2.110. Вкажемо на рисунку (*рис. 291*) всі сили, прикладені до тіла. Тут N_1 і N_2 — сили реакції опори, $F_т$ — сила тертя при проковзуванні. Запишемо рівняння динаміки для кожного тіла в проекціях на вісь, спрямовану паралельно силі $\vec{F}$.

Для першого тіла:

$$F_т = m_1 a_1. \qquad (1)$$

Для другого тіла:

$$F - F'_т = m_2 a_2. \qquad (2)$$

Оскільки верхній брусок ще нерухомий відносно нижнього, обидва бруски рухаються з однаковим прискоренням $a_1 = a_2 = a$. Врахуємо, що $F_т = F'_т$. Оскільки перше тіло перебуває на грані проковзування, $F_{т1} = \mu_1 m_1 g$, $F_{т2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 (m_1 + m_2) g$. З урахуванням цього рівняння (1) і (2) набудуть вигляду:

$$\mu_1 m_1 g = m_1 a \text{ і } F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 (m_1 + m_2) g = m_2 a.$$

Розв'язавши цю систему відносно F, дістанемо:

$$F = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2) g, \text{ або } F = 9\text{ Н}.$$

2.111. Під час руху вгору на тіло діють сила тяжіння mg і сила опору повітря $F_0 = kv$. Обидві сили спрямовані вниз. Отже, прискорення a_1 при підійманні:

$$a_1 = \frac{mg + F_0}{m} = g + \frac{F_0}{m}.$$

У верхній точці траєкторії $F_0 = 0$, оскільки $v = 0$ і $a_2 = g$. Під час руху тіла вниз сила опору повітря F_0 спрямована вгору, тобто в бік, протилежний силі тяжіння. Отже,

$$a_3 = \frac{mg - F_0}{m} = g - \frac{F_0}{m}.$$

З аналізу одержаних виразів випливає, що $a_1 > a_2 > a_3$.

2.112. Нехай для певності прискорення першого тіла спрямоване вниз, а другого — відповідно вгору. Тоді рівняння руху тіл в проекціях на вертикальний напрямок мають вигляд:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \text{ і } T_2 - m_2 g = m_2 a_2.$$

З умови невагомості рухомого блока дістанемо $T_2 = 2T_1$, а із кінематичного зв'язку — $a_1 = 2a_2$. Об'єднавши всі одержані рівняння в систему, знайдемо шукані величини:

$$a_1 = 2g\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2};\ a_2 = \frac{1}{2}a_1;\ T_1 = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2};\ T_2 = 2T_1.$$

2.113. Зобразимо на *рис. 292* сили, які діють на бруски в горизонтальному напрямі. Обравши за додатний напрям координатної осі Ox від блока вправо, запишемо рівняння руху тіл (в проекціях на вісь Ox):

$$Ma_1 = F - F_1 - F_{т1} \text{ і } -ma_2 = -F_1 + F_{т2},$$

де F_1 — проекція сили пружності нитки. Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення брусків за модулем однакові: $a_1 = a_2$. Однакові за модулем і сили тертя $F_{т1} = F_{т2}$, в даному випадку $F_т = \mu mg$. Враховуючи це і виразивши з другого рівняння F_1, дістанемо $F = (M+m)a + 2\mu mg$, або $F = 24{,}5\ \text{Н}$.

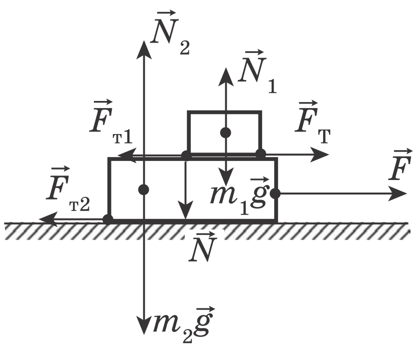

Рис. 291

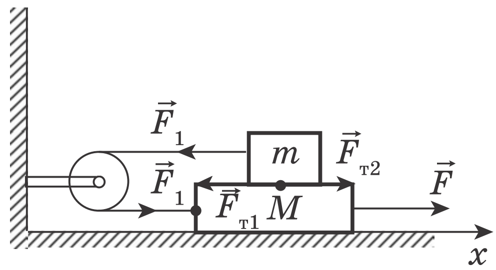

Рис. 292

2.114. Коли візок і вантаж їдуть разом, на вантаж діють сила натягу нитки, що дорівнює F і спрямована вправо, і сила тертя, яка дорівнює $F_т = \mu mg$ і спрямована вліво. На візок при цьому діє одна-єдина горизонтальна сила — сила тертя, спрямована вправо. Таким чином,

$$F - \mu mg = ma \text{ і } \mu mg = Ma,$$

звідки

$$a = \frac{m}{M}\mu g,\ F = (M+m)a = \mu mg\left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{16}{3}\ (\text{Н}).$$

Якщо тягнути за нитку силою $F = \frac{20}{3}\ \text{Н} > \frac{16}{3}\ \text{Н}$, то візок рухатиметься з прискоренням

$$a_м = \frac{\mu mg}{M} = \frac{4}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 1{,}3\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right),$$

а прискорення вантажу дорівнюватиме:

$$a_в = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{16}{3}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) \approx 2{,}7\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

2.115. В обох випадках руху (вгору і вниз) по похилій площині з кутом нахилу α сила тертя, яка дорівнює $\mu mg\cos\alpha$, спрямована проти руху. Тому, згідно з другим законом Ньютона, маємо

$$ma_1 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \text{ і } ma_2 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

звідки

$$\sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g}.$$

З графіка, показаного в умові, знаходимо:

$$a_1 = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ a_2 = \frac{8}{9}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},\text{ тому } \alpha = arc\sin 0{,}15 = 9^\circ.$$

2.116. По-перше, зауважимо, що внаслідок невагомості блоків $T = 2T$, тобто $T = 0$. Далі запишемо рівняння руху вантажів: $m_1 g = m_1 a_1$, $m_2 g = m_2 a_2$. З цих рівнянь випливає, що $a_1 = a_2 = g$.

2.117. Сили, які діють на стрижень, показані на *рис. 293*. Мінімальна сила F, яку треба прикласти до платформи для того, щоб зрушити її з місця, чисельно дорівнює силі тертя, яка діє на стрижень з боку платформи. Оскільки стрижень перебуває в рівновазі, то сума моментів сил, які діють на стрижень, відносно точки A повинна дорівнювати нулю.

При русі платформи вправо:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Nl\sin\alpha - F_\text{т} l\cos\alpha = 0.$$

При русі платформи вліво:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Nl\sin\alpha + F_\text{т} l\cos\alpha = 0.$$

Враховуючи, що $N = \dfrac{F_\text{т}}{\mu}$, дістанемо:

$$F = \frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha)}.$$

Якщо $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu$, платформу не можна зрушити вліво як завгодно великою силою. Відбувається «заклинювання».

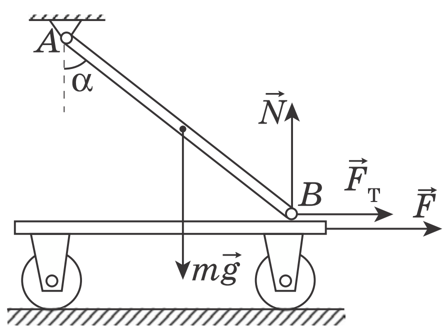

Рис. 293

2.118. Мінімальне значення сили F_0 повинне за модулем дорівнювати (точніше, бути трохи більшим) максимальному значенню сили тертя спокою, яка, як відомо, наближено дорівнює силі тертя ковзання $F_\text{т.к}$. Силу тертя ковзання знайдемо, спроектувавши рівняння руху бруска на напрям сили $\vec{F}$:

$$ma = F - F_\text{т.к},\text{ звідки } F_\text{т.к} = F - ma.$$

Отже, $F_0 = F_\text{т.к} = 5\text{ Н}$.

2.119. Сила тертя спокою надає пасажирові масою m, який лежить на полиці, прискорення a. У граничному випадку $\mu mg = ma_{\max}$ (при $a > a_{\max}$ пасажир упаде). Тоді $t = \frac{v}{\mu g} \approx 10\,(\text{с})$ і $s = \frac{v^2}{2\mu g} \approx 100$ (м). На практиці для забезпечення безпеки пасажирів гальмування здійснюється на більшій довжині шляху.

2.120. На пасажира літака, що летить з горизонтальним прискоренням $\vec{a}$, з боку крісла діють дві сили: горизонтальна сила $m\vec{a}$ і вертикальна сила $-m\vec{g}$, яка компенсує силу тяжіння. Такі самі за модулем сили, однак, спрямовані в протилежні сторони, діють (за третім законом Ньютона) з боку пасажира на крісло. Абсолютне значення результуючої сили, яка діє на опору, тобто вага пасажира є $P = \sqrt{(ma)^2 + (mg)^2}$. За умовою задачі, $P = 2mg$. Звідси $a \leqslant \sqrt{3}\,g$.

2.121. Відразу після перепалювання горизонтальної нитки тягарець m_1 починає рухатися по дузі кола з прискоренням a_1, дотичним до кола. Оскільки швидкість цього тягарця в момент перепалювання нитки дорівнює нулю, його доцентрове прискорення в цей момент відсутнє. Тягарець m_2 починає рухатися з прискоренням a_2, спрямованим вертикально вниз. Рівняння руху обох тягарців мають вигляд:

$$m_1 a_1 = (m_1 g + T)\sin\alpha, \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T, \quad (2)$$

де T — натяг нитки, яка з'єднує обидва тягарці (*рис. 294*). Оскільки нитка нерозтяжна, прискорення нижнього тягарця і вертикальна складова прискорення верхнього тягарця однакові:

$$a_2 = a_1 \sin\alpha. \quad (3)$$

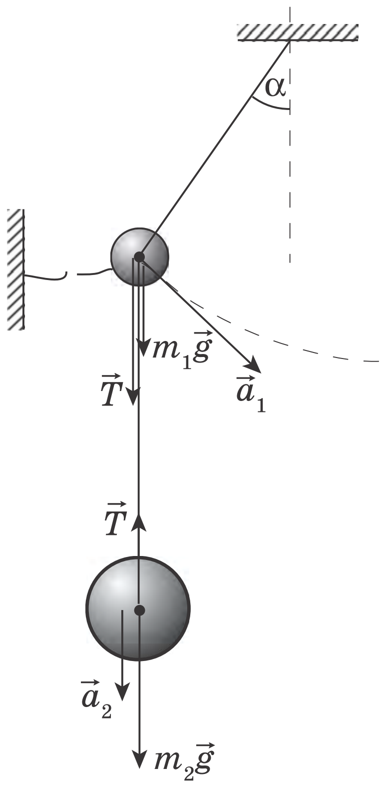

Рис. 294

З рівностей (1) — (3) знаходимо:

$$a_2 = g\sin^2\alpha \frac{\frac{m_1}{m_2} + 1}{\frac{m_1}{m_2} + \sin^2\alpha} \approx 9\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

2.122. Оберемо систему координат xOy так, як показано на *рисунку 295*. Оскільки нитка нерозтяжна, відрізки ниток, які не лежать на блоках, або вертикальні, або горизонтальні, а блоки є циліндрами, які можуть обертатися навколо своїх осей, то можна вважати, що після початку руху $\Delta y = 2\Delta x$, де x — координата точки А бруска, y — координата точки Б кубика. Звідси випливає, що швидкості вказаних точок пов'язані співвідношенням $v_y = 2v_x$. При проходженні положення статичної рівноваги швидкості тіл максимальні і, згідно із законом збереження енергії, повинні задовольняти рівняння

$$\frac{1}{2}ky_p^2+\frac{1}{2}Mv_{ym}^2+\frac{1}{2}mv_{xm}^2=mgx_p,$$

де координата y_p точки A дорівнює $\frac{mg}{2k}$. Звідси знайдемо шукану швидкість:

$$v_{ym}=\frac{mg}{\sqrt{k(4M+m)}}.$$

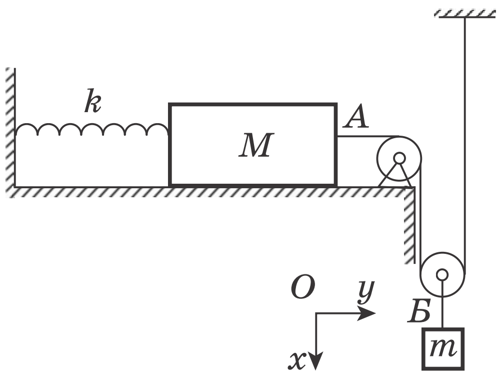

Рис. 295

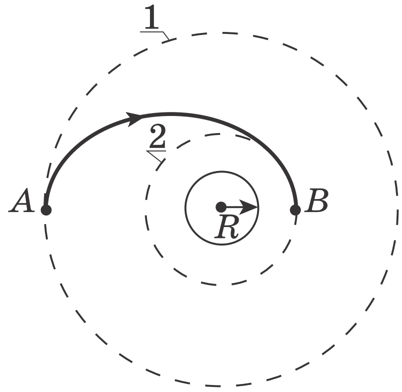

Рис. 296

2.123. Для того, щоб супутник, рухаючись по коловій орбіті, знаходився весь час над однією й тією самою точкою земної поверхні на екваторі, необхідно, щоб період обертання супутника навколо Землі $T_С$ дорівнював періоду обертання Землі навколо своєї осі $T_З$.

Доцентрове прискорення супутника, створюване силою гравітаційного притягання його до Землі, дорівнює:

$$a_д=\frac{F_т}{m}.$$

Виразимо це прискорення через швидкість супутника і радіус його орбіти, а силу $F_т$ за допомогою закону всесвітнього тяжіння:

$$a_д=\frac{v^2}{R}=\frac{4\pi^2R^2}{T_С^2R}=\frac{4\pi^2R}{T_С^2},\ F_т=G\frac{mM}{R^2},$$

де R — радіус орбіти, M — маса Землі. Далі дістанемо:

$$\frac{4\pi^2R}{T_С^2}=G\frac{M}{R^2}.$$

Звідси:

$$R=\sqrt[3]{\frac{GMT_С^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{GMT_С^2}{4\pi^2}},\ \text{або}\ R\approx4{,}2\cdot10^7\ \text{м}=42000\,\text{км}.$$

2.124. Щоб перевести корабель на менш високу колову орбіту, треба двічі вмикати двигун на зменшення швидкості (точки A і B). Траєкторія для переведення — еліптична крива (*рис. 296*), яка дотикається в точках A і B до першої і другої орбіт.

2.125. З *рисунка 296* видно, що $v_2 > v_1$. Однак збільшення швидкості в точці B переводить корабель на еліптичну траєкторію, а рухаючись від перигея (точки B) до апогея (точки A), корабель втрачає швидкість. Щоб перевести корабель на нову колову орбіту, необхідно знову збільшити швидкість, довівши її значення до v_1 .

2.126. На кожен супутник діє сила тяжіння з боку Землі, яка і надає йому доцентричного прискорення:

$$\frac{m_1 v_1^2}{R_1} = G\frac{m_1 M}{R_1^2},\ \frac{m_2 v_2^2}{R_2} = G\frac{m_2 M}{R_2^2}.$$

Звідси, враховуючи, що $G\dfrac{M}{R^2} = g_0$ є відоме прискорення вільного падіння на поверхні Землі, знайдемо мінімальну відстань між супутниками:

$$x = R_1 - R_2 = g_0 R^2\left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2}\right).$$

2.127. З рівняння руху супутника на висоті h над поверхнею Землі $\left(h = h_1, h_2\right)$

$$m\frac{v^2}{R+h} = G\frac{mM}{\left(R+h\right)^2}$$

знайдемо:

$$v^2 = G\frac{M}{R+h}. \qquad (1)$$

На поверхні Землі сила тяжіння mg_0, яка діє на тіло масою m, і сила всесвітнього тяжіння $G\dfrac{mM}{R^2}$ однакові: $G\dfrac{mM}{R^2} = mg_0$, тому $GM = g_0 R^2$. Підставивши $GM = g_0 R^2$ у вираз (1), знайдемо:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{R+h}}. \qquad (2)$$

Орбітальна швидкість супутника і його кутова швидкість зв'язані співвідношенням

$$v = \omega\left(R+h\right). \qquad (3)$$

Із співвідношення (2) знаходимо:

$$R + h = \frac{g_0 R^2}{v^2}. \qquad (4)$$

Відстань $h_{\min}$ між супутниками, яка дорівнює різниці висот їхнього польоту, знайдемо із співвідношення (4), записаного для $h = h_1$ і $h = h_2$:

$$h_{\min} = h_2 - h_1 = g_0 R^2\left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) = 176 \text{ (км)}.$$

В момент максимального зближення обидва супутники знаходяться на спільній вертикалі до поверхні Землі. Якщо супутники обертаються навколо Землі в одному напрямку, то за час τ між двома послідовними зближеннями супутник, який рухається з більшою швидкістю v_1 на меншій висоті h_1, здійснює на один оберт більше, ніж супутник, який рухається з меншою швидкістю v_2 на більшій висоті h_2, тобто

$$\omega_1\tau - \omega_2\tau = 2\pi\text{, звідки } \tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Скориставшись співвідношеннями (3) і (4), знаходимо:

$$\tau_1 = 2\pi g_0 R^2 \left(\frac{1}{v_1^3} - \frac{1}{v_2^3}\right) \approx 39 \text{ (год.)}$$

Якщо ж обертання супутників навколо Землі протилежні, то інтервал τ_1 між їхніми послідовними зближеннями:

$$\tau_2 = 2\pi g_0 R^2 \left(\frac{1}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3}\right) \approx 42 \text{ (хв.)}$$

2.128. Прискорення вільного падіння на Сонці дорівнює

$$g_С = G\frac{M_С}{R_С^2}, \quad (1)$$

де $M_С$ і $R_С$ — відповідно маса і радіус Сонця. Радіус Сонця $R_С$ можна визначити із геометричного співвідношення

$$R_С = \frac{D}{2} = \frac{R\sin\alpha}{2}, \quad (2)$$

де R — відстань від Землі до Сонця, α — кут, під яким видно діаметр Сонця і Землі.

Масу Сонця визначимо, застосувавши другий закон Ньютона до руху Землі навколо Сонця:

$$F = M_З a,\ G\frac{M_З M_С}{R^2} = M_З\frac{4\pi^2 R}{T_З^2},\ M_С = \frac{4\pi^2 R^3}{G T_З^2}. \quad (3)$$

З виразів (1), (2) і (3) дістанемо:

$$g_С = \frac{4\pi^2 R^3 \cdot 4}{C T^2 R^2 \sin^2\alpha} = \frac{16\pi^2 R}{T^2 \sin^2\alpha}\text{, або } g_С \approx 274\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2.129. Під час маневру космічний корабель з космонавтом на борту рухається з прискоренням a, яке визначається дією сили тяжіння Mg і силою тяги F, яку розвивають двигуни:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}. \quad (1)$$

Рівняння руху космонавта, який рухається з тим самим прискоренням:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad (2)$$

де $\vec{N}$ — реакція на космонавта з боку корпусу корабля, g — прискорення вільного падіння на висоті, де здійснюється маневр.

Виключивши з формул (1) і (2) прискорення $\vec{a}$, дістанемо:

$$\vec{N} = \frac{m}{M}\vec{F}.$$

Згідно з третім законом Ньютона і означенням ваги, $\vec{P} = -\vec{N} = -\frac{m}{M}\vec{F}$, звідки вага космонавта під час маневру:

$$P = \frac{m}{M}F = 20\,(\text{Н}).$$

Ця вага менша за вагу $P_0 = mg_0$ космонавта на поверхні Землі $\left(g_0 \approx 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$ в $\frac{P_0}{P} = \frac{Mg}{F} = 49$ разів.

2.130. Вагою тіла $\vec{P}$ називається сила, з якою тіло внаслідок притягання до планети діє на нерухому відносно нього опору чи підвіс. За третім законом Ньютона з боку опори на тіло діє сила реакції $\vec{N}$, рівна за модулем і протилежна за напрямом силі $\vec{P}$. На *рисунку 297* показані сили, які діють на тіла, розміщені на полюсі та екваторі планети.

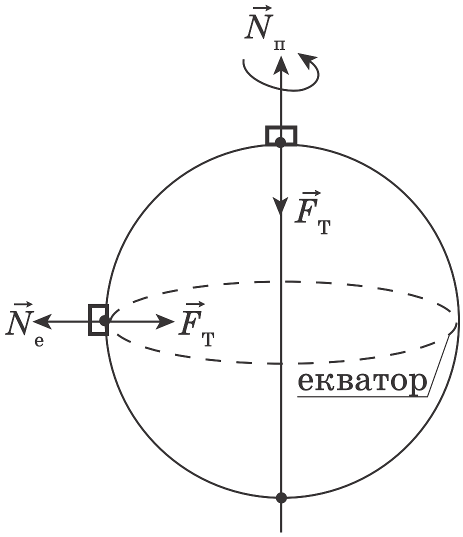

Рис. 297

Рівняння руху тіла на екваторі має вигляд

$$F_\text{т} - N_\text{е} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

де $F_\text{т}$ — сила тяжіння, T — шуканий період обертання планети. Звідси можна знайти вагу тіла на екваторі:

$$P_\text{е} = N_\text{е} = F_\text{т} - m\frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

На полюсі швидкість і доцентрове прискорення дорівнюють нулю, отже, $P_\text{п} = N_\text{п} = F_\text{т}$. За умовою, $P_\text{е} = 0{,}5P_\text{п} = 0{,}5F_\text{т}$, тому дістанемо $m\frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0{,}5F_\text{т}$.

Згідно із законом всесвітнього тяжіння, $F_\text{т} = G\frac{mM}{R^2}$, де m — маса тіла, $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ — маса планети, R — її радіус. Таким чином, з останнього рівняння маємо: $T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho_0}}$.

2.131. Нехай шукана висота h відповідає точці A (*рис. 298*). Розглянемо сили, які діють на санки в цій точці. Це сила притягання до Землі (сила тяжіння) $m\vec{g}$ і сила реакції гірки $\vec{N}$. За третім законом Ньютона, сила реакції гірки дорівнює за модулем силі тиску санок: $N = 2F_\text{т} = 2mg$. Запишемо рівняння руху санок (другий закон Ньютона), прийнявши за додатний напрям осі Ox напрям доцентрового прискорення $a_\text{д}$:

$$N - mg\cos\alpha = ma_\text{д}.$$

Тут $\cos\alpha = \frac{R-h}{R}$ і $a_д = \frac{v_A^2}{R}$.

Підставивши значення N, $\cos\alpha$ і a_4, маємо:

$$2mg - mg\frac{R-h}{R} = \frac{mv_A^2}{R}.$$

Швидкість v_A можна визначити із закону збереження і перетворення енергії — робота сил тертя на ділянці l дорівнює повній енергії санок в точці A:

$$\mu mgl = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh.$$

Розв'язавши одержані рівняння, дістанемо:

$$h = \frac{2\mu l - R}{3} \approx 2{,}7 \text{ (м)}.$$

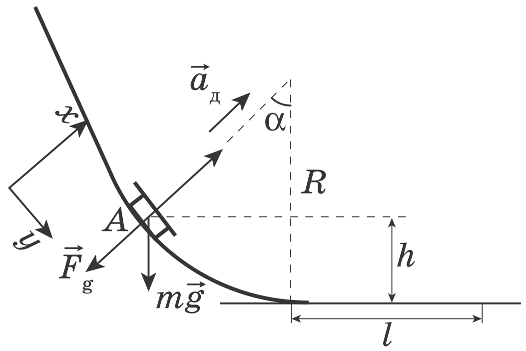

Рис. 298

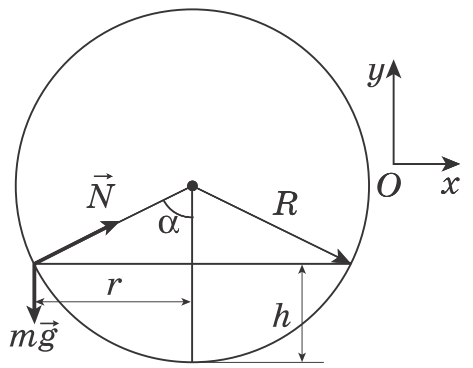

Рис. 299

2.132. Доцентрове прискорення легкоатлета обумовлене силою тертя спокою. Для максимально можливої швидкості v_m можна записати

$$\frac{mv_m^2}{R} = F_т = \mu mg, \text{ звідки } v_m = \sqrt{\mu gR} \approx 9\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Сила тертя спокою забезпечує і нормальне, і тангенціальне прискорення легкоатлета. Якщо швидкість $v < v_m$, то на прискорення в дотичному напрямку «залишається» значення сили $F = \sqrt{F_т^2 - \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2}$, звідки

$$a_д \leqslant \frac{\sqrt{(\mu mg)^2 - \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2}}{m} = \mu g\sqrt{1 - \frac{v^4}{\mu^2 g^2 R^2}} \approx 4\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

2.133. Позначимо радіус кола через R. Тоді, за законом Гука, сила натягу шнура дорівнює $T = k(R - l_0)$. Вона надає кульці доцентрового прискорення $\omega^2 R$: $T = m\omega^2 R$, або $k(R - l_0) = m\omega^2 R$. Звідси одержуємо:

$$R = l_0\frac{k}{k - m\omega^2} \text{ і } T = \frac{\omega^2 k l_0}{k - m\omega^2}.$$

2.134. У системі відліку, зв'язаній з нерухомим спостерігачем (в інерціальній системі відліку), на брусок діє єдина сила — сила тертя з боку шайби. Брусок не буде висковзувати з-під шайби, а обертатиметься навколо осі разом з диском, поки виконується умова (другий закон Ньютона): $M\omega^2 R \leqslant \mu mg$. Звідси знаходимо граничне значення кутової швидкості: $\omega = \sqrt{\dfrac{\mu mg}{MR}}$.

2.135. На мотоцикліста, який рухається зі швидкістю v , діють сила тяжіння mg , сила нормальної реакції N і сила тертя спокою $F_т$. Рівняння руху в проекціях на вертикальну вісь і на горизонтальну вісь, спрямовану до центра кола, мають вигляд:

$$F_т - mg = 0 \text{ і } N = \frac{mv^2}{R}.$$

Для того, щоб колеса не проковзували по поверхні циліндра, повинна виконуватися умова $F_т \leqslant \mu N$. Остаточно дістанемо:

$$v \leqslant \sqrt{\frac{gR}{\mu}} \approx 14\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

2.136. На кульку (*рис. 299*) діють дві сили — сила нормальної реакції N і сила тяжіння mg . Прискорення кульки спрямоване до центра горизонтального кола, по якому вона рухається, і дорівнює $\dfrac{v^2}{r}$, де v — швидкість кульки, r — радіус кола. Запишемо рівняння другого закону Ньютона в проекціях на осі Ox і Oy :

$$N\sin\alpha = m\frac{v^2}{r} \text{ і } N\cos\alpha - mg = 0.$$

Виключивши N, дістанемо: $v^2 = gr\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Враховуючи, що $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{r}{R-h}$, а $r^2 = R^2 - (R-h)^2$, знаходимо:

$$v = \sqrt{\frac{gh(2R-h)}{R-h}} = 3\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

2.137. Обертальний рух обруча можна змінити поступальним рухом точок його ободу. Тому можна записати:

$$v_0 = \omega_0 R = at,\ l = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(\omega_0 R)^2}{2a},$$

де $a = \mu g$. Звідси для часу і числа обертів дістанемо:

$$t = \frac{\omega_0 R}{\mu g},\ N = \frac{l}{2\pi R} = \frac{\omega_0^2 R}{4\pi\mu g}.$$

2.138. Для того, щоб котушка не почала ковзати по стіні, необхідно, щоб сума всіх сил, які діють на котушку (*рис. 300*), а також сума моментів цих сил відносно будь-якої осі дорівнювали нулю:

$$Mg - T\cos\alpha - F_т = 0, \quad (1)$$

$$T\sin\alpha - N = 0, \quad (2)$$

$$Tr - F_т R = 0. \quad (3)$$

З урахуванням того, що $F_т \leqslant \mu N$, з (2) і (3) випливає:

$$\sin\alpha \geqslant \frac{r}{R}\mu. \quad (4)$$

З рівнянь (1), (2) і (4) можна знайти натяг нитки:

$$T \geqslant \frac{Mg}{\cos\alpha + \frac{r}{R}}.$$

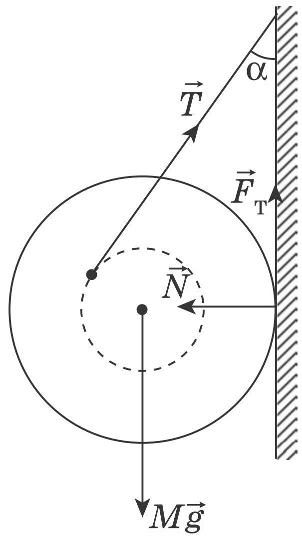

Рис. 300

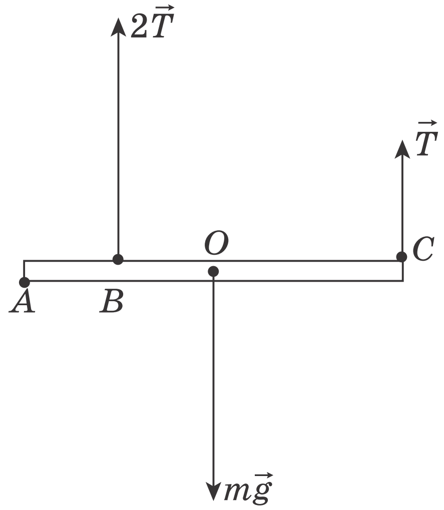

Рис. 301

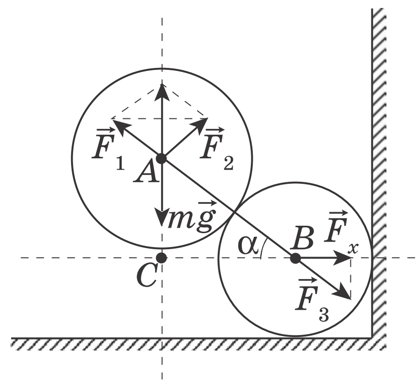

Рис. 302

2.139. Схема сил, прикладних до стрижня, зображена на *рис. 301*. Вага стрижня дорівнює $3T$, де T — сила натягу нитки підвісу в т. C. З умови рівноваги $OC = 2\ \ OB = AO$ і $AC = 4$ м.

2.140. Три кульки лежать на дні посудини, четверта зверху спирається на них. З'єднавши центри кульок, дістанемо правильну трикутну піраміду. Розглянемо взаємодію верхньої та однієї з нижніх кульок (*рис. 302*). Сила тиску нижньої кульки на стінку посудини дорівнює $F_x = F_3\cos\alpha$, де F_3 — сила тиску верхньої кульки на нижню. На верхню кульку діють сили: mg, $F_1 = F_3$ і F_2 — сумарна сила тиску решти двох нижніх кульок на верхню. З умови рівноваги верхньої кульки $F_1 = F_2$;

$$F_1 = \frac{1}{2}mg\cdot\frac{1}{\sin\alpha}.$$

З трикутника ABC $\cos\alpha = \dfrac{D-d}{2d}$, тоді $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{3d^2 - D^2 + 2dD}{4d^2}}$.

Маса кульки $\pi\rho\dfrac{d^3}{6}$.

Остаточно дістанемо: $F_x = \dfrac{\pi d^3}{12}\rho g\dfrac{D-d}{\sqrt{3d^2 - D^2 + 2dD}}$, або $F_x \approx 1{,}7$ Н.

2.141. Для прикладу розглянемо правий циліндр, який лежить на площині (*рис. 303*). На нього діють сили: тяжіння $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}$, тертя $\vec{F}_T$ і $\vec{F}_T'$, а також сили тиску з боку інших циліндрів $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Мінімальний коефіцієнт тертя $\mu_{\min} = \dfrac{F_T}{N}$, де сила N визначається рівністю:

$$3mg = 2N.$$

Умови рівноваги циліндра записуються так:

$$F_1 + F_2\cos\varphi = F_т + F_т{}'\sin\varphi,\ N = mg + F_2\sin\varphi + F_т{}'\cos\varphi,\ F_т R = F_т{}' R,$$

де R — радіус циліндра, а кут $\varphi = 60°$. При мінімальному коефіцієнті тертя мінімальною буде і сила тертя $F_т$, що реалізується за умови, коли $F_1 = 0$.

Тоді: $\mu_{\min} = \dfrac{\cos\varphi}{3(1+\sin\varphi)} \approx 0{,}09$.

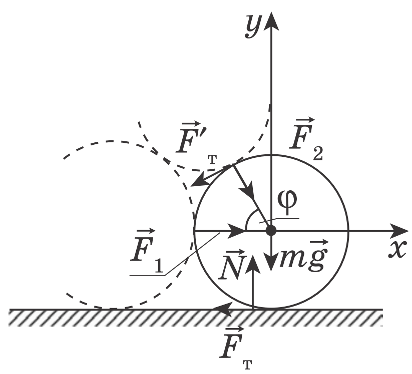

Рис. 303

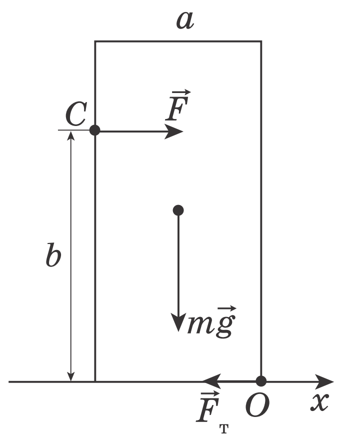

Рис. 304

2.142. На *рис. 304* вказані сили, що діють на шафу при її ковзанні: $m\vec{g}$ — сила тяжіння, $\vec{F}$ — сила, з якою хлопець тисне на шафу, $\vec{F}_T$ — сила тертя і $\vec{N}$ — реакція опори. Внаслідок спеціального вибору точки прикладання сили $\vec{F}$ (точка C) шафа тисне на підлогу лише передніми ніжками (якщо прикласти силу трохи вище точки , шафа почне перекидатися). В той же час шафа починає ковзати, якщо силу $\vec{F}$ прикласти в точці C. Тому $F_т = \mu N$.
Запишемо умову рівноваги шафи:
для горизонтального напряму: $F - \mu N = 0$, (1)
для вертикального напряму: $mg - N = 0$ (2)
і рівність нулю алгебраїчної суми моментів сил, що діють на шафу, відносно горизонтальної осі, яка проходить через точку A перпендикулярно до площини малюнка:

$$bF - \frac{1}{2}amg = 0. \tag{3}$$

Розв’язавши систему рівнянь (1) — (3), знаходимо коефіцієнт тертя шафи по підлозі $\mu = \dfrac{a}{2b}$.

2.143. Насамперед з'ясуємо, чи ковзає брусок по дошці, чи система брусок — дошка рухається як єдине ціле. Максимальне значення сили тертя спокою $F_{\text{т.с.max}}$, після досягнення якого брусок міг би почати ковзати по дошці, дорівнює силі тертя ковзання: $F_{\text{т.с.max}} = \mu mg \approx 3{,}9\ \text{Н}$. Прикладена до бруска зовнішня сила $F = 2\text{Н}$ менша за $F_{\text{т.с.max}}$. Отже, ковзання бруска по дошці немає, тобто система рухається як одне ціле. Виконана зовнішньою силою робота $A_з = Fl$ йде на збільшення кінетичної енергії системи:

$$Fl = \frac{1}{2}(M+m)v^2 .$$

При цьому над дошкою виконується робота, яка дорівнює приросту її кінетичної енергії $A = \frac{1}{2}Mv^2$. Виключивши з написаних рівностей швидкість v, знайдемо:

$$A = \frac{FlM}{M+m} \approx 1{,}3\ (\text{Дж}).$$

Задачу можна розв'язати й інакше. Запишемо рівняння руху бруска і дошки, які рухаються з однаковими прискореннями a (див. *рисунок 305*, на якому зображені лише горизонтальні сили, що діють на брусок і на дошку):

$$ma = F - F_{\text{т.с}}\ ,\ Ma = F_{\text{т.с.}} .$$

Звідси знайдемо силу тертя спокою: $F_{\text{т.с}} = \dfrac{FM}{M+m}$. Ця сила, що діє з боку бруска на дошку, виконає над дошкою роботу:

$$A = F_{\text{т.с}}l = \frac{FlM}{M+m} .$$

2.144. Запишемо умову рівноваги коромисла в момент відривання тіла A: $T_2l_2 - T_1l_1 = 0$, де T_1 — сила натягу лівої нитки, T_2 — сила натягу правої нитки. Сила натягу T_2 буде максимальною в той момент, коли права нитка набуде вертикального положення. Запишемо для цього моменту для обох тіл другий закон Ньютона і закон збереження механічної енергії:

$$T_1 = m_1g\ , T_2 - m_2g = \frac{m_2v^2}{l}\ \text{ і }\ \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gl(1-\cos\alpha),$$

де l — довжина нитки, α — шуканий кут її відхилення. З останніх двох рівнянь знаходимо: $T_2 = m_2g(3-2\cos\alpha)$. Підставивши сюди значення сили натягу в рівняння рівноваги коромисла, знайдемо шукане значення кута α:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{m_1l_1}{m_2l_2}\right) = \frac{1}{2}\ ,\ \alpha = 60^\circ .$$

2.145. Нехай T — натяг нитки, l — її довжина (*рис. 306*). Тоді:

$$\frac{mv^2}{R} = T\sin\alpha\ ,\ mg = T\cos\alpha\ ,\ R = l\sin\alpha\ ,\ E_к = mgl\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} .$$

Звідси:

$$\frac{E_{к_2}}{E_{к_1}} = \frac{\sin^2\alpha_2 \cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 \cos\alpha_2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

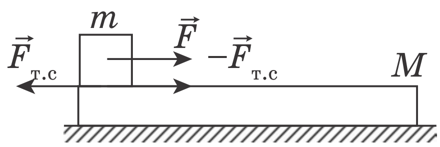

Рис. 305

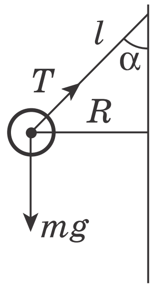

Рис. 306

2.146. У нижній точці траєкторії швидкість кульки масою m_1 дорівнює $v_0 = \sqrt{2gL}$. При пружному ударі виконуються закони збереження кінетичної енергії й імпульсу:

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2;\ m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Звідси знаходимо:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0.$$

Для першої кульки після удару $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g h$, звідки

$$h = L\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = 25\ (\text{см}).$$

2.147. Розв'яжемо задачу в системі відліку, зв'язаній із землею. Вода, яка стікає на землю, має горизонтальну складову швидкості, яка дорівнює швидкості потяга. Тому горизонтальна складова імпульсу води, яка стікає на землю за час Δt, дорівнює $\left(\frac{m}{\tau}\Delta t\right)v$, де $m = 100$ кг — маса води, яка стікає на землю за $\tau = 1$ секунду. При падінні ж води на поїзд горизонтальна складова її імпульсу дорівнює нулю. Таким чином, потяг за час Δt передає воді імпульс:

$$\frac{m}{\tau}v\Delta t - 0 = \frac{m}{\tau}v\Delta t.$$

Це означає, що на воду з боку потяга і, згідно з третім законом Ньютона, на потяг з боку води діє сила, рівна за модулем:

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{m}{\tau}v.$$

Отже, щоб швидкість потяга не змінилась, саме на значення сили F і повинна зрости сила тяги локомотива під час дощу. А його потужність повинна зрости на $\Delta P = Fv = \frac{m}{\tau}v^2 = 4\cdot 10^4$ (Вт).

2.148. Вважаючи, що за рахунок роботи, яку виконує двигун, збільшується кінетична енергія автомобіля: $A = \Delta E_к$. Отже, на першій ділянці розгону двигун виконує роботу A_1 , яка дорівнює

$$A_1 = \Delta E_{к1} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 - 0 = \frac{1}{8}mv^2 .$$

На другій ділянці робота A_2 дорівнює:

$$A_2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}mv^2 .$$

Відношення робіт на вказаних ділянках розгону дорівнює: $A_1 : A_2 = 1:3$, тобто чим більша швидкість, тим більшу роботу повинен виконати двигун, щоб підтримувати прискорення руху постійним.

2.149. Позначимо v_{1y} і v_{2y} проекції швидкостей кулі і дошки на вертикальну вісь після вильоту кулі з дошки і запишемо закон збереження імпульсу в проекції на цю вісь, а також закон збереження енергії для кулі й дошки:

$$m_1 v_0 \sin\alpha = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} ;\ \frac{1}{2}m_1 v_{1y}^2 = m_1 gH \text{ і } \frac{1}{2}m_2 v_{2y}^2 = m_2 gh .$$

Звідси дістанемо:

$$h = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{\left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{2gH}\right)^2}{2g} \approx 0{,}11 \text{ (м)}.$$

2.150. Енергія E , яку витрачає людина при стрибку, розподіляється між людиною і візком. На основі законів збереження енергії та імпульсу запишемо:

$$E = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \text{ і } Mv_1 - mv_2 = 0 ,$$

де v_1 і v_2 — швидкості людини і візка відразу після стрибка. Робота проти сили тертя:

$$A = \mu mgs = \frac{1}{2}mv_2^2 .$$

Отже, $E = \mu mgs\left(1 + \frac{m}{M}\right)$.

2.151. У верхній точці траєкторії швидкість гранати $v = v_0 \cos\alpha$. Нехай v_1 і v_2 — швидкості осколків. Із законів збереження імпульсу і енергії

$$mv_0 \cos\alpha = \frac{1}{2}mv_1 + \frac{1}{2}mv_2 ,\ \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2\alpha + E = \frac{1}{4}mv_1^2 + \frac{1}{4}mv_2^2$$

знаходимо:

$$|v_1 - v_2| = 2\sqrt{\frac{2E}{m}} .$$

Відстань між точками падіння осколків дорівнює:

$$l = |v_1 - v_2| t = 2\sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 6 \text{ (м)}.$$

2.152. Горизонтальна складова швидкості каменя дорівнює $v_к = v_0 \cos\alpha = 5 \left(\frac{м}{с}\right)$. Оскільки горизонтальна складова імпульсу системи зберігається, то $Mv_ч = mv_к$, де $v_ч$ — швидкість човна. Отже, $v_ч = \frac{m}{M} v_к \approx 0{,}033 \left(\frac{м}{с}\right)$. Час польоту каменя $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, або $t \approx 1{,}73$ с. Відстань між точкою падіння каменя і човном в момент падіння складається зі шляху, пройденого човном, і горизонтального переміщення каменя: $s = s_к + s_ч = (v_к + v_ч)t$, або $s \approx 8{,}71$ м.

2.153. Швидкість шайби на вершині трампліна v можна знайти за допомогою закону збереження енергії:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgh.$$

Висота трампліна і дальність польоту шайби зв'язані з часом польоту t формулами: $h = \frac{1}{2} g t^2$ і $s = vt$.

Із записаних вище рівностей дістанемо залежність дальності польоту шайби від висоти трампліна:

$$s = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(v_0^2 - 2gh\right)} = 2\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 - \left(h - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2}.$$

Вочевидь, що дальність польоту буде максимальною за умови $h = \frac{v_0^2}{4g} = 3{,}6$ (м), причому найбільш максимальна дальність: $s = \frac{v_0^2}{2g} = 7{,}2$ (м).

2.154. Літак спускається по прямій лінії, яка утворює з горизонтом кут α, причому $\sin\alpha = \frac{h_1 - h_2}{l}$. На літак діють: сила тяжіння, яка спрямована вертикально вниз і дорівнює mg, підіймальна сила, спрямована перпендикулярно до лінії руху літака, і сила опору F повітря, спрямована в бік, протилежний рухові. Оскільки літак рухається рівномірно, то векторна сума сил дорівнює нулю. Отже, дорівнює нулю і сума проекцій всіх сил на напрям руху. З останньої умови легко знайти, що $F = mg \sin\alpha = mg \frac{h_1 - h_2}{l}$. Коли літак піднімається (за умовою, вздовж лінії, яка утворює з горизонтом той самий кут α), то, крім перерахованих вище сил, на нього діє сила тяги $F_т$, створювана двигуном і спрямована в бік руху. Сила опору F має те саме значення, оскільки швидкість літака не змінилась. Так само, як і при спуску, сума проекцій сил на напрям руху дорівнює нулю, причому проекція сили тяжіння $mg \sin\alpha$ і проекція сили опору F спрямовані проти руху, а проекція $F_т$ сили тяги — у бік руху. Отже, $F_т = mg \sin\alpha + F = 2mg \frac{h_1 - h_2}{l}$.

Як відомо, потужність $P = Fv$. Таким чином, при підійманні двигун літака розвиває потужність $P = 2mgv\dfrac{h_1 - h_2}{l} = 200$ (кВт).

2.155. Двигуни ракети виконують роботу над газами, які викидаються, збільшуючи їхню кінетичну енергію. Вважаючи, що за одиницю часу з двигунів викидається маса газу μ і всі частинки газу мають однакові швидкості v, потужність двигунів ракети складає $P = \dfrac{1}{2}\mu v^2$. Оскільки сила тяги двигунів (реактивна сила) дорівнює $F = -\mu v$, а умова зависання ракети має вигляд $mg - F = 0$, дістанемо $P = \dfrac{1}{2}mgv$. Звідси шукана швидкість: $v = \dfrac{2P}{mg}$.