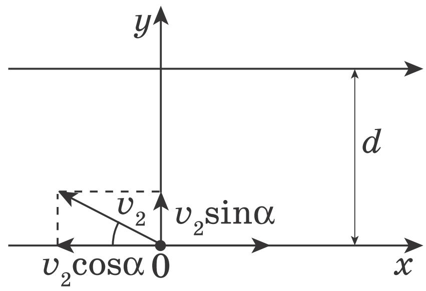

Рис. 277

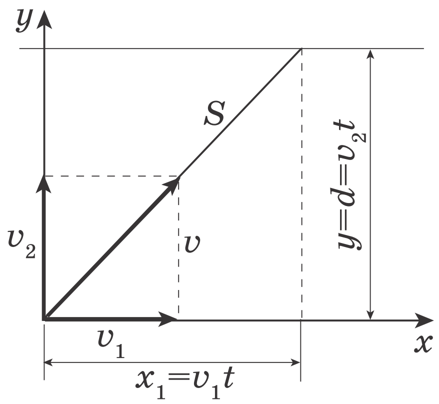

Рис. 278

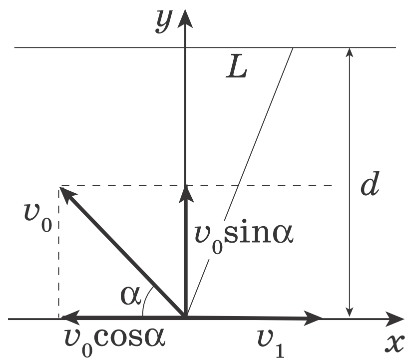

Рис.279

2.81. Візьмемо прямокутну систему координат з початком в тому місці, де спортсмен входить у воду. Вісь Ox спрямуємо вздовж берега за течією, вісь Oy — перпендикулярно до берега. Припустимо, що v_2 утворює з Ox кут α (*рис. 277*). Тоді закони руху для проекцій на координатній осі будуть:

$$x = (v_1 - v_2\cos\alpha)t \text{ і } y = v_2 \sin\alpha t.$$

Спортсмен потрапляє на другий беріг, коли $y = d$. Отже, час, необхідний для перепливання річки, $t = \dfrac{d}{v_2 \sin\alpha}$. Час буде мінімальним, коли $v_{0_y} = v_0 \sin\alpha$ максимальний, тобто $\alpha = \dfrac{1}{2}\pi$ і $v_y = v_0\sin\alpha - gt$. При $\alpha = \dfrac{1}{2}\pi$ $x = v_1 t$. Тому, коли спортсмен опиниться на другому березі, $x = x_1 = v_1 t_{\min} = \dfrac{v_1}{v_2} d$. Довжина шляху s (*рис. 278*) визначається виразом $s = \sqrt{x_1^2 + d^2} = \dfrac{d}{v_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

2.82. У системі координат, початок якої знаходиться в пункті A, вісь Ox спрямована вздовж берега за течією, а вісь Oy — перпендикулярно до берега (*рис. 279*), складові швидкості руху човна — вздовж берега $v_x = v_1 - v_0\cos\alpha$ і перпендикулярно до берега $v_y = v_0\sin\alpha$. Із законів руху для проекцій на координатні осі випливає $L = v_x t$ і $d = v_y t$, де t — час, необхідний для того, щоб досягти другого берега. Отже, $\dfrac{L}{d} = \dfrac{v_x}{v_y}$. Підставивши сюди вирази для v_x і v_y, дістанемо рівняння для v_0, з якого знаходимо:

$$v_0 = \frac{dv_1}{L\sin\alpha + d\cos\alpha}.$$

2.83. Спрямуємо вісь Ox прямокутної системи координат проти руху корабля (тобто на схід), а вісь Oy — перпендикулярно руху на північ, як показано на *рис. 280*. Складова $u_{1x} = u_1\cos\beta$ швидкості вітру відносно корабля більша за складову $u_x = u\cos\alpha$ швидкості вітру u відносно землі на значення швидкості корабля v (тут β і α — кути між курсом корабля і напрямками u_1 і u відповідно), тобто

$$u_1\cos\beta = u\cos\alpha + v. \qquad (1)$$

Складові швидкостей $u_{1y} = u_1\sin\beta$ і $u_y = u\sin\alpha$ в напрямку, перпендикулярному до руху корабля, рівні між собою, тобто

$$u_1\sin\beta = u\sin\alpha. \qquad (2)$$

Щоб виключити невідомий кут β, піднесемо (1) і (2) до квадрата і додамо почленно. В результаті дістанемо $u_1^2 = u^2 + v^2 + 2vu\cos\alpha$. Звідси $u = -v\cos\alpha \pm \sqrt{v^2\left(\cos^2\alpha - 1\right) + u_1^2}$, або, враховуючи, що $\alpha = 45^\circ$,

$$u = -\frac{v}{\sqrt{2}} + \sqrt{u_1^2 - \frac{1}{2}v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2u_1^2 - v^2} - v\right).$$

Ми відкинули від'ємний корінь, оскільки, згідно з умовою задачі, $u > 0$ (цей корінь з'явився при піднесенні до квадрата рівнянь (1) і (2)).

Задачу можна розв'язати простіше. Швидкість вітру відносно Землі $\vec{u}$ дорівнює векторній сумі швидкостей корабля $\vec{v}$ і швидкості вітру $\vec{u}_1$ відносно корабля. Оскільки вітер дме з південного заходу, а корабель йде на захід, то відповідний векторний трикутник, утворений швидкостями $\vec{v}$, $\vec{u}$ і $\vec{u}_1$, має вигляд, показаний на *рис. 281*. З теореми косинусів випливає, що

$$u_1^2 = v^2 + u^2 + 2vu\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ звідси } u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2u_1^2 - v^2} - v\right).$$

2.84. У системі відліку, зв'язаній з другим тілом, перше тіло рухається з постійним прискоренням $a = a_1 - (-a_2) = a_1 + a_2$, спрямованим протилежно початковій швидкості $v_0 = v_{01} - (-v_{02}) = v_{01} + v_{02}$. До розвороту це тіло пройде відстань $L = \frac{v_0^2}{2a}$. Тіла зустрінуться в тому випадку, коли початкова відстань між тілами s менша або дорівнює $L: s \leqslant \frac{(v_{01}+v_{02})^2}{2(a_1+a_2)} = 150$ (м).

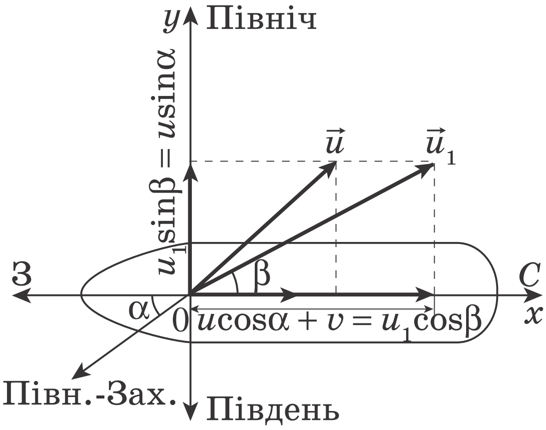

Рис. 280

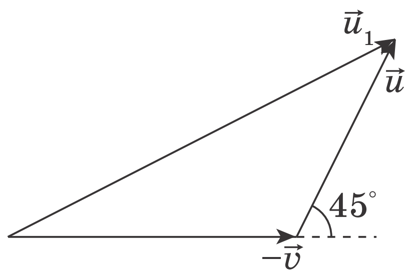

Рис.281

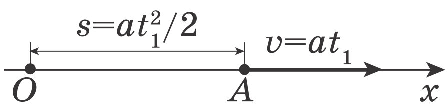

Рис. 282

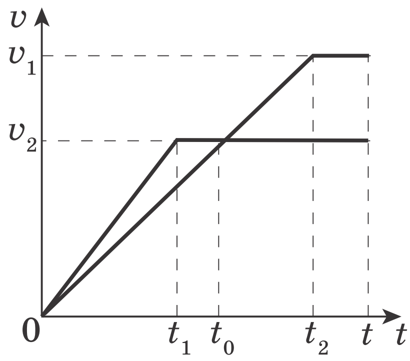

Рис.283

2.85. Через час t_1 тіло, рухаючись з прискоренням a, пройде шлях $s = \frac{1}{2}at_1^2$ і матиме швидкість $v = at_1$. Оберемо координатну вісь OX, як показано на *рис. 282*. Тут O — точка, з якої почався рух, A — точка, де тіло опинилося через час t_1. Враховуючи зміну знаку прискорення і застосовуючи формулу для шляху при рівнозмінному русі, знайдемо час t_2, за який тіло переміститься з точки A знову в точку O:

$$0 = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1t_2 - \frac{1}{2}at_2^2, \text{ звідки } t_2 = t_1\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Час t, який минув від початку руху до повернення у вихідне положення, знайдемо за формулою $t = t_1 + t_2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

2.86. Позначимо швидкості автомобіля: в кінці перших $s=100$ м через v_1 і в кінці других $s=100$ м через v_2. Тоді прискорення автомобіля на першій ділянці $a_1=\frac{v_1^2}{2s}$, на другій $a_2=\frac{v_2^2-v_1^2}{2s}$. Враховуючи, що $v_1=10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ і $v_2=15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, дістанемо: $a_1=0{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $a_2=0{,}625\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.87. Побудуємо графіки швидкостей потягів (*рис. 283*), де t_1 і t_2 — час рівноприскореного руху потягів, t_0 — момент зустрічі, t — повний час руху потягів. За умовою задачі, $\frac{v_2}{v_1}=\frac{a_2t_2}{a_1t_1}=\frac{4}{3}$, звідки

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3t_2}{4t_1}. \qquad (1)$$

Для моменту часу t_0:

$$a_1t_1=a_2t_0. \qquad (2)$$

Враховуючи (1) і (2), дістанемо:

$$t_0=t_1\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{4}t_2. \qquad 3)$$

Для моменту часу t_0 маємо:

$$s_1=\frac{1}{2}v_1t_1+v_1\left(t_0-t_1\right), \qquad (4)$$

$$s_2=\frac{1}{2}v_1t_0, \qquad (5)$$

$$s=s_1+s_2. \qquad (6)$$

Для моменту часу t маємо:

$$s=\frac{1}{2}v_1t_1+v_1\left(t-t_1\right), \qquad (7)$$

$$\text{і } s=\frac{1}{2}v_2t_2+v_2\left(t-t_2\right). \qquad (8)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1–8), дістанемо:

$$t_1=\frac{14}{27}t,\ t_2=\frac{8}{9}t.\ \text{Тоді: } \frac{a_1}{a_2}=\frac{9}{7}.$$

2.88. До початку переслідування автомобіль проїхав 60 м. За час переслідування t автомобіль проїхав 380 м — 60 м = 320 м. Тоді можна записати $vt=320$ м, звідки $t=64\frac{1}{3}(\text{с})$. Рівняння руху мотоцикла запишеться $\frac{1}{2}at^2=380$ м. Звідки $a\approx1{,}67\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$. Швидкість мотоцикла в момент, коли він наздогнав автомобіль, $v_1=at$, або $v_1\approx35{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

2.89. Виділимо квадрат двочлена: $f(x) = -0{,}2(x-7{,}5)^2 + 11{,}25$. Максимум функції $f_{\max}(x) = 11{,}25$ буде при $x = 7{,}5$. Отже, максимальна висота підняття $h_{\max} = 11{,}25$ м, максимальна дальність польоту $l_{\max} = 2\cdot 7{,}5 = 15$ (м).

2.90. За тіло відліку оберемо землю. Початок системи координат помістимо в точку O, яка знаходиться на землі. Вісь Oy спрямуємо вертикально вгору, а вісь Ox розмістимо так, щоб вектор швидкості $\vec{v}_0$ лежав у площині xOy (*рис. 284*). У цьому випадку рух відбуватиметься у вказаній площині, і для визначення положення тіла досить знати лише дві координати x і y. Біля поверхні землі всі тіла рухаються з постійним прискоренням $\vec{g}$, спрямованим вертикально вниз. Тому проекції прискорення каменя під час всього його руху дорівнюють: $a_x = 0$, $a_y = -g$. За початок відліку часу оберемо момент кидання каменя. Запишемо початкові умови:

$$x_0 = 0,\ y_0 = h,\ v_{0x} = v_0\cos\alpha,\ v_{0y} = v_0\sin\alpha.$$

Проекції швидкості на осі координат і координати каменя в будь-який момент часу визначаться з рівнянь рівноприскореного руху:

$$v_x = v_0\cos\alpha, \tag{1}$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt, \tag{2}$$

$$x = v_0 t\cos\alpha, \tag{3}$$

$$y = h + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \tag{4}$$

Визначимо час з рівняння (3) $\left(t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}\right)$ і, підставивши його в рівняння (4), дістанемо:

$$y = h + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{5}$$

Вираз (5) є рівнянням параболи. При заданому значенні кута α — це парабола типу: $y = ax^2 + bx + c$. Час підіймання каменя визначимо, прирівнявши нулю проекції швидкості v_y в рівнянні (2):

$$0 = v_0\sin\alpha - gt_n,\ t_n = \frac{v_0\sin\alpha}{g}.$$

Підставляючи одержане значення часу підіймання каменя в рівняння (4), знайдемо максимальну висоту піднімання:

$$H = y_{\max} = h + v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 =$$

$$= h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} - v_0^2\sin^2\alpha.$$

Час руху t_p визначимо, прирівнявши до нуля координату y в рівнянні (4):

$$0 = h + v_0 t_p\sin\alpha - \frac{1}{2}gt_p^2.$$

Розв'язавши одержане рівняння відносно t_p, дістанемо:

$$t_p = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

Другий корінь рівняння дає для часу руху від'ємне значення, що в даній задачі не має фізичного смислу.

Дальність польоту каменя l визначається з рівняння (3) при підстановці $t = t_p$:

$$l = x_{\max} = v_0 t_p \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha + v_0\cos\alpha\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

При $h = 0$ дістанемо простіші рівняння:

$$x = v_0 t\cos\alpha,\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,\ y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha};$$

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g};\ t_p = \frac{2v_0\sin\alpha}{g};\ l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

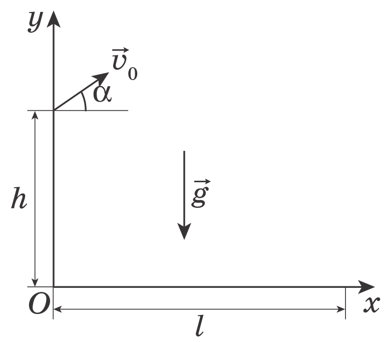

Рис. 284

2.91. Сплеск води чути через час $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c}$ після початку падіння каменя. Якщо нехтувати часом руху звуку, то знайдена глибина колодязя $h_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$. Оскільки при значенні τ, починаючи з якого треба враховувати час руху звуку, точність вимірювання глибини має дорівнювати 2 %, то $\frac{h_1 - h}{h} = 0{,}02$, звідки $h \approx 0{,}98h_1 = 0{,}98\frac{g\tau^2}{2}$. Тоді $\tau = \tau\sqrt{0{,}98} + 0{,}98\frac{g\tau^2}{2c}$, звідки $\tau \approx \frac{1}{98}\cdot\frac{2c}{g} \approx 0{,}7\,(\text{с})$.

2.92. Зрозуміло, що час буде мінімальним, якщо снаряди зустрінуться у верхній точці підйому другого снаряду, тобто $t_п = \frac{v_2}{g}$. Максимальна висота підйому другого снаряду $h = \frac{v_2^2}{2g}$. Перший снаряд опиниться на цій же висоті через час $t_п + \tau = \frac{v_2}{g} + \tau$, де τ — інтервал часу між запусками снарядів. Ця висота $h = v_1\left(\frac{v_2}{g} + \tau\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_2}{g} + \tau\right)^2$. Прирівнявши ліві частини, дістанемо:

$$\tau = \frac{1}{g}\left[(v_1 - v_2) + \sqrt{v_1^2 - v_2^2}\right] \approx 164\,(\text{с}).$$

2.93. Траєкторія м'яча після удару в стінку (лінія BC на *рис. 285*) симетрична його траєкторії за відсутності стінки (лінія BD). Відстань дорівнює дальності вільного польоту м'яча:

$$s_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 20{,}4 \text{ (м)}.$$

Для відстані AC одержуємо: $s = L - (s_0 - L) = 2L - s_0 \approx 9{,}6$ (м).

2.94. Швидкості першої і другої кульок в будь-який момент часу відносно землі дорівнюють: $v_1 = v_0 - gt$ і $v_2 = v_0 - g(t - \tau)$. Шукана швидкість другої кульки відносно першої дорівнює: $v_{відн} = v_2 - v_1 = g\tau$ і спрямована вгору. В момент зустрічі швидкості відносно землі однакові за модулем і протилежні за напрямком:

$$v_2 = -v_1\text{, або } v_0 - g(t_з - \tau) = -(v_0 - gt_з)\text{, звідки } t_з = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2}\tau.$$

2.95. За початок координат візьмемо точку, з якої почало падати тіло, а вісь координат спрямуємо вертикально вниз. Тоді координата тіла залежить від часу за законом

$$x = \frac{1}{2}gt^2.$$

Якщо тіло падало n секунд, то час падіння дорівнює

$$n\tau \ \ (\tau = 1\text{ с}) \text{ і } h = \frac{1}{2}gn^2\tau^2. \qquad (1)$$

Через час $(n-1)\tau$ після початку руху координата тіла дорівнювала $\frac{2}{3}h$. Тому

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(n-1)^2\tau^2. \qquad (2)$$

Розв'язуючи рівняння (1) і (2) разом, знайдемо:

$$n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \approx 5{,}45,\ h \approx 145 \text{ м}.$$

Можна було обрати й іншу систему координат, наприклад, зв'язану із землею вісь координат, спрямовану вгору. Тоді рівняння руху тіла було б таким: $x = h - \frac{1}{2}gt^2$. Тут при $t = n\tau$ $x = 0$, а при $t = (n-1)\tau$ $x = \frac{1}{3}h$.

Можна обрати і ще одну систему координат — з початком у точці кидання і віссю, спрямованою вгору. У цій системі $x=-\frac{1}{2}gt^2$, при $t=n\tau$ $x=-h$, при $t=(n-1)\tau$, $x=-\frac{2}{3}h$.

2.96. Задачу можна, звичайно, розв'язувати в системі відліку, зв'язаній з дахом. Однак зручніше зв'язати систему координат з другою краплею. Оскільки краплі падають з однаковим прискоренням відносно землі, то їхнє відносне прискорення дорівнює нулю: краплі рухаються одна відносно одної рівномірно. Їхня відносна швидкість дорівнює швидкості першої краплі відносно землі в момент відривання другої краплі: $v_0=g\tau$. Рівняння руху першої краплі в системі координат, зв'язаній з другою, має вигляд: $x=v_0t+x_0$, де $x_0=\frac{1}{2}g\tau^2$. При $t=t_0$ $x=l$, тобто $l=g\tau t_0+\frac{1}{2}g\tau^2$. Розв'язавши це рівняння, дістанемо: $\tau=\sqrt{t_0^2+\frac{l}{g}}-t_0$.

2.97. Рівняння руху тіла запишеться у вигляді: $y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. В певні моменти часу t_1 і t_2 координата $y=h$, тобто $h=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ і $h=v_0t_2-\frac{1}{2}gt_2^2$. Звідси знайдемо:

$$v_0=\frac{1}{2}\sqrt{g\left(8h+g\Delta t^2\right)},\ t=\sqrt{\frac{8h+g\Delta t^2}{g}},\ \text{де}\ \Delta t=t_2-t_1.$$

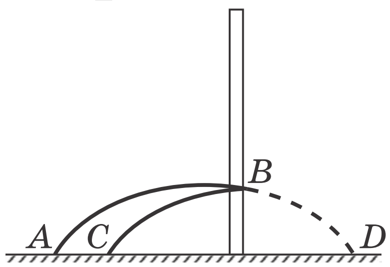

Рис. 285

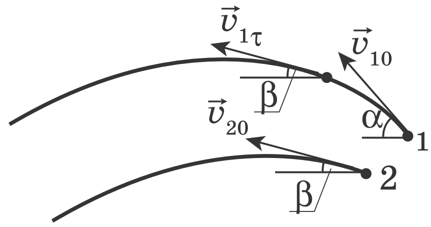

Рис. 286

2.98. Можливі три випадки.

а) Тілу надана така початкова швидкість v_0, що воно пройде шлях s, не досягнувши максимальної висоти підйому H. Тоді $v_0=\frac{s}{t}+\frac{1}{2}gt=47\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

б), в) Тіло досягне висоти H, не встигши пройти шлях s. У цьому випадку $s=H+s_1$, де s_1 — шлях, пройдений тілом при русі вниз. Тоді $H=v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ $s_1=\frac{1}{2}gt_2^2$, $t=t_1+t_2$, $v_0=gt_1$. Тут t_1 — час підйому тіла, t_2 — час проходження шляху s_1. Із записаних рівнянь знайдемо

$$v_{01}=\frac{gt+\sqrt{4gs-g^2t^2}}{2}=40\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)\ \text{і}\ v_{02}=\frac{gt-\sqrt{4gs-g^2t^2}}{2}=20\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Друга відповідь відповідає випадку, коли тіло в кінці шляху s опиниться нижче точки кидання.

2.99. Вектор початкової швидкості другого тіла $\vec{v}_{20}$ повинен дорівнювати $\vec{v}_{1\tau}$ — вектору швидкості першого тіла через τ секунд після кидання, тобто $\vec{v}_{20} = \vec{v}_{1\tau}$ (*рис. 286*). Тоді: $|v_{1\tau}| = |v_{20}| = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - g\tau)^2}$.

При цьому $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_0\sin\alpha - g\tau}{v_{10}\cos\alpha}$.

2.100. Максимальна висота підіймання набирається на двох етапах: при рівноприскореному русі без початкової швидкості з прискоренням $a = 2g$ і при вільному падінні з початковою швидкістю, спрямованою вертикально вгору:

$$H = \frac{1}{2}at_1^2 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{2gt_1^2}{2} + \frac{(2gt_1)^2}{2g} = 3gt_1^2 .$$

Звідси:

$$t_1 = \sqrt{\frac{H}{3g}}\ ;\ t_2 = \frac{v_1}{g} = \frac{2gt_1}{g} = 2t_1;\ t = t_1 + t_2 = 3t_1 = \sqrt{\frac{3H}{g}} \approx 150\,(\text{с}) = 2{,}5\ (\text{хв}).$$

2.101. Зв'яжемо початок системи координат з точкою запуску шайб, вісь OX спрямуємо вгору вздовж похилої площини, час відраховуватимемо з моменту початку руху другої шайби. Проекція прискорення $\vec{a}$ обох шайб на вісь Ox $a_x = -g\sin\alpha$. Рівняння руху шайб мають вигляд:

$$x_1 = x_0 + vt - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha \ \text{ і } \ x_2 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha ,$$

де $x_0 = \dfrac{v_0^2}{4g\sin\alpha}$ і $v = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$ — координати і швидкість першої шайби в момент запуску другої. При зустрічі шайб $x_1 = x_2 = x$. Тоді: $x = \dfrac{\left(5 + 2\sqrt{2}\right)v_0^2}{16g\sin\alpha}$.

2.102. У системі відліку, зв'язаній з шахтою ліфта, болт рухатиметься рівносповільнено (початкова швидкість $v_o = at_0$, прискорення — g), а ліфт рівноприскорено (початкова швидкість v_o, прискорення a). Якщо h_1 — переміщення ліфта за час t, то $h = h_1 - H$, $h = v_ot - \dfrac{1}{2}gt^2$, $h_1 = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$. Тоді:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g+a}} = 0{,}7\,(\text{с}),\ h = at_0\sqrt{\frac{2H}{g+a}} - \frac{gH}{g+a} = -0{,}7\ (\text{м}),$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{a^2t_0^2}{g} - att_0 = 1{,}3\ (\text{м}).$$

2.103. Рівняння залежності координат каменя від часу мають вигляд: $x = v_0t\cos\alpha$, $y = h + v_0t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2$. У момент падіння каменя $y = 0$, а $x = s$, де s — дальність польоту. Отже,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gs}\left(\pm\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}-\frac{g^2s^2}{v_0^4}}\right).$$

Цей вираз має смисл лише за умови, що $1+\frac{2gh}{v_0^2}-\frac{g^2s^2}{v_0^4} \geqslant 0$. Звідси

$$s_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh}\ .$$

При максимальній дальності польоту

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{v_0^2}{gs_{\max}} = \operatorname{acrtg}\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}.$$

2.104. Коли хлопець, змінивши напрям свого руху, перестав переміщатися відносно землі, швидкість v' його руху по каруселі стала дорівнювати лінійній швидкості ωR периферійних точок каруселі відносно землі: $v' = \omega R$ (названі швидкості протилежно спрямовані). Швидкість хлопця відносно землі до того, як він змінив напрям свого руху, дорівнювала ωR, отже, $v = \omega R + v' = 2\omega R$, і хлопець рухався по колу радіуса R з доцентровим прискоренням $a_д = \frac{v^2}{R} = 4\omega^2 R = 0{,}2\left(\frac{м}{с^2}\right)$ відносно землі.

2.105. Нехай у момент виходу пішохода з точки O велосипедист знаходився в точці A (*рис. 287*). Кут $\alpha = \frac{v}{R}t$, де R — радіус кола, по якому рухається велосипедист, t — інтервал часу між початком руху пішохода і моментом передачі вимпела. Величина t буде мінімальною, якщо пішохід і велосипедист прийдуть у точку B одночасно. Тоді $t = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$ і $\alpha = \frac{v(v_1+v_2)}{2v_1v_2} = 5$ (рад).

2.106. Залежність координат точки A від часу виразиться такими формулами (*рис. 288*):

$$\begin{cases} y_A = R - R\cos\alpha = R - R\cos\omega t, \\ x_A = l - R\sin\alpha = l - R\sin\omega t \end{cases}.$$

З умови відсутності проковзування $(l = R\omega t)$ випливає: $x_A = R(\omega t - \sin\omega t)$.

2.107. У першому випадку шлях м'яча до цілі R . Час польоту $t = \frac{R}{v_0}$. Мішень переміститься за цей час на відстань $s = \omega Rt$. Хлопчик повинен кинути м'яч з випередженням на кут $\alpha = \frac{s}{R} = \frac{\omega R}{v_0}$ (*рис. 289 а*). У другому випадку хлопчик, а отже, й кинутий ним м'яч мають дотичну швидкість $v_д = \omega R$. Для того, щоб результуюча швидкість була спрямована до центра платформи, м'яч треба кинути під певним кутом β у напрямку до центра (*рис. 289 б*) і $\sin\beta = \dfrac{\omega R}{v_0}$, $\beta = \arcsin\dfrac{\omega R}{v_0}$. Результуюча швидкість м'яча в цьому випадку дорівнює $u = v_0\cos\beta = v_0\sqrt{\dfrac{v_0^2 - \omega^2 R^2}{v_0^2}}$ і спрямована до центра.

Якщо $v_0 \leqslant \omega R$, то хлопчик ніколи не зможе влучити в ціль, тобто не знайдеться такого кута кидання, при якому результуюча швидкість буде спрямована до центра.

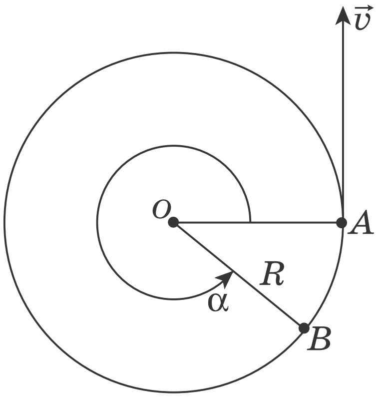

Рис. 287

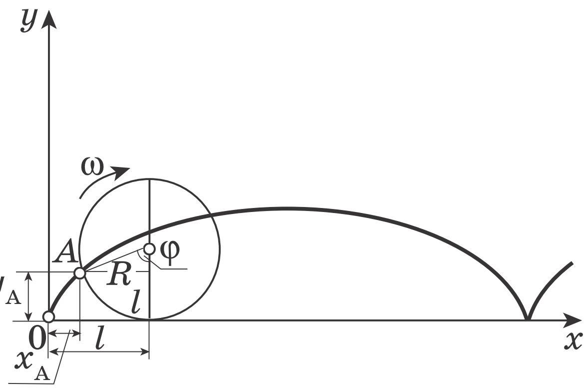

Рис. 288

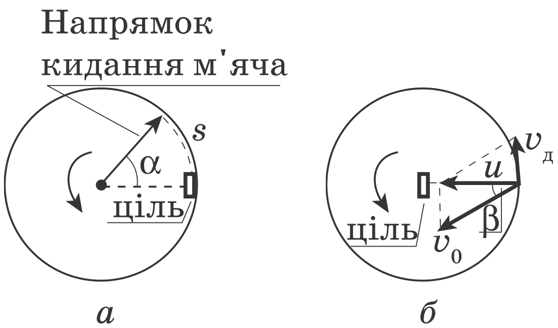

Рис. 289

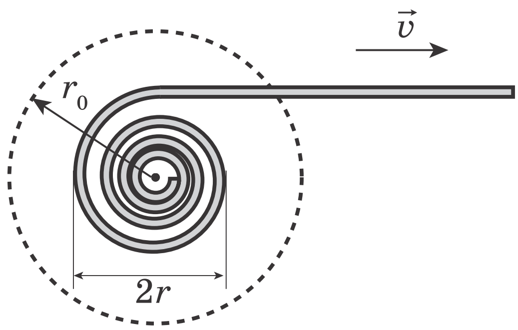

Рис. 290

2.108. Для визначення кутової швидкості ω необхідно знати радіус мотка після часу змотування t, оскільки $\omega = \dfrac{v}{r}$. Об'єм стрічки, змотаної за час t, дорівнює $V = vt\Delta l h$, де vt — довжина, Δl — товщина і h — ширина стрічки. З другого боку, цей самий об'єм дорівнює $\pi\left(r_0^2 - r^2\right)h$ (*рис. 290*) і, отже, $\pi\left(r_0^2 - r^2\right) = vt\Delta l$, $r = \sqrt{r_0^2 - \dfrac{vt\Delta l}{\pi}}$, звідси: $\omega = \dfrac{v}{\sqrt{r_0^2 - \dfrac{vt\Delta l}{\pi}}}$.

2.109. Точка, яка нас цікавить, знаходиться на кінці радіуса, який утворює з вертикаллю кут $\alpha = \dfrac{v_0}{R}\tau = 0{,}02$ (рад). Зауважимо, що кут дуже маленький, це далі буде використано. Швидкість будь-якої точки обруча визначається сумою швидкості поступального руху центра обруча і лінійної швидкості обертального — навколо центра. За відсутності проковзування в нижній точці швидкості ці рівні за модулем. При додаванні швидкостей виділеної точки їхні горизонтальні складові практично компенсуються (кут малий, і його косинус майже дорівнює 1), а вертикальна складова швидкості становить $v_{\text{в}} = v_0 \sin\alpha \approx v_0\alpha \approx 0{,}04\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$. Це й є миттєва швидкість виділеної точки.