Кінематика

1. Проїхавши третину довжини моста, велосипедист почув звук автомобіля. Якщо він поверне назад, то зустрінеться з автомобілем на початку мосту, а якщо продовжуватиме рух вперед – то у кінці мосту. Визначити у скільки разів швидкість руху автомобіля більша за швидкість руху велосипедиста. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Нехай автомобіль знаходиться на відстані x від мосту, а довжина мосту l.

1) Велосипедист повертає назад:

$\frac{x}{\upsilon_a} = \frac{l}{3\upsilon_в}$. Звідси $x = \frac{l \cdot \upsilon_a}{3\upsilon_в}$ (1).

2) Велосипедист продовжує рух вперед:

$x + l$ – шлях пройдений автомобілем, $\frac{2}{3}l$ – шлях пройдений велосипедистом. $\frac{x+l}{\upsilon_a} = \frac{2l}{3\upsilon_в}$. Звідси $x = \frac{2l \cdot \upsilon_a}{3\upsilon_в} - l$ (2).

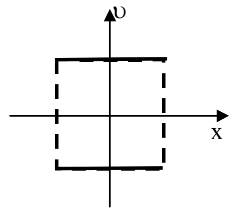
Підставимо рівняння (1) в рівняння (2): $\frac{l\upsilon_a}{3\upsilon_в} = \frac{2l\upsilon_a}{3\upsilon_в} - l$; $\frac{l\upsilon_a}{3\upsilon_в} = l$; $\frac{\upsilon_a}{\upsilon_в} = 3$.

2. Кенгуру намагається наздогнати Черепаху. Початкова відстань між ними L = 10 км. Кенгуру долає цю відстань за час t_1, але за цей час Черепаха встигає відповзти на відстань x_1. Кенгуру долає і її — за час t_2, але Черепаха за цей час знову відповзає від нього, тепер уже на відстань x_2. Описана ситуація продовжується знову і знову. Суддя змагань встиг зафіксувати довжину третьої ділянки x_3 = 8 см і час проходження учасниками перегонів сьомої ділянки $t_7 = 1{,}28 \cdot 10^{-7}$ с. Через який час після старту Кенгуру наздожене Черепаху? Вважайте, що Кенгуру і Черепаха рухаються по одній дорозі і їх швидкості не змінюються по величині. (2010 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

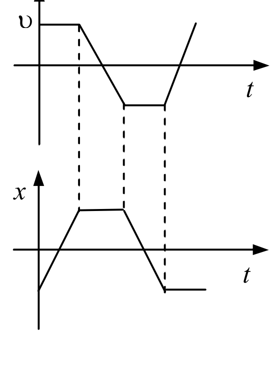
Позначимо швидкість кенгуру υ, а швидкість черепахи u. Можемо записати співвідношення $\frac{L}{\upsilon} = \frac{x_1}{u}$; $\frac{x_1}{\upsilon} = \frac{x_2}{u}$; $\frac{x_2}{\upsilon} = \frac{x_3}{u} \ldots$ Звідси $x_1 = L\frac{u}{\upsilon}$; $x_2 = x_1\frac{u}{\upsilon} = L\frac{u^2}{\upsilon^2}$; $x_3 = L\frac{u^3}{\upsilon^3} \ldots$ Отже $x_i = L\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^i$. Підставивши значення x_3 = 8 см, отримаємо $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^3 = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^{-6}$ або $\frac{u}{\upsilon} = 2 \cdot 10^{-2}$. Запишемо співвідношення для часу руху: $t_1 = \frac{L}{\upsilon}$; $t_2 = \frac{x_1}{\upsilon} = L\frac{u}{\upsilon^2}$; $t_3 = \frac{x_2}{\upsilon} = L\frac{u^2}{\upsilon^3}$. Отже $t_i = L\frac{u^{i-1}}{\upsilon^i}$. $t_7 = L\frac{u^6}{\upsilon^7} = L\frac{u^6}{\upsilon^6} \cdot \frac{1}{\upsilon}$. Звідси $\upsilon = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\right)^6}{1{,}28 \cdot 10^{-7}} = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Час, за який кенгуру наздожене черепаху $t = \frac{L}{\upsilon - u} = \frac{L}{\frac{\upsilon - u}{\upsilon} \cdot \upsilon} = \frac{L}{\left(1 - \frac{u}{\upsilon}\right) \cdot \upsilon} = \frac{10 \cdot 10^3}{(1 - 0{,}02) \cdot 5} \approx 2041\ \text{с}$.

3. Матеріальна точка рухається уздовж прямої так, що графік залежності її швидкості від координати при певному виборі масштабів має вигляд квадрата. Побудувати для такого руху графіки залежності швидкості й координати від часу. (2001 р. ІІ е. 9 к.)



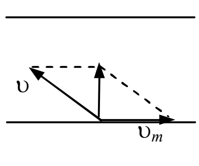
Розв'язок

Проаналізувавши графік, бачимо, що координата змінюється при сталій швидкості, а коли напрям швидкості змінюється на протилежний, координата тіла не змінюється. Тому графічна залежність може бути такою (див. малюнок).



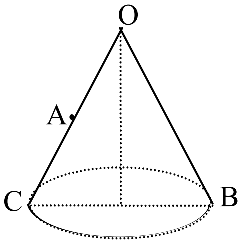
4. Спортсмен пливе за течією річки з оптимальною швидкістю υ_1 відносно берегів, проти течії – υ_2. З якою швидкістю він буде плисти перпендикулярно течії? (2001 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок



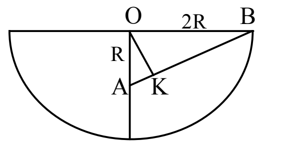
Нехай υ_m – швидкість течії, а υ – швидкість спортсмена. Тоді при русі за течією $\upsilon_1 = \upsilon + \upsilon_m$, а проти течії $\upsilon_2 = \upsilon - \upsilon_т$. Звідси $\upsilon = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2}, \upsilon_m = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2}$. Щоб плисти перпендикулярно до течії, спортсмен повинен тримати курс, як показано на малюнку. Тоді його швидкість $\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon^2 - \upsilon_т^2} = \sqrt{\upsilon_1\upsilon_2}$.

5. Комаха знаходиться в точці A на поверхні гірки землі, яка має конічну форму радіуса R. За який найменший час комаха переміститься в точку B, рухаючись рівномірно зі швидкістю υ, якщо відомо, що AO=R=0,5CO. На яку найменшу відстань при русі вона наблизиться до вершини конуса? Чи однакові зусилля розвиває комаха при русі? (2001 р. II е. 10 к.)



Розв'язок

Зробимо розгортку даного конуса. Найкоротшою відстанню від точки A до точки B буде відрізок AB. $AB=\sqrt{R^2+4R^2}=R\sqrt{5}$. Тоді час руху комахи $t=\dfrac{R\sqrt{5}}{\upsilon}$.



Найкоротша відстань, на яку комаха наблизиться до вершини конуса, це відрізок OK. Оскільки трикутник AOB прямокутний то його площу можна знайти двома способами:

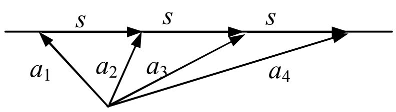
$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot OK$; $S=\dfrac{1}{2}AO\cdot OB$. Звідси $R\sqrt{5}\cdot OK=2R^2$; $OK=\dfrac{2R}{\sqrt{5}}$.

Як бачимо з малюнка, комаха на ділянці AK піднімалася вгору, на KB – опускалася вниз. Відповідно при рівномірному русі на першій ділянці вона розвивала більше зусилля.

6. Два кораблі рухаються рівномірно і прямолінійно з різними швидкостями. Локатор, встановлений на одному з кораблів, визначає відстань s між ними через рівні інтервали часу. При трьох послідовних вимірах отримано значення s_1=5,2 км, s_2=4,8 км, s_3=5,4 км. Яким буде результат наступного виміру? (2002 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

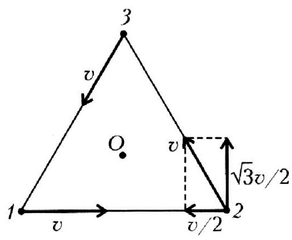
Перейдемо в систему відліку, пов'язану з одним з кораблів. У цій системі відліку другий корабель рухається рівномірно і прямолінійно. Позначимо вектор переміщення корабля за час між двома послідовними вимірами відстані $\vec{s}$. Тоді $\vec{a}_1=\vec{a}_2-\vec{s}$, $\vec{a}_3=\vec{a}_2+\vec{s}$, звідки випливає, що $a_1^2+a_3^2=2a_2^2+2s^2$. Аналогічно отримуємо співвідношення $a_2^2+a_4^2=2a_3^2+2s^2$. З останніх двох рівнянь отримуємо: $a_4=\sqrt{a_1^2+3\left(a_3^2-a_2^2\right)}$. a_4 = 6,7 км.



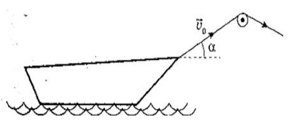
7. Три маленьких равлики в початковий момент знаходяться на плоскій поверхні у вершинах рівностороннього трикутника із стороною a. В деякий момент часу всі три равлики починають рухатись з однаковими швидкостями υ один за одним (1-й за 2-им, 2-й за 3-им, 3-й за 1-им), намагаючись наздогнати того, що попереду. За який час вони зустрінуться і який шлях подолають до місця зустрічі? (2005 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

Розкладемо вектор швидкості равлика 2 на дві складові: одну в напрямку равлика 1, іншу – в перпендикулярному напрямку. Ці равлики наближаються з відносною швидкістю $\upsilon+\dfrac{\upsilon}{2}=\dfrac{3\upsilon}{2}$. Отже, вони зустрінуться через час $t=\dfrac{2a}{3\upsilon}=8$ хв. З понять симетрії робимо висновок, що і всі равлики зустрінуться через 8 хв.

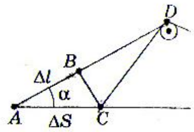


8. Хлопчик тягне човен за допомогою мотузки. Швидкість руху мотузки u_0. Якою буде швидкість човна у той момент, коли мотузка утворить кут α з горизонтом? (2006 р. з. 9 к.)



Розв'язок

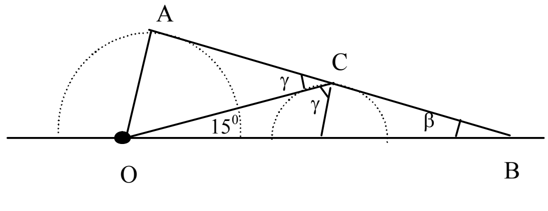
Розглянемо положення човна і мотузки через малий інтервал часу Δt. Човен змістився на відстань Δs, а мотузка зсунулась на Δl. Із прямокутного трикутника ABC маємо: $\dfrac{\Delta l}{\Delta s}=\cos\alpha$, $\dfrac{\upsilon_0\Delta t}{\upsilon\Delta t}=\cos\alpha$. Звідси $\upsilon=\dfrac{\upsilon_0}{\cos\alpha}$.



9. Від берега великого озера вітер поніс надувний човен під кутом 15^0 до берегової лінії. За якої максимальної швидкості руху човна людина, яка стояла на березі біля нього, здатна наздогнати човен, якщо берегом вона може бігти зі швидкістю υ_0=6 км/год, а плився по озеру з швидкістю υ_0=3 км/год? Берегова лінія є прямолінійною ділянкою. (2002 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

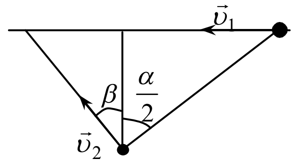
Якщо людина буде плисти по озеру, то за час t вона може у воді досягти точок на колі радіуса $\upsilon_0 t$. Якщо бігтиме берегом, то потрапить в точку B, відстань до якої $\upsilon_б t$. Якщо частину часу бігтиме, а частину плистиме, то вона зможе потрапити в будь-яку точку на лінії AB. З Δ AOB



$\sin\beta = \dfrac{\upsilon_0 t}{\upsilon_б t} = \dfrac{1}{2}$, $\beta = 30^0, \gamma = 45^0$.

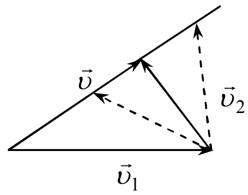
З Δ AOC $\dfrac{\upsilon_0 t}{\upsilon_ч t} = \sin 45^0$. $\upsilon_ч = \dfrac{\upsilon_0}{\sin 45^0} = \upsilon_0\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

10. Прямолінійною дорогою рухається мікроавтобус з швидкістю 20 м/с. Неподалік дороги розташований табір туристів. У той момент, коли рухомий транспорт попадає у кут поля зору туриста, що становить 120^0, турист виїжджає з табору на велосипеді. У якому напрямі він повинен рухатись, щоб "перехватити" мікроавтобус за найменшого значення швидкості руху? Визначте цю швидкість. (2003 р. з. 9 к.)



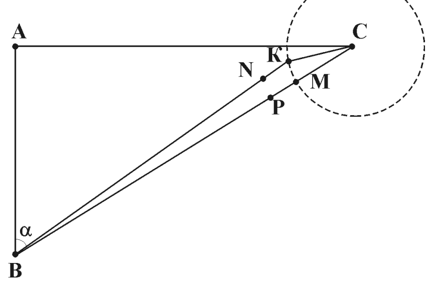
Розв'язок

Велосипедист повинен їхати до дороги під деяким кутом β з швидкістю υ_2. Виберемо систему відліку, зв'язану з автобусом. В ній нерухомий велосипедист має швидкість υ_1, напрямлену вправо. А якщо він буде рухатись з швидкістю υ_2, то повна його швидкість в новій системі відліку $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ має напрям на автобус. Напрям швидкості може бути різним, але мінімальною вона буде в тому випадку, коли $\upsilon_2 \perp \upsilon$. Тоді, з прямокутного трикутника: $\upsilon_2 = \upsilon_1 \cdot \sin\left(90 - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 10\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Кут β становитиме $90 - \alpha/2 = 30^0$.



11. По прямолінійній дорозі рухається вершник. На відстані 50 м від нього перпендикулярно дорозі знаходиться інший вершник, який хоче накинути лассо на першого. В якому напрямку він повинен рухатись, щоб якнайшвидше це зробити і знайдіть час, через який він кидатиме лассо, якщо довжина лассо 10 м, його швидкість 10 м/с? Швидкість руху вершників 5 м/с. (2008 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок



Нехай AC – прямолінійна дорога. B – положення другого вершника. Задачу доцільно розв'язувати, аналізуючи кінцеву ситуацію. Нехай точка C –кінцеве положення вершника, коли на нього накинуте лассо. Другий вершник в цей момент буде знаходитись на дузі кола, радіус якого l – довжина лассо. Розглянемо дві можливі точки К і М. Лассо другий вершник повинен кинути раніше на час t_2, який лассо летітиме до першого вершника, тобто з точок N або P. $NK = \upsilon_1 t_2$, $PM = \upsilon_1 t_2$, де υ_1 – швидкість вершників, t_2 – час руху лассо. Оскільки BM – це мінімальна відстань до дуги кола зі всіх можливих, то другий вершник повинен рухатись в напрямку BC і лассо кидати в точці P в напрямку PC. Розглянемо трикутник ABC.

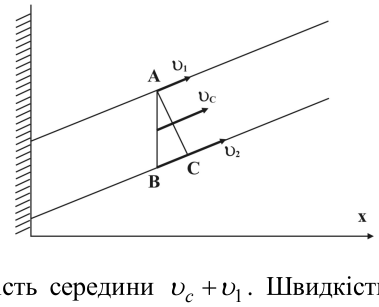
$AB^2 + AC^2 = BC^2$. AB=50 м. $BC = BP + PC = \upsilon_1 t_1 + (\upsilon_1 + \upsilon_2)t_2$. $AC = \upsilon_1(t_1 + t_2)$, де υ_2 – швидкість лассо, t_1 – час, через який другий вершник кидає лассо. Оскільки $PC = \upsilon_1 t_2 + \upsilon_2 t_2 = PM + MC$, то $t_2 = \dfrac{MC}{\upsilon_2} = \dfrac{l}{\upsilon_2} = \dfrac{10\text{ м}}{10\dfrac{\text{м}}{\text{с}}} = 1\text{ с}$. Тоді можна записати: $50^2 + \upsilon_1^2(t_1 + t_2)^2 = (\upsilon_1 t_1 + (\upsilon_1 + \upsilon_2)t_2)^2$. Підставимо значення:

$50^2 + 25(t_1 + 1)^2 = (5t_1 + 15)^2$. $2500 + 25t_1^2 + 50t_1 + 25 = 25t_1^2 + 150t_1 + 225$. $100t_1 = 2300$. t_1=23 с.

$BC = 5 \cdot 23 + 15 = 130$ м. $\cos\alpha = \dfrac{50}{130} \approx 0{,}38$, $\alpha \approx 75^\circ$.

12. Дві кульки, що з'єднані гумовою ниткою, рухаються рівномірно паралельними жолобами з швидкостями u_1 і u_2 ($u_1 < u_2$). З якою швидкістю рухається середина шнура відносно свого зображення у плоскому дзеркалі, яке розміщене під кутом α до напрямку жолобів і перпендикулярно до площини, в якій вони розміщені? (2007 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок



Кульки рухаються в одному напрямку. Розглянемо рух середини і другої кульки відносно першої. Швидкість середини $\upsilon_c - \upsilon_1$. Швидкість другої кульки $\upsilon_2 - \upsilon_1$. Середина нитки опише середню лінію в трикутнику ABC. Отже $(\upsilon_c - \upsilon_1)\cdot t = \dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{2}\cdot t$. $\upsilon_c = \dfrac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{2}$.

Проекція цієї швидкості на вісь Ox : $\upsilon_{cx} = \upsilon_c \cdot \sin\alpha$. Тоді швидкість середини відносно зображення становить $2\upsilon_c \sin\alpha = (\upsilon_2 + \upsilon_1)\cdot\sin\alpha$.

Аналогічно розглянемо випадок, коли кульки рухаються назустріч. Швидкість середини $\upsilon_c + \upsilon_1$. Швидкість другої кульки $\upsilon_2 + \upsilon_1$.

$(\upsilon_c + \upsilon_1)\cdot t = \dfrac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{2}\cdot t$. $\upsilon_c = \dfrac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{2}$. Швидкість середини відносно зображення $(\upsilon_2 - \upsilon_1)\cdot \sin\alpha$.

13. Машиніст пасажирського потяга, який рухався зі швидкістю υ_1=30 м/с помітив товарний потяг, який рухався зі швидкістю υ_2=9 м/с паралельною колією у тому ж напрямку на відстані 180 м. У цей час спрацювала автоматична система гальмування потяга, і він почав гальмувати з прискоренням 1,2 м/с^2. Чи могла б відбутися аварія потягів, якби вони рухалися однією колією? (2005 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Рівняння руху пасажирського потягу $x = \upsilon_1 t - \dfrac{at^2}{2}$, товарного потягу $x = 180 + \upsilon_2 t$. Координата буде однаковою: $\upsilon_1 t - \dfrac{at^2}{2} - \upsilon_2 t = 180$.

$0{,}6t^2$-$21t$+180=0; t^2-35t+300=0; D=1225-1200=25.

$t_1 = \dfrac{35+5}{2} = 20$ с, $t_2 = \dfrac{35-5}{2} = 15$ с. Через 15 с буде аварія.

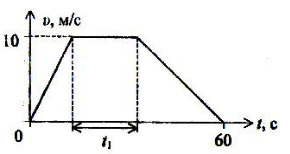
14. Відстань між двома станціями потяг проїхав із середньою швидкістю 72 км/год за 20 хв. Розгін та гальмування тривали 4 хв, а решту часу потяг рухався рівномірно. Яку швидкість мав потяг під час рівномірного руху? (2005 р. ІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Відстань між станціями $s = \upsilon_c \cdot t_1 = 24$ км. Шлях розгону та гальмування $s_1 = s_2 = \dfrac{\upsilon}{2}\cdot t_2$, де υ – швидкість, до якої розганяється потяг, $t_2 = 2$ хв. Шлях рівномірного руху $s_3 = \upsilon t$, t=16 хв Отже, $s = \dfrac{\upsilon}{2}\cdot t_2 \cdot 2 + \upsilon \cdot t$. Звідси $\upsilon = \dfrac{s}{t_2 + t} = 80$ км/год.

15. Відстань між двома автобусними зупинками рівна 400 м. Автобус, відійшовши від зупинки і досягши максимальної швидкості 36 км/год, рухається рівномірно, а перед наступною зупинкою гальмує. Який шлях автобус пройшов, рухаючись рівномірно, якщо рух від однієї зупинки до іншої зайняв 1 хв, а розгін й гальмування автобуса проходили при постійних (не обов'язково рівних) прискореннях? (2006 р. з. 9 к.)

Розв'язок



Простіше всього графічно розв'язати задачу. Побудуємо можливий графік залежності швидкості автобуса від часу. При побудові враховано, що максимальна швидкість дорівнює 10 м/с (36 км/год), а повний час руху між зупинками 60 с. Невідомий відрізок часу t_1, на якому автобус рівномірно рухається зі своєю максимальною швидкістю, може бути легко знайдений із площі трапеції: $s = 400\text{ м} = 10\left(\dfrac{t_1 + 60}{2}\right)$. Звідси t_1=20 с і шлях s_1, пройдений зі швидкістю 36 км/год, становить 200 м.

16. Перед закритим шлагбаумом стоїть людина з важким візком. Їй потрібно якомога швидше потрапити в магазин, який знаходиться на відстані 300 м від шлагбаума. Максимальне прискорення, якого людина може надавати візку 0,25 м/с^2, найбільша швидкість візка 5 м/с. Відомо, що шлагбаум відкриється рівно через 30 с. За який мінімальний час людина зможе доставити вантаж у магазин? (2006 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Для того, щоб якнайшвидше потрапити в магазин, людина повинна за 30 с від'їхати назад і розігнатись, щоб в момент відкривання шлагбауму під'їхати до нього з якомога більшою швидкістю. Нехай час від'їзду назад t. Сюди входить розгін протягом часу $t/2$ і гальмування протягом такого ж часу. Оскільки час до відкриття шлагбауму t_0=30 с, то розгін до шлагбауму після від'їзду триватиме t_0–t. Оскільки шляхи від'їзду і розгону рівні, то $\dfrac{a(t_0 - t)^2}{2} = \dfrac{a\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{a\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2}$; $(t_0 - t)^2 = 2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2$; $t_0 - t = \sqrt{2}\,\dfrac{t}{2}$; $t = \dfrac{2t_0}{2+\sqrt{2}}$. Тоді швидкість, з якою під'їде людина до шлагбауму: $\upsilon = a(t_0 - t) = a\left(t_0 - \dfrac{2t_0}{2+\sqrt{2}}\right) = a\left(\dfrac{\sqrt{2}t_0}{2+\sqrt{2}}\right)$.

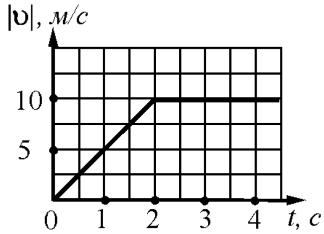
$\upsilon \approx 3,08$ м/с<5м/с. Отже, до шлагбауму людина під'їжджає з швидкістю 3 м/с, потім розганяється до швидкості υ_m=5 м/с, рухається певний час рівномірно і гальмує до зупинки. $t = \dfrac{\upsilon_m - \upsilon}{a} + \dfrac{l - \dfrac{\upsilon_m^2}{2a} - \dfrac{\upsilon_m^2 - \upsilon^2}{2a}}{\upsilon_m} + \dfrac{\upsilon_m}{a}$. t=71,6 с.

17. Микола біг по колу з постійною швидкістю. У точці А він зустрів Петра, що саме в цей момент почав бігти з постійним прискоренням по діаметру АВ. Швидкість Петра в момент зустрічі була рівна нулю. Микола, не змінюючи швидкості, пробіг півкола і зустрівся з Петром у точці В, куди той якраз прибіг. Визначити відношення прискорень Миколи і Петра. (2006 р. з. 10 к.)

Розв'язок

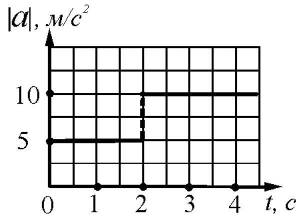
Позначимо швидкість Миколи υ, прискорення Петра a, радіус кола R, час між зустрічами t. Микола подолав відстань $\upsilon t = \pi R$, а Петро $\dfrac{at^2}{2} = 2R$. Виразимо час з першого рівняння й підставимо в друге: $\dfrac{a\pi^2 R^2}{2\upsilon^2} = 2R$, або $a = \dfrac{4\upsilon^2}{\pi^2 R}$. Оскільки прискорення Миколи $a_1 = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, то шукане відношення $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{\pi^2}{4} \approx 2,47$.

18. Хокеїст, який знаходиться в центрі майданчика, починає рухатися в напрямку воріт, що розташовані на відстані 20 м від нього. Графіки залежності модуля швидкості і модуля прискорення від часу руху зображені на малюнку. Визначити на якій відстані від воріт і в якій точці площадки буде хокеїст в моменти часу t_1=2 с і t_2=3,57 с, якщо в момент часу t_1 вектор швидкості напрямлений в напрямку воріт. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)



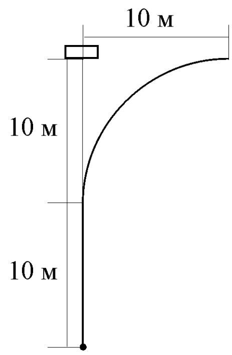
Розв'язок

З графіка швидкості і прискорення υ_0=0; υ_1=10 м/с. Протягом 2 с рух хокеїста був прямолінійним рівноприскореним. Прискорення



a_1=5 м/с^2. За перші 2 с хокеїст пройшов напрямку до воріт відстань $l_1 = \dfrac{a_1 t_1^2}{2} = 10$ м .

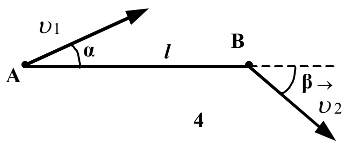
Потім, після 2 секунди, хокеїст рухався з іншим прискоренням a_2=10 м/с^2, але при цьому модуль швидкості був незмінним і становив υ_1=10 м/с. Тобто, хокеїст рухався по колу: $a_2 = \dfrac{\upsilon_1^2}{R}$, де $R = \dfrac{\upsilon_1^2}{a_2}$ – радіус кола. $R = \dfrac{100}{10} = 10$ м . Час руху по четвертій частині кола: $t_3 = \dfrac{2\pi R}{4\upsilon_1} = \dfrac{\pi R}{2\upsilon_1} = 1,57$ с , В результаті рух хокеїста виглядатиме як показано на малюнку.



В момент часу t_1=2 с хокеїст буде на прямій, що з'єднує центр поля і ворота на відстані l_1=10 м.

У момент часу t_2=3,57 с = t_1+t_3 хокеїст буде збоку від воріт на відстані R=10 м від їх центра.

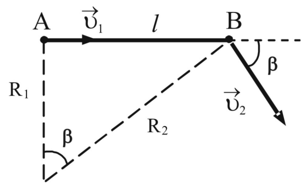
19. Аркуш паперу обертають навколо перпендикулярної до нього осі. На малюнку вказано напрям швидкостей двох точок аркуша А і В. Побудуйте точку, через яку проходить вісь та за відомими α, β і υ_1 знайдіть υ_2 у випадках:



1) α=0, β=60°, υ_1=5 см/с;

2) 0≤α≤90°, 0≤β≤90°. (2003 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок



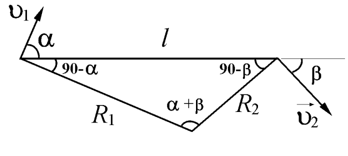
При обертанні $\vec{\upsilon} \perp R$, $\upsilon = \omega R \sim R$. Вісь знаходимо як точку перетину перпендикулярів до $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ з точок А і В.

1). Для $\beta = 60^0$, $R_2 = 2R_1$, отже $\upsilon_2 = 2\upsilon_1$= 10 см/с.

2). Використовуючи теорему синусів, запишемо: $\dfrac{R_1}{\sin(90-\beta)} = \dfrac{l}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Звідси $R_1 = \dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} l$. Аналогічно $R_2 = \dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} l$.

Тоді $\dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} \Rightarrow \upsilon_2 = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \upsilon_1$.

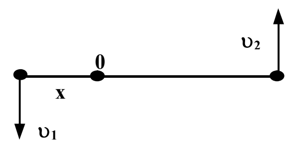


20. Стержень довжиною 50 см обертається навколо перпендикулярної йому осі з частотою 50 об/с. Один з кінців має швидкість 57 м/с. Чому дорівнює лінійна швидкість другого кінця стержня? (2002 р. ІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Розглянемо два випадки:

1 випадок: вісь обертання проходить через стержень. Оскільки кутова швидкість обертання кінців однакова, то: $\frac{\upsilon_1}{x}=\frac{\upsilon_2}{l-x}$, $\upsilon_2=\frac{\upsilon_1(l-x)}{x}$, де l – довжина стержня, x – відстань від осі обертання стержня до його другого кінця. Враховуючи, що $\omega=\frac{\upsilon_1}{x}$, одержимо: $x=\frac{\upsilon_1}{\omega}$. Підставляючи значення x у формулу для визначення υ_2, знаходимо: $\upsilon_2=\omega l-\upsilon=2\pi n\cdot l-\upsilon=100$ м/с.



2 випадок: вісь обертання поза стержнем. Тоді $\frac{\upsilon_1}{x}=\frac{\upsilon_2}{l+x}\Rightarrow\upsilon_2=\omega l+\upsilon=214$ м/с .

Рух під дією сили тяжіння

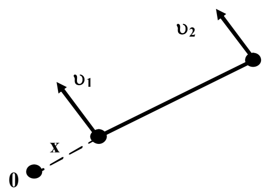
21. З балкона висотного будинку (h=20 м) хлопчик кинув вертикально вгору м'яч, який після цього впав на поверхню Землі. Визначити швидкість руху на середині пройденого м'ячем шляху. (2004 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Нехай вгору м'яч пролетів відстань H. Тоді весь шлях H+H+h.

Половина шляху $H+\frac{h}{2}$. Оскільки H – це відстань підйому, то, знайшовши швидкість на відстані $\frac{h}{2}$ від верхньої точки руху, будемо знати шукану швидкість:

$$\upsilon=\sqrt{2g\frac{h}{2}}=\sqrt{gh}=\sqrt{200}\approx 14{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$



22. Ракета запускається з поверхні Землі вертикально вгору і рухається з прискоренням a=3,3 м/с^2 протягом 10 с. З якою швидкістю ракета впаде на землю? Опором повітря знехтувати. (2005 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Рухаючись з прискоренням a=3,3 м/с^2 ракета через 10 с буде на висоті $h=\frac{at^2}{2}=165$ м і матиме швидкість $\upsilon=at$=33 м/с. Потім ракета гальмує і, повертаючись назад, на висоті 165 м матиме швидкість 33 м/с напрямлену донизу. $h=\frac{\upsilon^2-\upsilon_0^2}{2g}$, звідки $\upsilon=\sqrt{2gh+\upsilon_0}\approx 66{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

23. На деякій висоті трьом тілам одночасно надають однакової за модулем швидкості. Першому тілу – вертикально вгору, другому – вертикально вниз, а третьому – горизонтально. Через який час впаде на землю третє тіло, якщо перше впало через час t_1, а друге через час t_2? (2016 р. ІІ е. 10 к.)

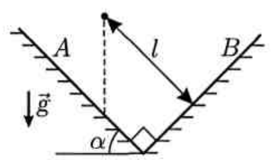
Розв'язок

Для третього тіла $h=\frac{gt_3^2}{2}$, звідки $t_3=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (1).

Для другого тіла $h=\upsilon_0 t_2+\frac{gt_2^2}{2}$ (2). Перше тіло піднімається вгору протягом часу $t=\frac{\upsilon_0}{g}$ (3), зупиняється, падає вниз до висоти h знову протягом часу t і на висоті h буде мати ту ж початкову швидкість υ_0. Отже з цього моменту до землі воно буде рухатись як і друге тіло протягом часу t_2. Тому $2t=t_1-t_2$ (4). З рівнянь (3) і (4) $\upsilon_0=\frac{gt_1}{2}-\frac{gt_2}{2}$. Підставимо швидкість у (2).

$h=\frac{gt_1t_2}{2}-\frac{gt_2^2}{2}+\frac{gt_2^2}{2}=\frac{gt_1t_2}{2}$. Тоді з співвідношення (1) маємо: $t_3=\sqrt{\frac{2gt_1\cdot t_2}{g}}=\sqrt{t_1\cdot t_2}$.

24. Маленька кулька падає без початкової швидкості на площину A, яка утворює з горизонтом кут α. Через який час вона вдариться об площину B? Площини A і B утворюють прямий кут, удари в них абсолютно пружні. Відстань від місця початку падіння до площини B дорівнює l, прискорення вільного падіння g. (2011 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

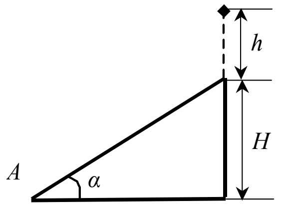
Виберемо систему координати Оxy (вісь Оx вздовж площини В, вісь Оy паралельно площині А). Рухи кульки вздовж осей незалежні. При ударах кульки об площину В координата y = 0, а рух кульки вздовж осі Оy буде рівноприскореним з прискоренням $g\sin\alpha$.

Тому: $l=\dfrac{g\sin\alpha\cdot t^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2\cdot l}{g\sin\alpha}}$.

25. Тіло рівномірно обертається на нитці у вертикальній площині по колу, радіус якого 1 м, здійснюючи три оберти за секунду. У момент проходження нижньої точки траєкторії, нитка розривається. Визначити дальність польоту тіла по горизонталі, якщо висота відриву від земної поверхні 1,25 м. (2013 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

При русі тіла по колу лінійна швидкість $\upsilon=\omega R=2\pi nR$. Це є швидкістю в момент відриву. Рух тіла по вертикалі описується законами рівноприскореного руху, а по горизонталі – рівномірного. Отже, $h=\dfrac{gt^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $l=\upsilon\cdot t$. Остаточно $l=2\pi\cdot n\cdot R\cdot\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Підставивши числові значення, маємо: $l=2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot 1{,}25}{10}}=9{,}42$ м .



26. М'яч падає на вершину похилої площини, як показано на малюнку. Кут нахилу площини α становить 45^0. За якої висоти h після абсолютно пружного відбивання м'яч впаде якнайшвидше і якнайближче до початку похилої площини (точки A). Висота площини H. (2002 р. II е. 10 к.)

Розв'язок

Найшвидше м'яч впаде, коли відбивання буде один раз. Оскільки м'яч відбивається під кутом 45^0, то його швидкість буде напрямлена горизонтально і при попаданні в точку А дальність польоту по горизонталі дорівнює H. Швидкість у горизонтальному напрямі υ_0 визначається із співвідношення $\upsilon_0 t=H$. Оскільки $H=\dfrac{gt^2}{2}$, одержимо: $\upsilon_0=\sqrt{\dfrac{gH}{2}}$. Щоб досягти такої швидкості, м'яч повинен впасти з висоти h, яка визначається із співвідношення $\upsilon_0=\sqrt{2gh}$. Звідси одержимо: $h=\dfrac{H}{4}$.

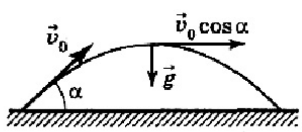
27. З центра підлоги циліндричної кімнати під кутом α до горизонту з деякою швидкістю кидають м'яч. Через час T після трьох пружних ударів об стінки і стелю він падає знову в центрі підлоги. Визначити швидкість м'яча під час кидка. Радіус кімнати r. Опором повітря знехтувати. (2006 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Модуль горизонтальної проекції швидкості м'яча рівний $\upsilon\cos\alpha$ й не міняється як під час вільного польоту, так і після ударів об стінку й стелю. За час польоту м'яч пролетів по горизонталі шлях $4r$. Отже, $\upsilon T\cos\alpha=4r$. $\upsilon=\dfrac{4r}{T\cos\alpha}$.

28. Камінь, кинутий під кутом α до горизонту із швидкістю υ_0, описує параболічну траєкторію. По тій же траєкторії рухається птах зі швидкістю υ_0. Визначте його прискорення у верхній точці траєкторії. (2006 р. II е. 9 к.)

Розв'язок



Горизонтальна складова швидкості каменя у верхній точці $\upsilon_0\cos\alpha$. Нехай R – радіус кривизни траєкторії в верхній точці. Тоді $R=\dfrac{(\upsilon_0\cos\alpha)^2}{g}$. Прискорення птаха в верхній точці $a=\dfrac{\upsilon_0^2}{R}=\dfrac{g}{\cos^2\alpha}$.

29. Циліндр заввишки 100 см наповнений водою. Де треба зробити отвір у стінці циліндра, щоб дальність польоту струменя води, який витікає з отвору, була найбільшою (2002 р. з. 10 к.)

Розв'язок

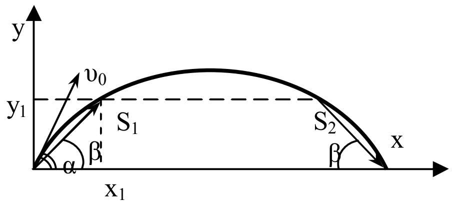
Швидкість витікання води знаходимо із закону збереження енергії $mgh=\dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Звідси $\upsilon=\sqrt{2gh}$. Дальність польоту струменя води $l=\upsilon\cdot t$. Враховуючи, що $t=\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}}$, одержимо: $l=\sqrt{2gh}\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}}=2\sqrt{hH-h^2}$.

Дальність польоту буде максимальна, якщо максимальний підкореневий вираз. Дослідимо його. Це квадратне рівняння, графік якого є парабола з донизу напрямленими вітками. Максимум ординати графіка

$y = ax^2 + bx + c$ досягається, коли значення абсциси $x = -\dfrac{b}{2a}$. Застосуємо цей вираз для нашого випадку: $y = -h^2 + Hh + 0$, отримаємо: $h = 0{,}5H$.

30. Тіло кинули під кутом 60^0 до горизонту з початковою швидкістю 30 м/с. Знайти його переміщення за останню секунду польоту. Під яким кутом тіло впаде на землю? (2002 р. ІІ е. 11 к., 2006 р. з. 10 к.)

Розв'язок



Оскільки траєкторія симетрична, то модуль переміщення s_2 за останню секунду дорівнює модулеві переміщення за першу секунду s_1. Враховуючи, що $x_1 = \upsilon_0 t \cos\alpha$, $y_1 = \upsilon_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$,

одержимо: $s_1 = s_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(\upsilon_0 t \cos\alpha)^2 + \left(\upsilon_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}\right)^2}$.

s_1=26 м.

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - \frac{gt}{2}}{\upsilon_0 \cos\alpha} \approx 1{,}4, \quad \beta \approx 54^\circ.$$

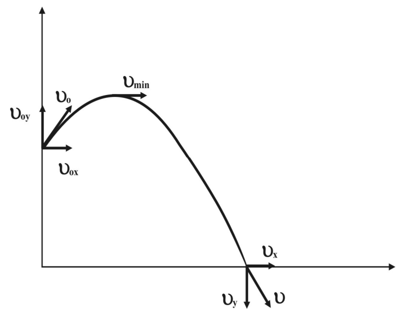
31. Петарда вибухає через 2 с після кидання. Під яким кутом до горизонту і з якою швидкістю її потрібно кинути, щоб вона вибухнула у верхній точці траєкторії на відстані не меншій 25 м від місця кидання? Опір повітря не враховувати. (2006 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки час руху t=2 с, то $\upsilon_{oy}=gt$=20 м/с. Висота підйому $h = \dfrac{\upsilon_{oy}^2}{2g}$; h=20 м. Дальність польоту по горизонталі $l = \sqrt{S^2 - h^2} = 15$ м. Тоді $\upsilon_{0x} = \dfrac{l}{t} = 7{,}5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Отже швидкість кидання $\upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + \upsilon_{0y}^2} \approx 21\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$. Кут знайдемо із співвідношення $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}} = \dfrac{20\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{7{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}} = \dfrac{8}{3}$. α=arctg (8/3)≈69^0.

32. Стріла, випущена з лука під кутом до горизонту з швидкістю 39 м/с впала на землю зі швидкістю 45 м/с через 4,2 с. Визначити мінімальну швидкість руху стріли під час польоту. Силу опору повітря не враховувати. (2007 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок



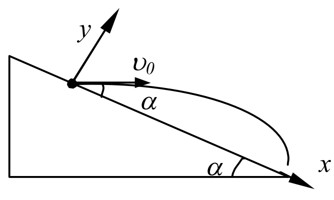
Траєкторією руху стріли є вітка параболи. За умовою швидкість падіння стріли більша за початкову, отже точка падіння нижча за точку вильоту. Мінімальною буде швидкість у вершині параболи. $\upsilon_{\min} = \upsilon_0 \cos\alpha$. Знайдемо кут α. $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$; $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$; $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$; $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$. $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \upsilon_0^2 \cos^2\alpha + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2$.

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 \sin\alpha \cdot gt + g^2 t^2$. $\sin\alpha = \dfrac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2 + g^2 t^2}{2\upsilon_0 gt}$.

$\sin\alpha \approx 0{,}38$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - 0{,}38^2} = 0{,}92$. $\upsilon_{\min} \approx 36\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

33. Камінь кидають горизонтально із швидкістю 14 м/с з гірки, схил якої утворює з горизонтом кут 45^0. На якій найбільшій відстані від поверхні гори буде знаходитись камінь під час польоту? (2004 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок



Вибираємо систему відліку пов'язану з похилою площиною. Тоді в даній системі відліку відносно осі Оy тіло матиме початкову швидкість $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$ і рухатиметься з прискоренням $g_y = g\cos\alpha$. У найвищій точці траєкторії υ_y=0. Тоді $h = \dfrac{\upsilon_y^2 - \upsilon_{0y}^2}{-2g_y}$, $h = \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g_y} = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g\cos\alpha} = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\alpha$. h=7,1 м.

34. Отримавши дані про місцезнаходження цілі на відстані 9730 м по горизонталі, командир артилерії вирішив влучити в неї одночасно двома снарядами. Який проміжок часу між двома пострілами, якщо швидкість снаряда 332 м/с? Опором повітря знехтувати. g=9,81 м/с^2. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Дальність польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Звідси

$\sin 2\alpha = 0{,}866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, стріляти потрібно спочатку під кутом 60^0 (навісна траєкторія, час руху довший), а потім під кутом 30^0 (час руху менший). Час руху тіла, кинутого під кутом до горизонту $t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$. t_1=58,6 с; t_2=33,8 с. Отже на підготовку другого пострілу є $t_1 - t_2$=24,8 с.

35. Тенісний м'яч, кинутий під кутом до горизонту, попадає на гладеньку дошку, яка розміщена похило. Після абсолютно пружного відбивання, м'яч попадає у точку кидання, затративши на політ у $\sqrt{3}$ разів менший час. Під яким кутом кинули м'яч, якщо точка відбивання від дошки і точка кидання знаходяться на одному рівні стосовно земної поверхні. Опір повітря не враховувати. (2003 р. з. 10 к.)

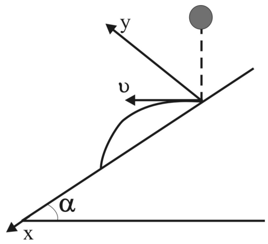
Розв'язок

Дальність польоту м'яча визначається за формулою $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Оскільки удар пружний і м'яч повернувся в точку кидання, то при русі назад $l = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$. Звідси $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Оскільки $t_1 \neq t_2$, розв'язок справджується за умови $\beta = 90 - \alpha$ ($\alpha = \beta$ буде за умови $t_1 = t_2$). Час руху м'яча визначається із співвідношень: $t_1 = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$ і $t_2 = \frac{2\upsilon_0 \sin\beta}{g}$. Тоді $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{3}$, звідки

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$. $\quad tg\alpha = \sqrt{3}$, $\quad \alpha = 60^0$.

36. Абсолютно пружна кулька вільно падає з деякої висоти h на похилу площину. На якій відстані від точки падіння буде знаходитися наступна точка зіткнення кульки з похилою площиною, якщо кут нахилу площини 45^0? (2003 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок



Швидкість в момент удару $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$ (1). Виберемо координатні осі так, як показано на малюнку. Рух уздовж обох осей є рівнозмінним з відповідними прискореннями: $g_x = g\sin\alpha$, $g_y = -g\cos\alpha$ (2). Складові швидкостей (початкові) після першого удару: $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \sin\alpha$ (3).

Швидкість уздовж осі Oy зміниться за законом $\upsilon_y = \upsilon_{oy} + g_y t = \upsilon_0 \cos\alpha - g\cos\alpha \cdot t$.

Оскільки у верхній точці υ_y=0, то час руху вгору $t = \frac{\upsilon_0}{g}$ (4). Час між першим і другим ударами $t_0 = \frac{2\upsilon_0}{g}$. Рівняння руху уздовж осі O*x*: $x = \upsilon_{0x} t + \frac{g_x t^2}{2}$ і для моменту t_0 з врахуванням (1), (3) і (4) одержимо: $\Delta s = x = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_0 + \frac{g\sin\alpha t_0^2}{2} = 4\frac{\upsilon_0^2 \sin\alpha}{g} = 8h\sin\alpha$.

37. Максимальна дальність польоту камінця, випущеного з рогатки 22,5 м. На яку найбільшу відстань залетить камінець, випущений з цієї ж рогатки з платформи, яка рухається в напрямку кидання з швидкістю 15 м/с? Опір повітря не враховувати. (2006 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

Дальність польоту каменя $s = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2}{g}$. Дальність польоту максимальна, якщо $\sin 2\alpha$=1, тобто $\alpha = 45^0$.

Звідси $\upsilon_0 = \sqrt{gs} = 15\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Дальність польоту каменя з рухомої платформи $s_1 = (\upsilon + \upsilon_0 \cos\alpha)t$, де t – час польоту каменя, υ – швидкість платформи. Час польоту $t = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$.

Тоді дальність польоту

$s_1 = (\upsilon + \upsilon_0 \cos\alpha)\dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$. Оскільки $\upsilon=\upsilon_0$, то $s_1 = \dfrac{2\upsilon_0^2}{g}(1+\cos\alpha)\sin\alpha$. Знайдемо максимальне значення, якого може набувати даний вираз. Нехай $y = (1+\cos\alpha)\sin\alpha$; $y' = -\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)\cos\alpha$. $-\sin^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$; $\cos^2\alpha + \cos\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 0$;

$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$. Розв'язавши останнє рівняння, отримаємо: $\cos\alpha = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{-1-3}{4} = -1$ (не задовольняє умову задачі). $\alpha=60^0$. Остаточно маємо: $s_1 = \dfrac{2\cdot 225}{10}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 58{,}5$ м .