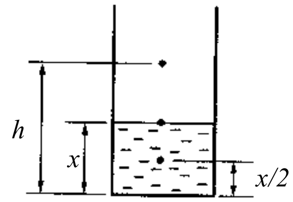
38. Центр тяжіння пустої тонкостінної мензурки масою 100 г і діаметром 60 мм знаходиться на відстані 100 мм від основи. До якої висоти потрібно заповнити мензурку водою, щоб зробити її найбільш стійкою? (2006 р. з. 10 к.)

Розв'язок



Очевидно, що перша порція налитої в мензурку води знаходиться нижче за центр мас порожньої мензурки й тому знижує загальний центр мас.

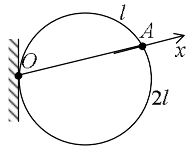
По мірі заповнення мензурки водою так буде продовжуватись до тих пір, поки центр мас системи не виявиться на поверхні води. Після цього будь-яке добавлення води приводить до підняття центру мас системи. Оскільки для максимальної стабільності загальний центр мас повинен лежати якнайнижче, то задача якісно розв'язана.

Розв'яжемо тепер задачу кількісно. Нехай M – маса мензурки, r – її радіус, h – відстань від дна мензурки до її центра мас, x – висота стовпа води, m – маса налитої води. $m=\pi r^2\rho x=qx$, де $q = \pi r^2\rho$. Запишемо рівняння рівноваги відносно центра мас: $M(h-x)=\dfrac{mx}{2}=\dfrac{qx^2}{2}$.

Одержали квадратне рівняння для визначення висоти стовпа води: $(q/2)x^2+Mx-Mh=0$. Звідси

$$x=\frac{M}{q}\left(\sqrt{1+\frac{2qh}{M}}-1\right)=\frac{M}{\pi r^2\rho}\left(\sqrt{1+\frac{2q\pi r^2\rho}{M}}-1\right)\approx 5{,}59\text{ см}.$$

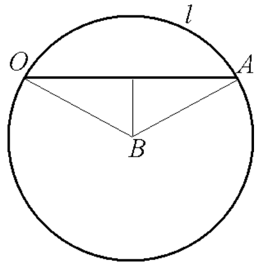
39. Точку O тоненького гумового кільця довжиною $3l$ =30 см закріпили, а точку A, яка поділяє кільце на дві частини (l і $2l$), переміщують уздовж осі OX. Визначте силу F, яку треба прикласти до точки A, щоб її перемістити на 1 см, на 10 см, на 15 см. Жорсткість 1 см матеріалу, з якого виготовлене кільце 100 Н/м. (2015 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

Якщо $OA \le l$, то кільце не розтягнуте: $F_{\text{пружн}} = 0$. Якщо $l \le OA \le 2l$, то розтягнута тільки коротка частина гумового кільця, яка має коефіцієнт жорсткості k_1. Оскільки жорсткість 1 см матеріалу, з якого виготовлене кільце 100 Н/м, то жорсткість частини кільця довжиною l=10 см становить k_1 =10 Н/м. $F_{\text{пружн}}=k_1\cdot x$. Якщо $OA \ge 2l$, то розтягуються обидві частини гумового кільця (паралельно), Знайдемо їх сумарний коефіцієнт жорсткості k. Жорсткість частини кільця довжиною l=20 см становить k_2 =5 Н/м. При паралельному з'єднанні загальна жорсткість $k=k_1+k_2$=15 Н/м. Щоб визначити сили при різних розтягах потрібно знайти довжину хорди ОА.

Кут АВО=120^0, оскільки коло ділиться на частини l і $2l$. Радіус АВ=$\dfrac{3l}{2\pi}$.

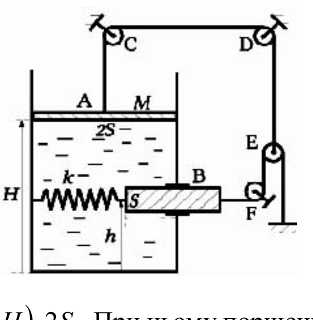


Тоді хорда $OA=2\cdot AB\cdot\sin 60^0$. Після підстановок $OA=2\cdot\dfrac{30}{2\cdot 3{,}14}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 8{,}3$ см. При зміщенні точки А на 1,7 см (тобто довжина $OA=l$=10 см) кільце ще не розтягується, отже при зміщенні на 1 см F_1=0.

При зміщенні точки А від 1,7 до 11,7 см (до довжини $2l$=20 см) $F_{\text{пружн}}=10x$, отже при зміщенні точки A на 10 см, довжина OA=18,3 см, довжина меншої частини кільця стане 18,3 см, тобто воно розтягнеться на 8,3 см. $F_2=10\cdot 0{,}083=0{,}83$ Н.

При зміщенні точки A на 15 см довжина OA=23,3 см. Поки більша частина кільця недеформована, тобто при переміщенні точки A від 1,7 см до 11,7 см (x=10 см) $F_{\text{пружн}}=10x$. При переміщенні точки A від 11,7 см до 15 см (x=3,3 см) розтягується більша частина кільця. В цьому випадку $F_{\text{пружн}}=15x$. Отже потрібно прикласти силу $F_3=10\cdot 0{,}1+15\cdot 0{,}033=1{,}495$ Н.

40. У системі, зображеній на малюнку, блоки C, D, F – нерухомі, а E – рухомий. Поршень B може вільно ковзати в отворі бічної стінки посудини на висоті h від дна, залишаючись горизонтальним. Площа перерізу поршня B становить S, а його висота мала. Жорсткість пружини, натягнутої горизонтально між торцем поршня B і протилежною бічною стінкою посудини, дорівнює k. Маса поршня A рівна M, площа його перерізу – $2S$. Відомо, що якщо утримувати поршень A так, що він розташований на висоті H_0, то пружина не розтягнута. Знайти, на який висоті H буде розташований поршень A, коли вся система перебуває в рівновазі за відсутності зовнішньої дії. (2010 р. ІІІ е. 11 к.)



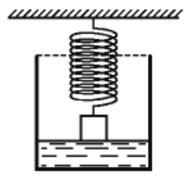
Розв'язок

Після того, як поршень A відпустити, об'єм посудини під ним зменшиться на $(H_0-H)\cdot 2S$. При цьому поршень B зміститься вправо на величину x. Оскільки об'єм води не змінився, то $x\cdot S=(H_0-H)\cdot 2S$ або

$x = 2 \cdot (H_0 - H)$ (1). Позначимо силу натягу мотузки, прив'язаної до поршня В через T. Розглядаючи систему блоків робимо висновок, що сила натягу мотузки, прив'язаної до поршня А становить $2T$. Нехай атмосферний тиск p_0, тиск під поршнем А становить p_a, тоді $p_0 \cdot 2S + Mg = 2T + p_a \cdot 2S$, або $p_a S - p_0 S = \frac{Mg}{2} - T$ (2). Тиск на рівні поршня В: $p_в = p_a + \rho_0 g(H - h)$ (3). Тоді $p_0 \cdot S + kx = T + p_в \cdot S$ (4). Враховуючи рівняння (3) $kx = T + p_a S - p_0 S + \rho_0 g S(H - h)$. Враховуючи рівняння (1) та (2) $k \cdot 2(H_0 - H) = T + \frac{Mg}{2} - T + \rho_0 gSH - \rho_0 gSh$.

$2kH_0 - 2kH = \frac{Mg}{2} + \rho_0 gSH - \rho_0 gSh$. $H = \frac{4kH_0 - Mg + 2\rho_0 gSh}{2\rho_0 gS + 4k}$.

41. Залізний кубик зі стороною a підвішений на пружині жорсткістю k. У початковий момент кубик торкається нижньою горизонтальною гранню поверхні води в посудині. У посудину починають повільно доливати воду так, що її рівень піднімається із швидкістю υ_1. З якою швидкістю υ_2 відносно посудини при цьому рухатиметься кубик? Густина води рівна ρ, прискорення вільного падіння g. (2011 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

У початковий момент кубик торкається нижньою гранню поверхні води:

$\vec{F}_{пр1} + m\vec{g} = 0$; $kx_1 = mg$ (1).

Після доливання води у момент, коли кубик повністю зануриться, матимемо:

$\vec{F}_{пр2} + m\vec{g} + \vec{F}_A = 0$ або $kx_2 + \rho g V = mg$ (2), де V – об'єм кубика; $V = a^3$.

Прирівняємо рівняння (1) і рівняння (2):

$kx_1 = kx_2 + \rho g a^3$, $k(x_1 - x_2) = \rho g a^3$. Тут $x_1 - x_2 = \Delta x$ – зміна довжини пружини, яка рівна висоті підняття кубика.

Тоді його швидкість $\upsilon_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (3). Швидкість піднімання рівня води

$\upsilon_1 = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, де Δh – різниця рівнів води до і після доливання. З іншого боку

$\Delta h = a + \Delta x$, тоді отримаємо: $\upsilon_1 = \frac{a + \Delta x}{\Delta t}$ (4).

Враховуючи, що $\Delta x = \frac{\rho g a^3}{k}$, отримаємо: $\upsilon_2 = \frac{\rho g a^3}{k \cdot \Delta t}$.

З рівняння (4): $\Delta t = \frac{a + \Delta x}{\upsilon_1} = \frac{a + \frac{\rho g a^3}{k}}{\upsilon_1} = \frac{ak + \rho g a^3}{\upsilon_1 \cdot k}$.

Підставляючи вираз для Δt у рівняння (3), отримаємо:

$$\upsilon_2 = \frac{\rho g a^3}{k} \cdot \frac{\upsilon_1 \cdot k}{ak + \rho g a^3} = \frac{\upsilon_1 \cdot \rho g a^3}{ak + \rho g a^3} = \frac{\upsilon_1 \cdot \rho g a^2}{k + \rho g a^2}.$$

42. Автомобіль рушає з місця з прискоренням a_1=2 м/с^2. При швидкості υ=50 км/год прискорення руху стало рівним a_2=1 м/с^2. З якою найбільшою швидкістю може рухатися автомобіль, якщо сила опору пропорційна швидкості руху? Силу тяги автомобіля вважати незмінною. (2004 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Запишемо ІІ закон Ньютона для різних випадків:

Під час рушання: $ma_1 = F_{тяги}$. Під час руху з швидкістю υ: $ma_2 = F_{тяги} - k\upsilon$.

Під час рівномірного руху з максимально можливою швидкістю: $0 = F_{тяги} - k\upsilon_{\max}$.

Звідси $ma_1 = k\upsilon_{\max}$, $ma_2 = k\upsilon_{\max} - k\upsilon$. Поділивши друге рівняння на перше, отримаємо: $\frac{a_2}{a_1} = 1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_{\max}}$, звідки

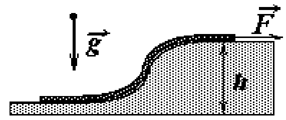
$$\upsilon_{\max} = \frac{\upsilon a_1}{a_1 - a_2} = 100\,\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

43. Невеликий предмет знаходиться в спокої на краю столу шириною 1 м. Його штовхають таким чином, що він досягає протилежної сторони столу через 2 с. Чи має предмет колеса? (2006 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Середня швидкість руху предмета рівна 0,5 м/с. Вважаючи сповільнення рівномірним, середню швидкість $\upsilon_{ср}$ обчислюємо за формулою: $\upsilon_{ср} = \dfrac{\upsilon_п + \upsilon_к}{2}$, де $\upsilon_п$ і $\upsilon_к$ – початкова й кінцева швидкості відповідно. Виходить, що початкова швидкість предмета не може бути більша, ніж 1 м/с, оскільки $\upsilon_к \geq 0$. Отже, швидкість тіла зменшується за час руху максимум на 1 м/с. Таким чином, абсолютне значення його прискорення $a = \dfrac{\Delta\upsilon}{t}$ не більше 0,5 м/с^2, що складає 1/20 прискорення вільного падіння g = 10 м/с^2 . Тому коефіцієнт тертя ковзання між предметом й поверхнею столу $\mu = \dfrac{a}{g}$ не може бути більшим, ніж 0,05. Це набагато менше коефіцієнтів тертя між звичайними матеріалами, так що, швидше всього, предмет не ковзає, а цілком або частково котиться.

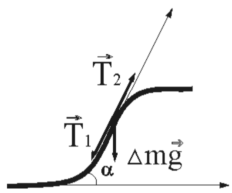
44. Однорідну гнучку нерозтяжну мотузку маси m і довжини L витягують на гладеньку гору висоти h, профіль якої показаний на малюнку, під дією постійної горизонтально напрямленої сили F. Визначте миттєве прискорення мотузки. (2008 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

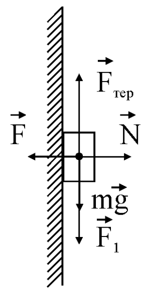
На невелику ділянку мотузки Δl_i діє сила тяжіння $\Delta m_i\vec{g}$ і сила натягу з двох боків від виділеної ділянки: $\vec{T}_{1i}$ і $\vec{T}_{2i}$. Запишемо II закон Ньютона для цієї ділянки в проекції на напрям самої ділянки $\Delta m_i a = T_{2i} - T_{1i} - \Delta m_i g \sin\alpha_i$. Маса ділянки $\Delta m_i = \dfrac{m}{L}\Delta l_i$.

$\dfrac{m}{L}\Delta l_i a = T_{2i} - T_{1i} - \dfrac{mg}{L}\Delta l_i \sin\alpha_i$.



Просумуємо рівняння, які відносяться до всіх ділянок мотузки. Сили натягу зустрічаються двічі, причому з різними знаками, тому їхня сума для всіх внутрішніх ділянок буде 0, а нескомпенсованою залишиться лише сила тяги F. Сума довжин Δl_i – це довжина мотузки L. Враховуючи, що $\Delta l_i \cdot \sin\alpha_i = \Delta h_i$ і сума цих величин рівна висоті гірки h, отримаємо: $ma = F - \dfrac{h}{L}mg$, $a = \dfrac{F}{m} - \dfrac{h}{L}g$.

45. Магніт масою 500 г прилип до вертикальної залізної стінки. Під дією вертикальної сили 0,2 Н магніт рівномірно рухається вниз. Під дією якої вертикальної сили магніт почне рівномірно рухатися вгору? (2011 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

Випадок 1. Магніт рухається вниз.

Сила F_1 напрямлена вниз. Згідно другого закону Ньютона маємо: $\vec{F} + \vec{F}_{тр1} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_1 = m\vec{a}_1$.

Розглянемо проекції на вісь Оx і Оy.

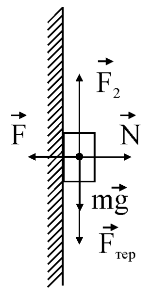
Оx: $N - F = 0$ (1). Оy: $F_{тр1} - F_1 - mg = 0$ (2).

З другого рівняння знаходимо силу тертя: $F_{тр1} = F_1 + mg$ (3).

Випадок 2. Магніт рухається вгору.

Запишемо другий закон Ньютона у векторній формі для випадку 2:

$\vec{F} + \vec{F}_{тр2} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_2 = m\vec{a}_2$.



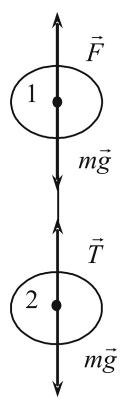
Оx: $N - F = 0$ (4). Оy: $F_2 - mg - F_{тр2} = 0$ (5).

Оскільки $F_{тр1} = F_{тр2}$, то підставивши рівняння (3) в рівняння (5),

отримаємо: $F_2 - mg - F_1 - mg = 0$.

Звідси: $F_2 = F_1 + 2mg$. $F_2 = 10{,}2$ Н .

46. Гелікоптер масою M піднімає тягар масою m, який підвішено на линві, з прискоренням a. Під час підйому линва розривається. Визначити прискорення гелікоптера відразу після обриву линви. (2001 р. II е. 9 к.)



Розв'язок

Запишемо II закон Ньютона для гелікоптера: $F_{тяги} - Mg - T = Ma$ і для вантажу: $T - mg = ma$. Відповідно після обриву линви $F_{тяги} - Mg = Ma_1$. Виключивши з перших двох рівнянь силу натягу линви T,

отримаємо: $F_{тяги} = Ma + Mg + ma + mg$. Тоді $a_1 = \dfrac{F_{тяги} - Mg}{M} = a + \dfrac{m(a+g)}{M}$.

47. Два тягарці з однаковими масами 0,5 кг зв'язані легенькою ниткою. Тягарці рухаються вгору під дією сили F. Нитка рветься, коли F=20 Н. За якої сили, спрямованої вертикально вгору порветься нитка, якщо нижній тягар прив'язати такою ж ниткою до підлоги? (2005 р. з. 10 к.)

Розв'язок

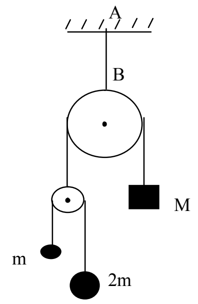
Запишемо II закон Ньютона для тягарців: $ma=F-mg-T$ і $ma=T-mg$. З цих рівнянь $F=2T$. Сила натягу, за якої рветься нитка, T=10 $Н$. Запишемо II закон Ньютона для першого тягарця після того, як нижній тягар прив'язали до підлоги: $0=F_1-mg-T$. Звідси $F_1=mg+T$=15 Н.

48. З повітряної кулі, яка перебуває у завислому стані, випав баласт, внаслідок чого її маса зменшилася на 20 %. Визначити відстань між кулею і баластом через 10 с. Опором повітря знехтувати. (2002 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

Куля в рівновазі: $mg = F_A$. Скинули баласт: $F_A - 0{,}8mg = 0{,}8ma$. Звідси $a = \dfrac{0{,}2mg}{0{,}8m} = 0{,}25g$. Враховуючи, що $s_1 = \dfrac{at^2}{2}$, $s_2 = \dfrac{gt^2}{2}$, одержимо: $s= s_1+s_2$= 625 м.

49. Яке співвідношення між масами m і M у системі, зображеній на малюнку, якщо сила натягу нитки АВ становить $2Mg$, а тягар M рухається рівномірно. Масою блоків і тертям при русі знехтувати. За яких умов сила натягу шнура АВ відрізняється від $2Mg$? (2002 р. III е. 9 к.)

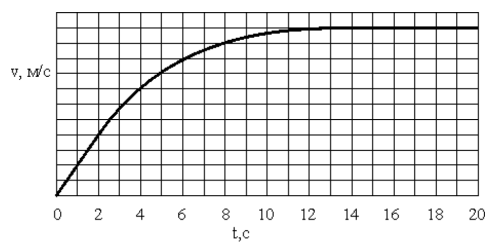


Розв'язок

Для руху тягарців на нижньому блоці запишемо II закон Ньютона: $T - mg = ma$, $2mg - T = 2ma$. Розв'язавши систему рівнянь, одержимо: $T = \dfrac{4}{3}mg$. На нитки, які знаходяться на верхньому блоці діють сили $F = Mg$ і $F = 2T$, отже $m = \dfrac{3}{8}M$. Сила натягу шнура АВ відрізняється від $2Mg$ за умови прискореного руху тягаря M, причому, якщо тягар рухається вгору, то сила натягу шнура АВ більша $2Mg$, а при русі вниз менша $2Mg$.

50. Досліджуючи залежність сили опору від швидкості руху тіл у повітрі, експериментатор відпускав м'яч (m=0,5 кг) з нерухомого гелікоптера і вимірював значення швидкості його руху через рівні інтервали часу. Результати одного з дослідів відображені на графіку, зображеному на малюнку. На жаль, вісь швидкостей на графіку залишилася непроградуйованою. Визначити силу опору повітря, що діє на м'яч, в момент t_1=5 с і t_2=16 с. (2005 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

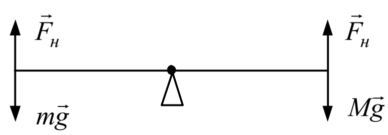


Як видно з графіка, на початку руху тіло рухалось рівноприскорено (прямолінійна ділянка графіка), отже, можна зробити висновок, що одна клітинка на осі швидкостей відповідає швидкості 5 м/с, (тому що $g\approx10$ м/с^2). В момент часу t_2=16 с м'яч рухався рівномірно: $mg=F_{оп.}$, отже $F_{оп.2}$=5 Н.

В момент часу t_1=5 с м'яч рухається з прискоренням, тому $ma=mg-F_{оп.}$;

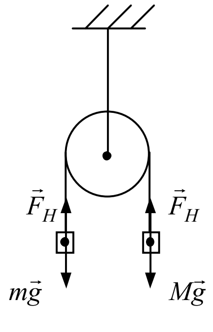
$F_{оп.}=m(g-a)$. Щоб знайти прискорення, побудуємо дотичну до графіка в момент t=5 с. $a = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \approx \dfrac{5\,\frac{м}{с}}{1\,c} = 5\,\dfrac{м}{с^2}$, $F_{оп.}$= 2,5 Н.

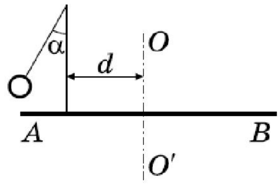
51. Невагомий стержень, на кінцях якого закріплені кульки масами m та M, спирається серединою на жорстку опору, навколо якої він може обертатися у вертикальній площині. В початковий момент стержень утримують в горизонтальному положенні. Визначити силу тиску на опору в той момент, коли тягарі відпускають. (2004 р. II е. 9 к.)



Розв'язок

На кульки діють сили тяжіння і сили реакції опори. Ситуація у цій задачі аналогічна руху зв'язаних тіл ниткою, перекинутою через блок. За цих умов сила тиску на вісь важеля дорівнює силі тиску на вісь блока. Тобто $F_Т=2F_Н$. З другого закону Ньютона для рухомих тіл $F_Н - mg=ma$ і $Mg-F_Н=Ma$. Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержимо: $F_H = \dfrac{2Mmg}{M+m}$. Тоді $F_T = 2F_H = \dfrac{4Mmg}{M+m}$.

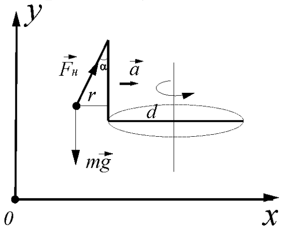




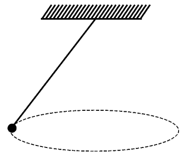
52. На стержні AB, що рівномірно обертається навколо вертикальної осі OO', закріплено висок на вертикальній стійці. Стійка знаходиться на відстані d=5 см від осі обертання. Визначте період обертання стержня, якщо нитка виска завдовжки l=10 см відхиляється від вертикалі на кут α=30°. (2014 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Кулька обертається по колу, радіус якого $R = d + r = d + l\sin\alpha$. Доцентрового прискорення кульці надає рівнодійна сил натягу нитки та сили тяжіння. За ІІ законом Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н$. У проекціях на О$x$: $ma = F_н \sin\alpha$, на Оy: $mg = F_н \cos\alpha$. Звідси $a = g \cdot \mathrm{tg}\alpha$ (1). При русі по колу $a = \dfrac{\upsilon^2}{R}$, $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$, то $a = \dfrac{4\pi^2}{T^2}(d + l\sin\alpha)$ (2). З рівнянь 1 і 2



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d + l\sin\alpha}{g \cdot \mathrm{tg}\alpha}} \approx 0{,}83 \text{ с.}$$

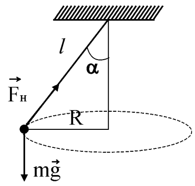


53. Кулька масою m, яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці, обертається в горизонтальній площині. Де, на Землі чи на Місяці, сила натягу нитки повинна бути більшою, щоб забезпечити обертання з постійною кутовою швидкістю ω. Порівняйте кути, на які відхилиться нитка під час обертання на Землі і Місяці з даною швидкістю. $g_З > g_М$. (2006 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

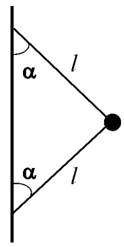
Запишемо ІІ закон Ньютона під час руху кульки: $m\vec{a} = \vec{F}_н + m\vec{g}$. $F_н \cdot \cos\alpha = mg$ (1). $m\omega^2 R = F_н \cdot \sin\alpha$, де $R = l \cdot \sin\alpha$.

Тоді $m\omega^2 l \cdot \sin\alpha = F_н \cdot \sin\alpha$; $F_н = m\omega^2 l$ (2). Поділимо рівняння 1 на рівняння 2.



$\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 l}$. Якщо α_1 – кут відхилення нитки на Землі, а α_2 – на Місяці, то $\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \dfrac{g_З}{g_М}$.

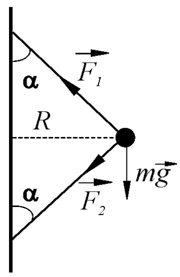
Оскільки $g_З > g_М$, то $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$, а $\alpha_1 < \alpha_2$. Отже, кут відхилення на Землі буде менший, ніж на Місяці.



54. Невелика кулька рухається по колу у горизонтальній площині, утримуючись на двох нитках, кожна з яких має довжину l=30 см. Нитки утворюють з віссю обертання кут α ($\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$). Сила натягу верхньої нитки у 4 рази більша, ніж сила натягу нижньої. Визначте частоту обертання кульки. (2017 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок

Під час обертання кульки виникає доцентрове прискорення $a = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R$, яке напрямлене горизонтально. Тут $R = l \cdot \sin\alpha$. Тоді $a = 4\pi^2 n^2 l \cdot \sin\alpha$ (1). Запишемо ІІ закон Ньютона в проекціях на горизонтальну і вертикальну осі:



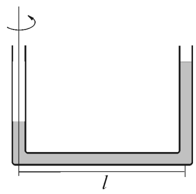
Гор: $F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = ma$ (2).

Вер: $F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha - mg = 0$ (3).

Враховуючи, що $F_1 = 4F_2$, з рівняння (3) отримаємо: $F_2 = \dfrac{mg}{3\cos\alpha}$ (4). Тоді $F_1 = \dfrac{4mg}{3\cos\alpha}$ (5).

Підставимо (1), (4) і (5) в (2): $\dfrac{5mg}{3\cos\alpha}\sin\alpha = m \cdot 4\pi^2 n^2 l \cdot \sin\alpha$. Звідси

$n = \sqrt{\dfrac{5g}{4\pi^2 l \cdot 3\cos\alpha}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{5g}{3l \cdot \cos\alpha}}$. Після підстановки $n \approx 1{,}33$ рад/с.



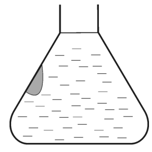
55. Відкрита U-подібна трубка з рідиною перебуває на платформі, яка обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, яка проходить через одну з трубок. Вертикальні коліна трубки знаходяться на відстані l, яка значно більша за діаметр трубки. Визначте різницю рівнів води в трубках. (2017 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Маса рідини у горизонтальній частині трубки $m = \rho Sl$, де S – площа перерізу трубки. Під час обертання трубки виникає доцентрове прискорення. Запишемо його для центра мас рідини: $a = \omega^2 r = \dfrac{\omega^2 l}{2}$.

Згідно другого закону Ньютона $F = ma$, де $F = p \cdot S$, p – надлишковий тиск, який створюється різницею рівнів рідини: $p = \rho gh$. Тоді $\rho gh \cdot S = \rho Sl \cdot \dfrac{\omega^2 l}{2}$. Звідси $h = \dfrac{\omega^2 l^2}{2g}$.

56. Дотикаючись до стінки скляної мензурки конічної форми з кутом α, наповненої водою, рівномірно спливає шматок корка об'ємом V. Визначити силу опору рідини, що діє на корок. Густина корка ρ, густина води ρ_0. (2007 р. ІІІ е. 9 к.)

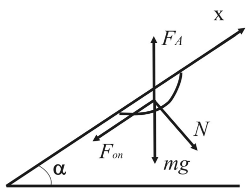


Розв'язок

ІІ закон Ньютона: $0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_A$.

Вісь Оx направимо вздовж стінки посудини $F_A \sin\alpha - F_{оп.} - mg\sin\alpha = 0$.

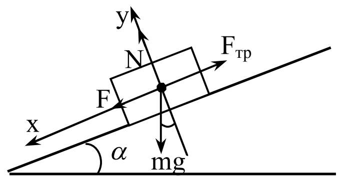
$F = (F_A - mg)\sin\alpha$. $\quad F = V \cdot g(\rho_в - \rho_к)\sin\alpha$.



57. На похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, знаходиться бак із водою масою M. З якою силою, паралельно похилій площині, треба рухати бак, щоб поверхня води в ньому була паралельною похилій площині? Коефіцієнт тертя між дном бака і похилою площиною дорівнює k. (2002 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Щоб поверхня рідини була паралельною похилій площині, посудина має рухатись з прискоренням $a = g\sin\alpha$. Застосуємо другий закон Ньютона у проекціях на осі.



Оx: $mg\sin\alpha = F + mg\sin\alpha - F_{тр}$ (1).

Оy: $N - mg\sin\alpha = 0$ (2).

$N = mg\cos\alpha, \quad F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Тоді з рівняння (1) $F = F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$.

58. Автомобіль рухається по схилу вниз з постійним прискоренням a. Яким повинен бути коефіцієнт тертя, щоб це було можливо? Кут нахилу гори α. Розглянути 2 випадки: 1) α=45^0, a=1 м/с^2; 2) α=30^0, a=7 м/с^2. (2003 р. з. 9 к.)

Розв'язок

За відсутності тертя автомобіль з похилої площини рухається з прискоренням $a_0=g\cdot\sin\alpha$. Прискорення руху автомобіля за наявності тертя визначається із другого закону Ньютона: $a = \dfrac{mg\sin\alpha \pm F_T}{m}$ (1), де $F_T=\mu N=\mu mg\cdot\cos\alpha$. В першому випадку $a_0\approx 7$ м/с^2, в другому $a_0=5$ м/с^2. Для першого випадку $a<a_0$, тому в рівнянні (1) використовуємо знак "–", для другого випадку $a>a_0$, тому використовуємо знак "+". Підставивши у рівняння (1) вираз для сили тертя і, розв'язавши його відносно μ, отримаємо: для першого випадку $\mu\approx 0{,}86$, для другого – $\mu\approx 0{,}23$.

59. Похила площина утворює з горизонтом кут 30^0. За якого значення коефіцієнта тертя тягнути вантаж по похилій площині важче, ніж піднімати вертикально? (2009 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Запишемо ІІ закон Ньютона для рівномірного руху тіла на похилій площині Оx: $F - mg\sin\alpha - \mu N = 0$;

Оy: $N = mg\cos\alpha$.

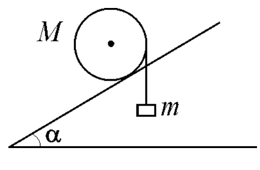
Звідси $F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

При рівномірному підніманні тіла вертикально вгору $F = mg$.

Дослідимо вираз $\sin\alpha + \mu\cos\alpha$.

$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 1$; $\mu = \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

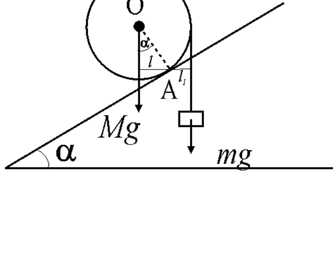
Отже, якщо $\mu > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то $\sin\alpha + \mu\cos\alpha > 1$ і вантаж важче піднімати по похилій площині.



60. Циліндр масою M помістили на рейки, нахилені під кутом α до горизонту. Вантаж якої найменшої маси m потрібно прикріпити до намотаної на циліндр нитки, щоб він покотився вгору? Проковзування відсутнє. (2010 р. ІІІ е. 9 к.)

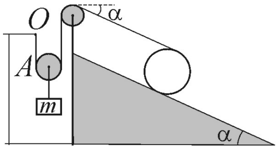
Розв'язок

На циліндр діє сила тяжіння Mg, прикладена до його центра тяжіння, і сила натягу нитки mg, прикладена до його краю. Циліндр покотиться вгору, якщо момент сили тяжіння відносно осі, що проходить через точку А перпендикулярно до площини малюнка, буде менший за момент сили натягу нитки. Плече сили



тяжіння $l = R\sin\alpha$, плече сили натягу $l_1 = R - R\sin\alpha$, отже $MgR\sin\alpha < mgR(1-\sin\alpha)$. Звідси $m > \dfrac{M\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

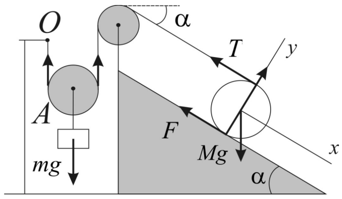
61. На похилій площині з кутом нахилу α лежить циліндр. До нього прикріплена невагома, нерозтяжна нитка, яка кілька разів обернута навколо циліндра, пропущена через два блоки і закріплена в точці *O*. До блоку *A* підвішено вантаж масою *m*. Система знаходиться в положенні рівноваги. Вважаючи блоки ідеальними і невагомими, визначте масу циліндра і силу тертя між циліндром і площиною. (2015 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

Виберемо напрям осі Ox уздовж похилої площини і запишемо другий закон Ньютона для циліндра в проекції на цю вісь: $-T - F + Mg\sin\alpha = 0$.

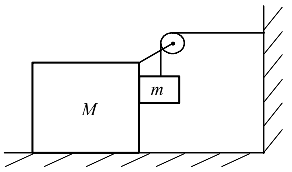
Звідси маса циліндра $M = \dfrac{F+T}{g\sin\alpha}$ (1).



Циліндр не обертається, отже повний момент діючих на нього сил рівний нулю. Розглянемо моменти сил відносно осі циліндра. Сила реакції опори і сила тяжіння мають нульове плече і не розкручують циліндр. Сили *F* і *T* мають відносно осі циліндра плече *R*, їх моменти компенсуються, тобто

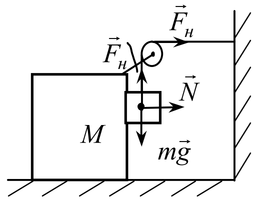
TR-FR=0. Отже *F=T*. Розглянемо тепер вантаж. Оскільки блок, до якого він підвішений, невагомий, сила натягу нитки, прикріпленої до вантажу дорівнює $2T$. З умови рівноваги вантажу $T = \dfrac{mg}{2}$.

Підставляючи в (1) співвідношення $T = F = \dfrac{mg}{2}$, отримуємо: $M = \dfrac{m}{\sin\alpha}$.



62. На кубі масою *M* закріплено легенький блок, через який перекинута невагома нерозтяжна нитка. Один кінець нитки прикріплений до стіни, другий до тягаря масою *m* (ділянка ниток вертикальна і горизонтальна, тягар дотикається до куба). Спочатку куб утримують. З яким прискоренням він почне рухатися, якщо його відпустити? Тертям у системі знехтувати. Рух тіл вважати поступальним. (2004 р. з. 9 к.)

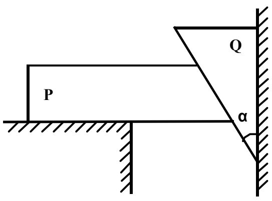
Розв'язок



Запишемо II закон Ньютона для куба і бруска в проекціях на осі. Для бруска: $N=ma_1$; $mg-F_H=ma_2$. Для куба: $F_H-N=Ma_1$. Враховуючи, що $|a_1|=|a_2|$,

одержимо: $a_1 = \dfrac{mg}{2m+M}$.

63. Прямокутний клин вагою *Q* спирається однією площиною на гладеньку вертикальну стінку і частиною другої площини – на гладеньку дошку вагою *P*, що може ковзати без тертя, горизонтальною площиною. Визначити прискорення клина і дошки, а також силу тиску клина на дошку. Кут α відомий. (2003 р. III е. 9 к.)

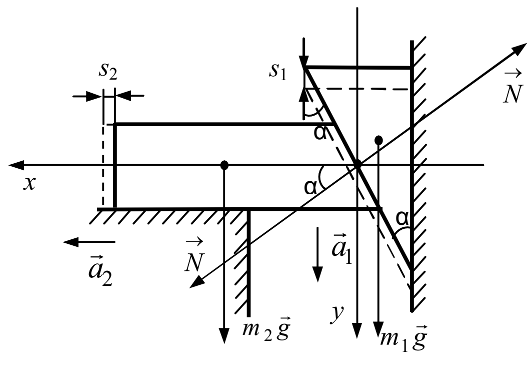


Розв'язок

Обидва тіла рухаються рівноприскорено. Нехай клин у вертикальному напрямку перемістився за час *t* на відстань s_1. За цей же час дошка переміститься на віддаль s_2 у горизонтальній площині.

Окрім того $s_1 = \dfrac{a_1t^2}{2}$; $s_2 = \dfrac{a_2t^2}{2}$.

З малюнка $\dfrac{s_2}{s_1} = \text{tg}\alpha \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = \text{tg}\alpha$. Запишемо другий закон Ньютона:



O*y*: $m_1g - N\sin\alpha = m_1a_1$. Звідси $a_1 = g - \dfrac{N}{m_1}\sin\alpha$.

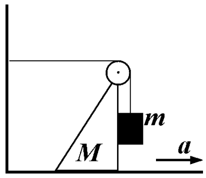
O*x*: $N\cos\alpha = m_2a_2$. Звідси $a_2 = \dfrac{N\cos\alpha}{m_2}$. Отже,

$$\frac{N\cos\alpha}{m_2} = \left(g - \frac{N}{m_1}\sin\alpha\right)\text{tg}\alpha.$$

$$N\left(\frac{g\cos\alpha}{P} + \frac{g\sin\alpha\cdot\text{tg}\alpha}{Q}\right) = g\cdot\text{tg}\alpha\ ; \qquad N = \frac{PQ\cdot\text{tg}\alpha}{(Q+Ptg^2\alpha)\cos\alpha}.$$

$$a_2 = \frac{N\cos\alpha}{m_2} = \frac{gh\cdot\text{tg}\alpha}{Q+P\cdot\text{tg}^2\alpha}\ ; \quad a_1 = \frac{gQ}{Q+P\cdot\text{tg}^2\alpha}.$$

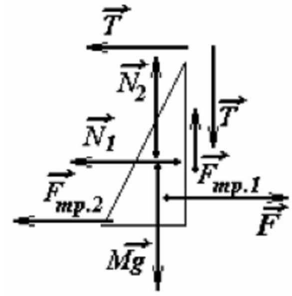
64. Нерухомий вантаж масою *m*, що прикріплений легкою нерозтяжною ниткою до стіни, спирається за допомогою нерухомого блока на призму масою *M*, розміщену на горизонтальній площині. Коефіцієнт тертя вантажу об призму та призми об площину – μ . Яку горизонтальну силу необхідно прикласти до призми, щоб вона рухалася вправо з прискоренням *a* ? (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

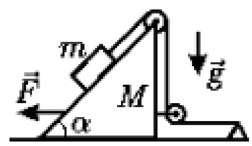


Розв'язок

Рух призми відбувається згідно рівняння

$M\vec{a} = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} + \vec{T} + \vec{F}_{mp_1} + \vec{F}_{mp_2} + \vec{N}_1$.





Після проектування сил та прискорення на осі О*x* та О*y* і враховуючи, що $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ отримаємо:

$Ma = F - N_1 - T - \mu N_2$ (1);

$0 = Mg + T - N_2 - \mu N_1$ (2).

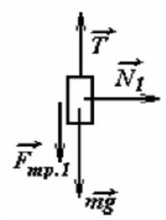
Рух вантажу відбувається згідно рівняння

$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{mp_1}$.

Після проектування сил та прискорення на осі О*x* та О*y* отримаємо:

$ma = N_1$ (3); $ma = T - mg - \mu N_1$ (4).

Тоді $T = ma + mg + \mu ma$ (5)



З рівняння (2), з врахуванням (3) і (5) $N_2 = Mg + ma + mg$ (6).

З рівняння (1) з врахуванням (3), (5) і (6)

$F = Ma + 2ma + mg + \mu ma + \mu Mg + \mu ma + \mu mg$ або

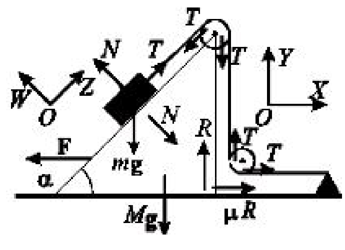
$F = g\left(\mu M + m(1+\mu)\right) + a\left(M + 2m(1+\mu)\right)$.

65. В системі, показаній на малюнку, тертя між бруском масою 1 кг і клином немає. Коефіцієнт тертя клина об горизонтальну поверхню 0,1. Маса клина 10 кг. Кут при основі клина 45^0. Блоки невагомі, тертя в осях відсутнє. Нитка невагома, нерозтяжна, а її ділянка, прикріплена до бруска, паралельна поверхні клина. Інший кінець нитки закріплений так, що нижня ділянка горизонтальна. До клина прикладають горизонтальну силу *F* так, як показано на малюнку. При цьому клин рухається поступально з сталою швидкістю в напрямку сили *F*. Знайти цю силу. (2013 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Зобразимо всі сили, які діють на клин і брусок на малюнку.

Клин рухається прямолінійно рівномірно. Запишемо ІІ з-н Ньютона в проекціях на осі О*x* та О*y*.



О*x*: $T - T\cdot\cos\alpha + \mu R + N\cdot\sin\alpha - F = 0$ (1).

О*y*: $R - Mg - N\cdot\cos\alpha - T\cdot\sin\alpha = 0$ (2).

З рівняння (1) $F = T - T\cdot\cos\alpha + \mu R + N\cdot\sin\alpha$ (3).

З рівняння (2) $R = Mg + N\cdot\cos\alpha + T\cdot\sin\alpha$ (4).

Брусок рухається по клину прямолінійно рівномірно. Запишемо ІІ закон Ньютона в проекціях на осі О*z* і О*w*.

Відносно осі О*z*: $T - mg\cdot\sin\alpha = 0$; $T = mg\cdot\sin\alpha$ (5).

Відносно осі О*w*: $N - mg\cdot\cos\alpha = 0$; $N = mg\cdot\cos\alpha$ (6).

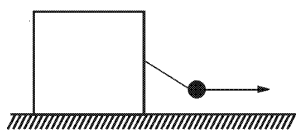
Підставимо в рівняння (4) рівняння (5) і (6). $R = Mg + mg\cdot\cos^2\alpha + mg\cdot\sin^2\alpha = Mg + mg = (M+m)g$ (7).

Підставимо в рівняння (3) рівняння (5), (6) та (7). Отримаємо:

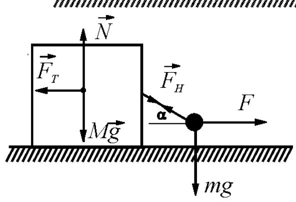
$F = mg\sin\alpha - mg\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \mu\cdot(M+m)g + mg\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$. $F = mg\sin\alpha + \mu\cdot(M+m)g$.

$F = 10\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}1\cdot(11)\cdot 10 \approx 18$ Н .

66. Кулька з двома нитками прив'язана однією з них до куба, маса якого 2 кг. За другу нитку кульку тягнуть у горизонтальному напрямі, внаслідок чого брусок рухається рівномірно, а нитка, прив'язана до куба, утворює з горизонталлю кут 45^0. Визначте масу кульки, якщо коефіцієнт тертя куба по горизонтальній поверхні 0,5. (2017 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок



Запишемо ІІ закон Ньютона для кульки в проекціях на горизонтальну і вертикальну осі:

$F = F_H\cdot\cos\alpha$ (1);$mg = F_H\cdot\sin\alpha$ (2).

Звідси $F = mg\cdot\text{ctg}\alpha$ (3).

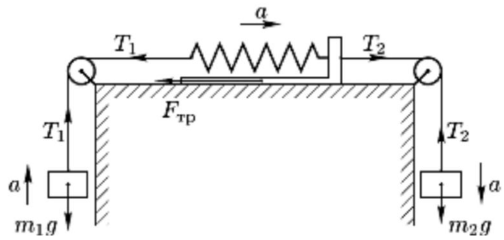
Запишемо ІІ закон Ньютона для куба в проекціях на горизонтальну і вертикальну осі:

$F_H \cdot \cos\alpha = F_T$ (4); $\quad N = Mg + F_H \cdot \sin\alpha$ (5).
Підставимо (2) в (5):
$N = Mg + mg = (M + m)g$ (6). $F_T = \mu N$ (7).
Підставимо (6), (7) і (1) в (4): $F = \mu(M + m)g$ (8).

Підставимо (3) у (8): $mg \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \mu(M + m)g$. Звідси $m = \dfrac{\mu M}{ctg\alpha - \mu}$. Після підстановки значень m=2 кг.

67. В установці, зображеній на малюнку, маса динамометра M, а маси вантажів m_1 і m_2. Коефіцієнт тертя між динамометром і поверхнею стола μ. Ділянки АВ і CD горизонтальні. Знайдіть якими можуть бути покази динамометра, в залежності від умов руху чи спокою динамометра, якщо ці покази постійні. Масами ниток, пружини і блоків знехтувати. (2014 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок



Оскільки в процесі руху ніякі сили не змінюються, то прискорення вантажів і динамометра однакові. Запишемо ІІ закон Ньютона в проекції на осі для вантажів і динамометра.
$m_1 a = T_1 - m_1 g$ (1); $\quad m_2 a = -T_2 + m_2 g$ (2);
$Ma = T_2 - F_{тер} - T_1$ (3). Знайдемо умову, коли динамометр не проковзує. $\left|F_{тер}\right| < F_{тер.\max} = \mu Mg$ (4). В цьому випадку a=0. З рівнянь 1-3 $F_{тер} = (m_2 - m_1)g$. Підставивши в (4) і розкривши модуль $-\mu M < m_2 - m_1 < \mu M$ (умова не проковзування). В цьому випадку покази динамометра $T_1 = m_1 g$.

Якщо динамометр проковзує, то $\left|F_{тер}\right| = \mu Mg$. Розглянемо два випадки:

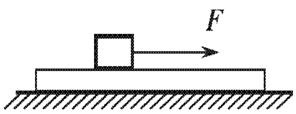
Нехай $m_2 - m_1 > \mu M$, тобто $m_2 > m_1 + \mu M$. Тоді сила тертя напрямлена вліво. З рівняння (1): $a = \dfrac{T_1}{m_1} - g$; з (2):

$T_2 = 2m_2 g - \dfrac{m_2}{m_1} T_1$.

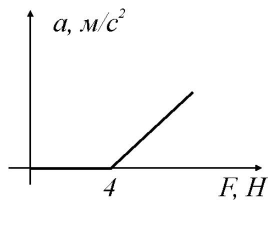
з (3): $\dfrac{M}{m_1} T_1 - Mg = 2m_2 g - \dfrac{m_2}{m_1} T_1 - \mu Mg - T_1$. Звідси покази динамометра $T_1 = \dfrac{m_1 g(2m_2 - \mu M + M)}{M + m_2 + m_1}$.

Якщо ж $m_2 - m_1 < -\mu M$, тобто $m_1 > m_2 + \mu M$, то сила тертя напрямлена вправо і провівши аналогічні перетворення, отримаємо: $T_1 = \dfrac{m_1 g(2m_2 + \mu M + M)}{M + m_2 + m_1}$.

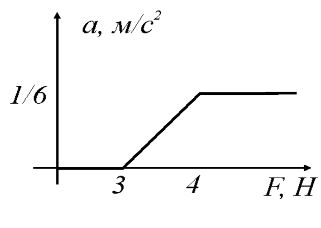
68. На дошці масою M=2 кг лежить невеликий брусок масою m=4 кг. Коефіцієнт тертя між дошкою і бруском μ_1=0,1, між дошкою і поверхнею стола μ_2=0,05. До бруска прикладають горизонтальну силу F. Побудуйте графіки залежності прискорення руху бруска від сили F та залежності прискорення руху дошки від сили F. (2010 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

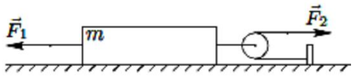


Залежно від значення сили тертя брусок може ковзати по дошці (рухомій, нерухомій) або знаходитись в спокої на дошці (рухомій, нерухомій). Максимальна сила тертя спокою між бруском і дошкою $F_1 = \mu_1 mg \approx 4$ Н. Якщо сила F>4 Н, то брусок ковзає по дошці. Нехай F=5 Н, тоді $a = \dfrac{F - \mu_1 mg}{m} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Нехай F=6 Н, тоді $a = \dfrac{F - \mu_1 mg}{m} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Будуємо графік залежності прискорення бруска від сили F (мал. 1). Якщо брусок ковзає по поверхні дошки, то згідно ІІІ закону Ньютона на дошку в напрямку сили F діє сила тертя ковзання F_1, якщо ні, то сила тертя спокою .

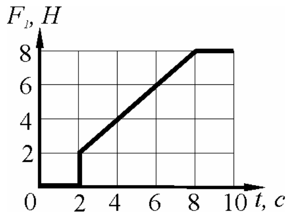


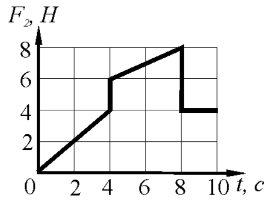
Максимальна сила тертя спокою між дошкою і столом $F_2 = \mu_2 \cdot (m + M)g = 3$ Н. Отже, якщо сила F<3 Н, брусок і дошка нерухомі, якщо $3\text{ Н} < F < 4\text{ Н}$, дошка ковзає по поверхні столу, а брусок нерухомий, $a = \dfrac{F}{m + M} \cdot g$. Якщо F>4 Н, брусок і дошка ковзають, причому прискорення дошки не змінюється, оскільки на неї діє стала сила тертя ковзання F_1. $a = \dfrac{F_1 - F_2}{M + m} = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Графік залежності прискорення дошки від сили F буде таким (мал.2)

69. До системи, зображеної на малюнку, прикладають у вказаному напрямку зовнішні сили F_1 і F_2, графіки залежності яких від часу дано на малюнках. Маса бруска m = 1 кг, коефіцієнт тертя між площиною і бруском



μ = 0,4. Нитки легенькі, нерозтяжні і довгі. Блок невагомий. Побудувати графік залежності прискорення бруска від часу. На яку відстань переміститься брусок за 10 секунд, якщо спочатку він нерухомий? (2016 р. ІІІ е. 10 к.)



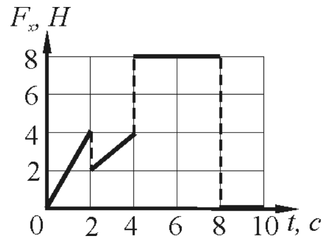


Розв'язок

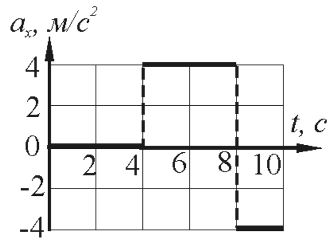
Зауважимо, що рухомий блок збільшує силу F_2 в два рази. Якщо направити вісь x вправо, то проекція сили, що діє на брусок з боку ниток:

$F_x = 2F_2 - F_1$.

Побудуємо графік залежності F_x від часу t.



Брусок зрушить з місця, коли сумарна зовнішня сила перевищить максимально можливу силу тертя спокою: $F_{тер} = \mu mg$ = 4 Н. З графіка видно, що рух почнеться в момент часу t_0 = 4 с. Брусок буде рухатися з постійним прискоренням $a_{x1} = \dfrac{F_x - F_{тер}}{m} = 4$ м/с^2, поки в момент часу t_1 = 8 с рівнодійна F_x з боку ниток стане рівною нулю. Швидкість бруска в цей момент становитиме: $\upsilon_{x1} = a_{x1}\cdot(t_1 - t_0)$ = 16 м/с. Брусок до цього моменту здійснить переміщення $s_1 = \dfrac{a_{x1}(t_1 - t_0)^2}{2}$ =32 м.



Після t_1 = 8 с брусок буде рухатися тільки під дією сили тертя з прискоренням a_{x2} = –4 м/с^2. При t_2 = 10 с швидкість дорівнює

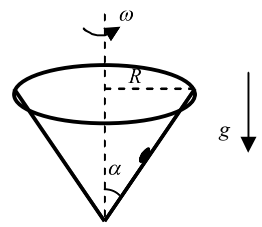
$\upsilon_{x2} = \upsilon_{x1} + a_{x2}\cdot(t_2 - t_1)$ = 8 м/с. Брусок здійснить переміщення

$s_2 = \dfrac{\upsilon_{x2}^2 - \upsilon_{x1}^2}{2a_{x2}}$ =24 м. Разом переміщення бруска s=56 м.

70. З листка паперу зроблено конус з радіусом основи R = 20 см. Кут між віссю конуса і твірною α=45^0. Конус розкручують до кутової швидкості ω = 10 с$^{-1}$. На бічній поверхні конуса посередині твірної сидить мурашка. Який коефіцієнт тертя між ніжками мурашки і поверхнею конуса повинен бути для того, щоб:

а) мурашка могла доповзти до вершини конуса, не зісковзнувши;

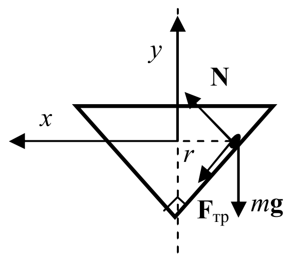
б) мурашка могла доповзти до основи конуса, не зісковзнувши. (2013 р. ІІІ е. 11 к.)



Розв'язок

Умова того, що мураха не ковзає: $F_T < \mu\cdot N$, де F_T – сила тертя, N – реакція поверхні конуса.

ІІ закон Ньютона для даного випадку: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_T + \vec{N}$ (1).



Сила тертя, в залежності від наміру руху мурахи, може бути напрямлена так, як на малюнку, чи в протилежному напрямі.

Спроектуємо рівність (1) на осі координат.

Оx: $m\omega^2 r = N\cos\alpha + F_T\sin\alpha$; $m\omega^2 r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(N + F_T\right)$ (2).

Оy: $0 = N\sin\alpha - F_T\cos\alpha - mg$; $mg = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(N - F_T\right)$ (3).

Додавши і віднявши рівняння (2) і (3), отримаємо:

$N = \dfrac{1}{\sqrt{2}}m\left(\omega^2 r + g\right)$. $F_T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}m\left(\omega^2 r - g\right)$.

У випадку наміру руху в протилежному напрямі, очевидно: $F_T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}m\left(g - \omega^2 r\right)$. Тому в загальному:

$\left|F_T\right| = \dfrac{m}{\sqrt{2}}\left|\omega^2 r - g\right|$.

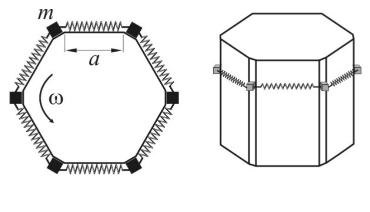
Відсутність ковзання мурахи, таким чином, зводиться до нерівності: $\left|\omega^2 r - g\right| < \mu\left(\omega^2 r + g\right)$ (4).

У початковий момент r=10 см і величина $\omega^2 r - g \approx 0$, а нерівність (4) виконується при малому значенні коефіцієнта тертя. Далі ця величина змінюється в залежності від напряму руху:

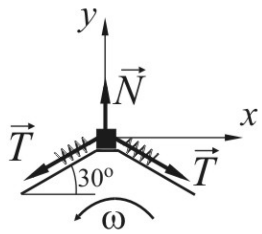
а) рух до вершини конуса. Величина $\omega^2 r - g$ стає від'ємною і зростає за модулем. Максимальне значення модуля рівне *g*, тому $\mu > 1$.

б) рух до основи конуса. Величина $\omega^2 r - g$ стає додатною і зростає за модулем. Максимум досягається при $r = R$. Тоді $\omega^2 R - g < \mu(\omega^2 R + g)$, звідки $\mu > \dfrac{\omega^2 R - g}{\omega^2 R + g} \approx \dfrac{1}{3}$.

71. Є вертикальний шестигранний стовп, ширина сторони якого *a*. На стовп одягають ланцюжок з однакових легких пружин і однакових маленьких кубиків масою *m*. Гострі кути шестигранника спиляні так, що кожен кубик торкається маленького плоского майданчика на стовпі. Всі кути стовпа рівні. Відомо, що в пружинах виникла сила пружності *T*. Коефіцієнт тертя кубиків об стовп μ. Стовп починають розкручувати. При яких значеннях кутової швидкості ω ланцюжок почне з'їжджати вниз? (2014 р. ІІІ е. 11 к.)



Розв'язок



На всі кубики діють однакові сили. Розглянемо довільний кубик. Сили, діючі на кубик, зображені на малюнку. Оскільки внутрішні кути шестигранника 120^0, то зображений на малюнку кут $\alpha = 30^0$. Розмірами кубика можна нехтувати і при цьому вважати, що вся його маса зосереджена на відстані *a* від осі стовпа. Запишемо другий закон Ньютона для кубика в проекції на вісь О*y*: $N - 2T\sin\alpha = -m\omega^2 a$, звідки $N = T - m\omega^2 a$ (1).

Тепер розглянемо умову рівноваги кубика, щоб ланцюжок не сповзав униз. Сила тяжіння *F*=*mg*, що діє на кубик, повинна зрівноважуватися силою тертя, яка, в свою чергу, не може бути більшою за величину сили тертя ковзання μN. Граничний випадок рівноваги реалізується, коли $F = \mu N$. Таким чином, ланцюжок сповзає, якщо $mg \geq \mu N$ (2).

Підставляючи в (2) вираз (1), отримуємо наступну умову для кутової швидкості ω: $mg \geq \mu(T - m\omega^2 a)$,

звідки $\omega \geq \sqrt{\dfrac{T}{ma} - \dfrac{g}{\mu a}}$. Якщо ж $\dfrac{T}{m} < \dfrac{g}{\mu}$, то ланцюжок буде з'їжджати навіть на нерухомому стовпі.

Закон всесвітнього тяжіння

72. Штучний супутник запущений в площині земного екватора так, що весь час знаходиться над однією точкою Землі. Знайти радіус колової орбіти супутника. Радіус Землі *R*=6400 км. (2008 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Радіус орбіти знайдено з ІІ закону Ньютона $\dfrac{m\upsilon^2}{r} = G\dfrac{Mm}{r^2}$. Лінійна швидкість $\upsilon = \dfrac{2\pi r}{T}$. Тоді $\dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\dfrac{M}{r}$, звідки $r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}}$. Враховуючи, що $g = G\dfrac{M}{R^2}$ запишемо $r = \sqrt[3]{\dfrac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$. Оскільки супутник весь час знаходиться над однією точкою Землі, то *T*=1 доба. Тоді $r \approx 42 \cdot 10^6$ м.

73. Штучний супутник Землі, який запущено з екватора, обертається по коловій орбіті в напрямку обертання Землі. Знайти радіус орбіти супутника, якщо супутник періодично проходить над точкою запуску рівно через дві доби. $R_З$=6400 км. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

1). Кутова швидкість супутника більша за кутову швидкість Землі.

$T_З$ = 1 доба. Кутова швидкість Землі $\omega_З = \dfrac{2\pi}{T_З}$. Супутник робить один оберт, а Земля два. Тоді $\omega_c - \omega_З = \dfrac{2\pi}{2T_З}$;

$$\left(\omega_c - \frac{2\pi}{T_З}\right) \cdot 2T_З = 2\pi \Rightarrow \omega_c = \frac{3\pi}{T_З}.$$

За другим законом Ньютона для супутника:

$$G\frac{m_c M_З}{R^2} = m_c \omega_c^2 R \Rightarrow GM_З = \omega_c^2 R^3 \Rightarrow GM_З = \left(\frac{3\pi}{T_З}\right)^2 R^3. \qquad R^3 = \frac{GM_З T_З^2}{9\pi^2} \quad (1).$$

Прискорення вільного падіння $g = \dfrac{GM_З}{R_З^2} \Rightarrow R_З^2 = \dfrac{GM_З}{g}$; $R_З^3 = \dfrac{GM_З R_З}{g}$ (2).

Поділимо рівняння (1) на рівняння (2): $\frac{R^3}{R_3^3}=\frac{gT_3^2}{9\pi^2 R_3}=\frac{10\cdot(24\cdot3600)^2}{9\cdot10\cdot6400000}\approx130$.

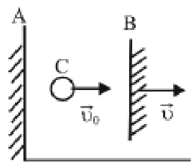
$\frac{R^3}{R_3^3}=130$; $\frac{R}{R_3}\approx5$. $R=5\cdot R_3=32000$ км .

2). Кутова швидкість супутника менша за кутову швидкість Землі.

$\omega_3-\omega_c=\frac{2\pi}{2T_3}$; $\omega_c=\frac{\pi}{T_3}$. За аналогією до першого випадку $GM_3=\left(\frac{\pi}{T_3}\right)^2 R^3$. $R^3=\frac{GM_3T_3^2}{\pi^2}$ (3). Поділимо рівняння (3) на рівняння (2): $\frac{R^3}{R_3^3}=\frac{gT_3^2}{\pi^2 R_3}\approx1170$;

$\frac{R^3}{R_3^3}=1170$; $\frac{R}{R_3}\approx10{,}5$. $R=10{,}5\cdot R_3=67200$ км .

Закони збереження імпульсу та енергії



74. Замкнута система складається з нерухомої стінки А, рухомої В та кульки С. В початковий момент кулька рухається зі швидкістю υ_0 , рухома стінка з швидкістю υ ($\upsilon<\upsilon_0$). Визначити максимальне число зіткнень кульки з рухо-мою стінкою, вважаючи удари абсолютно пружними, а маси стінок значно більшими за масу кульки. (2001 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки маса стінки значно більша маси кульки, то зміною швидкості стінки після удару кульки можна знехтувати (хоч імпульс стінки збільшується на незначну величину). Вважаючи швидкість стінки незмінною, перейдемо в систему відліку відносно рухомої стінки. Швидкість кульки відносно неї $\upsilon_0-\upsilon$ і спрямована до стінки. Це означає, що після одного удару швидкість кульки відносно нерухомої системи відліку (Землі) становить $\upsilon_1=\upsilon_0-2\upsilon$, а після n ударів $\upsilon_1=\upsilon_0-2n\upsilon$. Кулька не досягне рухомої стінки за умови $\upsilon_1\le\upsilon$. Тоді $\upsilon_0-2n\upsilon\le\upsilon$. Звідки $n\le\frac{\upsilon_0-\upsilon}{2n}$.

75. На гладенькому горизонтальному столі знаходяться два однакових кубики, маси яких M. У центр першого кубика попадає куля масою m, яка летить горизонтально зі швидкістю υ_0 вздовж прямої, що з'єднує центри кубиків. Пробивши перший кубик, куля продовжує рухатись зі швидкістю $0{,}5\upsilon_0$, попадає у другий і застряє у ньому. Через який час кубики зазнають зіткнення, якщо початкова відстань між ними l? Розмірами кубиків знехтувати. (2003 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Закон збереження імпульсу після пробивання кулею першого кубика

$m\upsilon_0=0{,}5m\upsilon_0+M\upsilon_1$, де υ_1 – швидкість першого кубика. Звідси $\upsilon_1=\frac{0{,}5m\upsilon_0}{M}$.

Закон збереження імпульсу після попадання кулі у другий кубик

$0{,}5m\upsilon_0=(M+m)\upsilon_2$, де υ_2 – швидкість другого кубика. Звідси $\upsilon_2=\frac{0{,}5m\upsilon_0}{M+m}$.

Оскільки $t_1=\frac{l}{0{,}5\upsilon_0}$ – час польоту кулі від першого до другого кубика, то перший кубик за цей час зміститься на $x_1=\upsilon_1t_1=\frac{lm}{M}$. Від цього моменту часу до зіткнення пройде час $t_2=\frac{l-x_1}{\upsilon_1-\upsilon_2}=\frac{2l(M^2-m^2)}{m^2\upsilon_0}$. Весь час $t=t_1+t_2=\frac{2l}{\upsilon_0}\cdot\frac{M^2}{m^2}$.

76. Хлопець, здійснюючи постріл з рогатки вертикально вгору, влучив каменем у карниз будинку, який знаходиться на висоті 20 м, після чого камінь падає на землю. Вважаючи удар об карниз абсолютно непружним (камінь після удару повністю втрачає швидкість), визначити силу удару, якщо відомо, що початкова швидкість каменя 25 м/с, його маса 100 г і камінь падає на землю через 3,01 с. (2006 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Визначимо час t_1 польоту каменя вгору. $H=\upsilon_0t_1-\frac{gt_1^2}{2}$, звідки $t_1=\frac{\upsilon_0-\sqrt{\upsilon_0^2-2gH}}{g}=1$ с . Швидкість каменя у момент удару об карниз

$\upsilon=\upsilon_0-gt_1=15$ м/с. Визначимо час t_2 падіння. $H=\dfrac{gt_2^2}{2}$, звідки $t_2=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}=2$ с. Тоді $\Delta t=t_0-t_1-t_2=0{,}01$ с – час удару об карниз. Під час удару імпульс сили дорівнює зміні імпульсу: $F_c\cdot\Delta t=\Delta p=m\upsilon$. Отже, середня сила удару $F_c=\dfrac{m\upsilon}{\Delta t}=15$ Н.

77. Пожежник може втримати в руках вантаж до F_{max}=900 Н. Оцінити максимальну висоту, яку може досягти струмінь води, що виривається з брандспойта, якого утримує пожежник. Пожежна установка забезпечує об'ємний розхід води μ=30 л/с. Опір повітря не враховувати. (2007 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Максимальну висоту струменя можна визначити за формулою $h=\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$.

Струмінь створює реакцію F. Згідно II закону Ньютона $F\Delta t=\Delta m\upsilon_0$. $\Delta m=\rho\mu\Delta t$. Тоді $\upsilon_0=\dfrac{F}{\rho\mu}$. Отже

$h_{\max}=\dfrac{F_{\max}^2}{2g\rho^2\mu^2}=45$ м.

78. На пластинку, яка підвішена до пружини жорсткістю 40 Н/м, падають вертикально краплини води зі швидкістю 5 м/с. Краплини, вдарившись об горизонтально розміщену пластинку, не відскакуючи, швидко стікають з неї на землю. Знайти, на яку величину Δx розтягнеться пружина, якщо відомо, що вона не здійснює коливань. Маса краплини m = 0,1 г, число краплин в одиниці об'єму $n = 3\cdot10^3$ м$^{-3}$, площа пластини S = 40 см^2. (2003 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Вдаряючись об пластинку, краплини передають їй імпульс $F\cdot t=m\upsilon\cdot N$, де N – кількість краплин, які попадають на пластинку за час t. $N=V\cdot n=S\cdot\upsilon\cdot t\cdot n$. Отже, $F{\cdot}t=m{\cdot}\upsilon{\cdot}S{\cdot}\upsilon{\cdot}t{\cdot}n$, звідки $F=m{\cdot}\upsilon^2{\cdot}S{\cdot}n$.

Тоді $\Delta x=\dfrac{F}{k}=\dfrac{m\upsilon^2S\cdot n}{k}=7{,}5\cdot10^{-4}$м.

79. Плита маси m утримується на місці в горизонтальному положенні N струменями рідини густини ρ, що б'ють вертикально вгору. Площа кожного отвору шланга S. Швидкість рідини на виході з отворів υ_0. На якій висоті від шланга утримується плита, якщо, досягнувши плити, рідина розлітається в горизонтальній площині? (2008 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Плита буде утримуватись, якщо сила тяжіння буде зрівноважена силою з боку струменів води. N струменів викидають масу води $m=NS\upsilon_0\rho\Delta t$, яка має кінетичну енергію $E=\dfrac{m\upsilon_0^2}{2}=\dfrac{NS\upsilon_0^3\rho\Delta t}{2}$. Згідно закону збереження енергії $\dfrac{m\upsilon_0^2}{2}=mgh+\dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Тоді швидкість біля плити $\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2-2gh}$. За час Δt вода передає плиті імпульс $\Delta p=m\upsilon=NS\upsilon_0\rho\Delta t\sqrt{\upsilon_0^2-2gh}$. Сила, що діє на плиту $F=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=NS\upsilon_0\rho\sqrt{\upsilon_0^2-2gh}$. Оскільки

$F=mg$, то $\upsilon_0^2-2gh=\left(\dfrac{mg}{NS\upsilon_0\rho}\right)^2$. $h=\dfrac{\upsilon_0^2-\left(\dfrac{mg}{NS\upsilon_0\rho}\right)^2}{2g}=\dfrac{NS\upsilon_0^4\rho-m^2g}{2NS\upsilon_0\rho}$.

80. Оцінити дальність стрибка спортсмена в довжину, якщо відомо, що час розбігу і відштовхування дорівнює t, максимальна висота підняття спортсмена h, коефіцієнт тертя між підошвами і землею μ.(2002 р. III е. 11 к.)

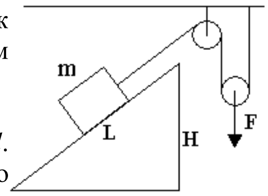
Розв'язок

Виходячи з того, що імпульс сили дорівнює зміні імпульсу тіла, одержимо:

в горизонтальному напрямку $m\upsilon_{гор.}=F_{розб.}t_1+F_{стр.}t_2=\mu mgt_1+\mu Nt_2$, де t_1 – час розбігу, t_2 – час відштовхування. У вертикальному напрямку $m\upsilon_{верт.}=(N-mg)t_2$. З цього рівняння $Nt_2=m\upsilon_{верт.}+mgt_2$. Тоді $m\upsilon_{гор.}=m\mu(\upsilon_{верт.}+gt)$, де $t=t_1+t_2$. Враховуючи, що $\upsilon_{вер.}=\sqrt{2gh}$, $t_0=2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, де t_0 – час польоту, одержимо:

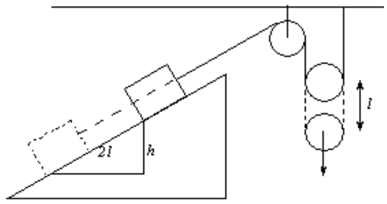
$s=\upsilon_{гор.}t_0=2\mu\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\left(\sqrt{2gh}+gt\right)$.

81. Яку мінімальну силу F потрібно прикласти до блока для руху тіла масою m уздовж похилої площини? Висота похилої площини H, довжина L. Блоки невагомі. Тертям нехтувати. (2009 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

Нехай рухомий блок перемістили на відстань l вниз, виконавши таким чином роботу Fl. Тіло на похилій площині при цьому зрушилася на $2l$ і піднялося на висоту h, яку легко визначити із подібності трикутників: $h = 2l\dfrac{H}{L}$. Оскільки тертя в системі відсутнє, то виконана робота дорівнює зміні енергії тіла: $mg\left(2l\dfrac{H}{L}\right) = Fl$.



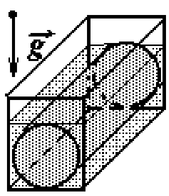
Звідси $F = 2mg\dfrac{H}{L}$.

82. Тіло масою m рівномірно обертається по колу з частотою ν_1. Внаслідок виконання роботи A частота зросла до ν_2. Визначити радіус кола. (2005 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Враховуючи, що $A = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$, а $\upsilon_1 = 2\pi R\nu_1$, $\upsilon_2 = 2\pi R\nu_2$, одержимо: $A = 2m\pi^2 R^2(\nu_2^2 - \nu_1^2)$. Звідси $R = \sqrt{\dfrac{A}{2m\pi^2(\nu_2^2 - \nu_1^2)}}$.

83. Суцільний однорідний циліндр радіуса R і довжини L лежить на дні посудини у формі паралелепіпеда довжиною трохи більшою L, шириною трохи більшою $2R$. Посудина заповнена рідиною, так що вона повністю покриває циліндр. Густина матеріалу циліндра ρ, густина рідини ρ_0. Яку мінімальну роботу необхідно виконати, щоб вийняти циліндр з рідини? (2008 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

Мінімальну роботу можна визначити як зміну потенціальної енергії системи. Об'єм води в посудині $V = 4R^2L - \pi R^2 L$. Після того як циліндр дістануть з води, вода заповнить посудину шаром висотою $h = \dfrac{V}{2RL} = \left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)R$. Отже, на таку ж висоту підніметься циліндр. При цьому зміна його потенціальної енергії $\Delta E_1 = mgh = \pi R^2 L \cdot \rho \cdot g \cdot \left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)R$. Потенціальна енергія води зменшиться на величину $\Delta E_2 = \left(4R^2L - \pi R^2 L\right) \cdot \rho_0 \cdot g\left(R - \dfrac{h}{2}\right)$.

$\Delta E_2 = (4 - \pi)R^3 L\rho_0 g \cdot \dfrac{\pi}{4}$. Тут враховано, що центр мас води знаходився на висоті R, а потім виявився на висоті $\dfrac{h}{2}$. Отже робота $A = \Delta E_1 - \Delta E_2 = \left(\dfrac{4-\pi}{2}\right) \cdot \pi R^3 L \cdot \rho g - (4 - \pi)R^3 L\rho_0 g \cdot \dfrac{\pi}{4}$. $A = \dfrac{4-\pi}{4} \cdot \pi R^3 Lg(2\rho - \rho_0)$.

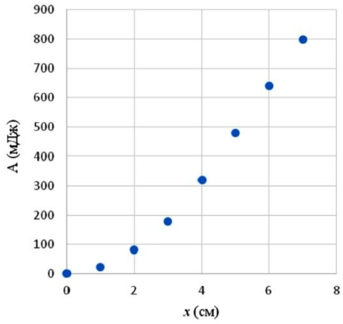
84. На горизонтальному сталевому листі знаходиться в стані спокою металевий брусок масою m = 1 кг з прикріпленою до нього пружиною, яка спочатку недеформована. До вільного кінця пружини прикладають горизонтально спрямовану силу, яка поступово збільшується. Через деякий час брусок починає повільно переміщуватися. Залежність роботи прикладеної сили від переміщення точки прикладання наведена в таблиці. Визначте жорсткість пружини, переміщення бруска за час експерименту і коефіцієнт тертя бруска по поверхні столу. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

x, см	0	1	2	3	4	5	6	7
A, мДж	0	22	82	178	320	480	640	800

Розв'язок

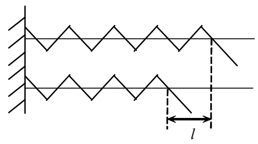
x, см	0	1	2	3	4	5	6	7
A, мДж	0	22	82	178	320	480	640	800
x, см	0	1	2	3	4	5	6	7
A, мДж	0	22	82	178	320	480	640	800

За даними таблиці побудуємо графік $A(x)$. З нього видно, що залежність $A(x)$ складається з двох ділянок. Початкова – парабола, потім лінійна. Перехід відбувається точно в точці x_0 = 4 см. У цей момент сила пружності стає рівною силі тертя і брусок починає рух. Так як максимальне зміщення вільного кінця пружини 7 см, то брусок за час експерименту перемістився на 3 см. По кутовому коефіцієнту лінійної ділянки графіка знайдемо коефіцієнт тертя (при русі бруска видовження пружини не збільшується і вся додана робота зовнішньої сили йде на подолання сили тертя). $\Delta A = \mu mg\Delta x$, звідки $\mu = \dfrac{\Delta A}{mg\Delta x}$ =1,6. Жорсткість пружини знаходимо з умови початку ковзання $\mu mg = kx_0$. $k = \dfrac{\mu mg}{x_0} = 400$ Н/м .



85. Два паралельні стержні, на яких знаходяться дві пружини різної довжини з жорсткостями відповідно k_1 і k_2 вмуровані в стінку. Одним кінцем пружини закріплені до стіни. Різниця довжин пружин l. Яку мінімальну роботу необхідно виконати, щоб розмістити кінці пружин на однаковій відстані від стіни? (2004 р. з. 11 к.)

Розв'язок



Робота йде на зміну енергії пружин (одну розтягують, другу стискають): $A = \dfrac{k_1x_1^2}{2} + \dfrac{k_2x_2^2}{2} = \dfrac{k_1x_1^2}{2} + \dfrac{k_2(l - x_1)^2}{2} = \dfrac{(k_1 + k_2)x_1^2}{2} - k_2lx_1 + \dfrac{k_2}{2}l^2$.

Мінімум цієї функції знайдемо за аналогією пошуку вершини параболи

$y = ax^2 - bx + c$. $y_{\min} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. $A_{\min} = \dfrac{4\dfrac{k_1 + k_2}{2}\cdot\dfrac{k_2l^2}{2} - k_2^2l^2}{4\dfrac{k_1 + k_2}{2}} = \dfrac{k_1k_2l^2}{2(k_1 + k_2)}$.

86. Людина масою 75 кг стрибає з вікна на пожежне полотно з висоти h_1 = 15 м і прогинає його на x_1=1,2 м. Вважаючи, що полотно веде себе як звичайна пружина, розрахуйте на скільки прогнеться полотно, коли людина стрибне з висоти h_2 = 30 м. (2003 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Потенціальна енергія піднятої людини перетворюється в потенціальну енергію деформованого полотна (пружини): $mg(h_1 + x_1) = \dfrac{kx_1^2}{2}$ (для першого випадку) і $mg(h_2 + x_2) = \dfrac{kx_2^2}{2}$ (для другого випадку). Звідси $\dfrac{h_1 + x_1}{h_2 + x_2} = \dfrac{x_1^2}{x_2^2}$. Підставляючи дані, одержимо: $16{,}2x_2^2 - 1{,}44x_2 - 30\cdot 1{,}44 = 0$. Звідси x≈1,67 м.

87. При пострілі з рогатки вертикально вгору її гумову нитку розтягують вниз з силою F. Порівняти висоту піднімання того ж тіла при заміні гумової нитки іншою з товщиною у два рази меншою при тій же силі розтягу. Зміну перерізу нитки під час розтягу вважати незначною, опором повітря знехтувати, розтяг нитки вважати значно меншим від висоти підйому тіла ($x<<h$). (2001 р. ІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Згідно закону збереження енергії $mgh = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{Fx}{2}$. Оскільки маса тіла і сила розтягу нитки незмінні, то висота підняття залежатиме від видовження нитки x. З закону Гука $F = \dfrac{x}{l_0}ES = \dfrac{x}{l_0}E\pi r^2$. Звідси $x = \dfrac{Fl_0}{E\pi r^2}$. З даного співвідношення видно, що зменшення товщини нитки в два рази приведе до збільшення видовження в чотири рази. Отже висота піднімання тіла зросте в 4 рази.

88. З гори висотою 2,5 м і довжиною основи 5 м з'їжджають санки і, пройшовши по горизонталі 40 м, зупиняються. Визначити коефіцієнт тертя, вважаючи його незмінним на всьому шляху руху санок. (2004 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Згідно закону збереження енергії $mgh = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + A_{1тер}$, де $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ – кінетична енергія санок біля підніжжя гори. На горизонтальній ділянці $\dfrac{m\upsilon^2}{2} = A_{2тер}$. Тоді $mgh = A_{2тер} + A_{1тер}$; $mgh = \mu mg\cdot s + \mu\cdot mg\cos\alpha\cdot l$; $h = \mu(s + l\cos\alpha)$. $\cos\alpha = \dfrac{a}{l}$. Отже, $\mu = \dfrac{h}{s + a} = 0{,}055$.

89. Свинцева куля масою 200 г, що рухалася зі швидкістю 2 м/с, ударила таку саму нерухому кулю, після чого обидві кулі почали рухатися з однаковою швидкістю. На скільки зросла їхня внутрішня енергія при ударі? (2002 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

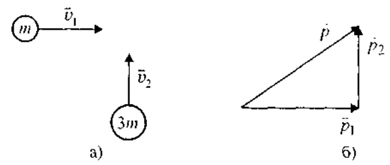
Згідно з законом збереження імпульсу $m\upsilon_1 = 2m\upsilon$, звідки $\upsilon = \frac{\upsilon_1}{2} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$, де υ – швидкість куль після взаємодії. Згідно з законом збереження енергії

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{2m\upsilon^2}{2} + Q. \text{ Тоді } Q = \frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 - 2\upsilon^2\right) = 0{,}2 \text{ Дж}.$$

90. Два тіла масами m і $3m$ рухаються у взаємно перпендикулярних напрямках. Після удару тіло масою m зупинилось. Яку частину його кінетичної енергії становить виділена під час удару кількість теплоти? (2006 р. з. 10 к.)

Розв'язок

За відсутності зовнішніх сил сумарний імпульс системи зберігається $m\vec{\upsilon}_1 + 3m\vec{\upsilon}_2 = \vec{p}$. $p = \sqrt{(m\upsilon_1)^2 + (3m\upsilon_2)^2} = m\sqrt{\upsilon_1^2 + 9\upsilon_2^2}$. Швидкість після взаємодії $\upsilon = \frac{p}{3m} = \frac{\sqrt{\upsilon_1^2 + 9\upsilon_2^2}}{3}$ (рухається лише друге тіло).



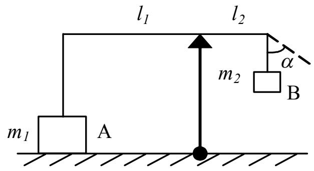
Кінетична енергія системи до зіткнення: $W_{k_1} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{3m\upsilon_2^2}{2}$.

Кінетична енергія після зіткнення (кінетична енергія більшого тіла, оскільки тіло масою m зупинилось): $W_{k_2} = \frac{3m\left(\upsilon_1^2 + 9\upsilon_2^2\right)}{18} = \frac{m\upsilon_1^2}{6} + \frac{3m\upsilon_2^2}{2}$.

Зменшення кінетичної енергії пов'язано з виділенням тепла під час удару.

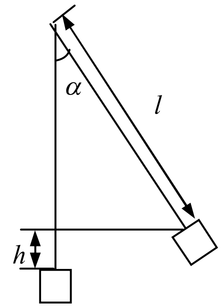
$Q = W_{k_1} - W_{k_2} = \frac{1}{3}m\upsilon_1^2$. Тоді $\frac{Q}{\frac{m\upsilon_1^2}{2}} = \frac{2}{3}$.

91. Два тіла А і В з масами m_1=1,5 кг і m_2=0,45 кг підвішені на нитках до легкого важеля, плечі якого мають довжини l_1=0,6 м і l_2=1 м (тіло А знаходиться на підлозі). На який мінімальний кут необхідно відхилити тіло В, щоб після його відпускання тіло А відірвалося від підлоги? (2004 р. з. 9 к.)



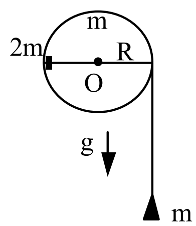
Розв'язок

Застосуємо правило моментів до важеля, щоб визначити, якою повинна бути сила F_2, достатня для відриву лівого вантажа від підлоги. $F_1l_1=F_2l_2$, де F_1 і F_2 – натяги ниток. $F_1=m_1g$. Тоді $F_2 = \frac{m_1gl_1}{l_2} = 9$ Н. Сила F_2 буде найбільшою, коли правий вантаж проходить положення рівноваги. Запишемо другий закон Ньютона для цього випадку: $m_2a=F_2-m_2g$; $m_2\frac{\upsilon^2}{l} = F_2 - m_2g$, де l – довжина нитки $\upsilon^2 = \frac{(F_2 - m_2g)l}{m_2}$. Згідно закону збереження енергії $mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}$, де $h = l - l\cos\alpha$. Тоді



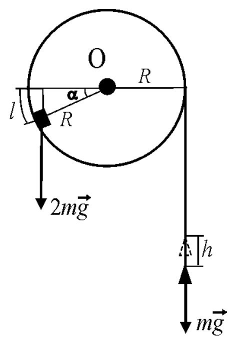
$g(l - l\cos\alpha) = \frac{(F_2 - m_2g)l}{2m_2}$. $\cos\alpha = \frac{g - \frac{F_2 - m_2g}{2m_2}}{g} = \frac{1}{2}$. Отже, тіло відірветься за умови, що $\alpha > 60^0$.

92. На тонкостінний обід велосипедного колеса, вісь О якого горизонтальна і закріплена, прикріплено вантаж масою $2m$ малих розмірів і намотано тонку нерозтяжну нитку. Один кінець нитки прикріплено до обода, а до другого її кінця прив'язано тягарець масою m. Маса обода становить m, а його радіус рівний R. Обід утримують в положенні, показаному на малюнку. Нехтуючи тертям, масою шпиць, втулки і нитки, знайти максимальну швидкість вантажу за час поступального руху тягарця. (2003 р. II е. 11 к.)



Розв'язок

Максимальна швидкість руху вантажу буде тоді, коли моменти сил, що діють на обід, зрівняються: $2mgR\cos\alpha = mgR \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ (α - кут повороту)



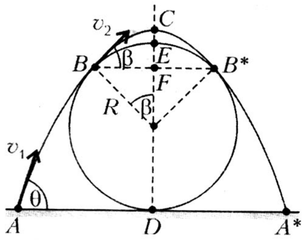
За цей час вантаж підніметься на висоту $h=l$, де l – довжина нитки, що намоталася на обід: $l = R\alpha = \frac{\pi R}{3}$. Зміна енергії: $\Delta W_{кін} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{2m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}$, $\Delta W_{1пот.} = mgh = mgR\alpha$, $\Delta W_{2пот.} = 2mgR\sin\alpha$.

$W_{кін.} + \Delta W_{1пот.} = \Delta W_{2пот.} \Rightarrow 2m\upsilon^2 = (2\sin\alpha - \alpha)mgR$. Звідси

$\upsilon = \sqrt{0{,}5\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)gR} = 0{,}59\sqrt{gR}$.

93. Стовбур дерева діаметром D=20 см лежить на горизонтальній поверхні. Лінивий коник-стрибунець хоче перестрибнути через дерево. Знайдіть мінімальну швидкість стрибка комахи, щоб їй вдалося це зробити. (2005 р. II е. 10 к.)

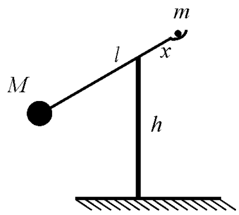
Розв'язок



Траєкторія коника-стрибунця – парабола, яка торкається стовбура в симетрично розміщених точках B і B* на двох сторонах стовбура. Згідно малюнка $\upsilon_2 \sin\beta = gt_2$, де t_2 – час руху на траєкторії BC. Горизонтальне переміщення BF= $R\sin\beta = \upsilon_2\cos\beta \cdot t_2$. З цих двох рівнянь $\upsilon_2^2 = \frac{gR}{\cos\beta}$. Закон збереження енергії при польоті між точками A і B запишеться у вигляді: $\frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mg(R + R\cos\beta)$. Звідси $\upsilon_1^2 = 2gR\left(1 + \cos\beta + \frac{1}{2\cos\beta}\right)$.

Дослідивши на мінімум вираз в дужках отримаємо, що $\beta = 45^0$. Тоді $\upsilon_{мін} = \sqrt{2gR(1+\sqrt{2})} \approx 2{,}2$ м/с.

94. Саморобна катапульта являє собою вертикальну опору, на якій закріплено коромисло з снарядом і противагою. Висота опори h, довжина коромисла l, маса снаряда m, противаги M. Снаряд розташований на відстані $x=l/4$ від осі обертання коромисла. Коромисло утримують горизонтально, закладають снаряд і відпускають. Коли коромисло займає вертикальне положення, воно гальмується об опору і снаряд починає вільний рух. На якій відстані від опори приземлиться снаряд? Масою коромисла, тертям в осі і опором повітря знехтувати. (2010 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

Нехай швидкість снаряду в момент, коли він починає рух в горизонтальному напрямі υ. Тоді кутова швидкість коромисла $\omega = \frac{4\upsilon}{l}$, а швидкість противаги $u = \omega \cdot \frac{3}{4}l = \frac{4\upsilon}{l} \cdot \frac{3}{4}l = 3\upsilon$. Запишемо закон збереження енергії для двох станів: коромисло розміщене горизонтально і вертикально. За початковий рівень приймемо положення противаги в момент гальмування. $mg \cdot \frac{3}{4}l + Mg \cdot \frac{3}{4}l = \frac{Mu^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} + mgl$. Підставивши значення швидкості u, знайдемо швидкість υ снаряда.

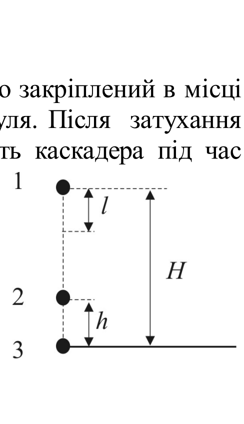
$Mg \cdot \frac{3}{4}l - mg\frac{1}{4}l = \frac{9M\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}$; $Mg \cdot \frac{3}{2}l - mg\frac{1}{2}l = (9M + m)\upsilon^2$. Звідси

$\upsilon = \sqrt{\frac{gl(3M - m)}{2(9M + m)}}$. Час руху снаряду $t = \sqrt{\frac{2\left(h + \frac{l}{4}\right)}{g}}$.

Відстань $s = \sqrt{\frac{gl(3M - m)}{2(9M + m)} \cdot \frac{2\left(h + \frac{l}{4}\right)}{g}} = \sqrt{\frac{l(3M - m)\left(h + \frac{l}{4}\right)}{9M + m}}$.

Потрібно ще добавити, що якщо $m \cdot \frac{1}{4}l > M \cdot \frac{3}{4}l$ тобто $m > 3M$, то катапульта взагалі працювати не буде, тому що противага не переважить снаряд.

95. Каскадер падає з висоти 50 м. До нього прив'язаний гумовий шнур, другий кінець якого закріплений в місці старту. Довжина і жорсткість шнура підібрані так, що біля землі швидкість гаситься до нуля. Після затухання коливань каскадер повис на висоті 10 м над землею. Якою була максимальна швидкість каскадера під час падіння? Опір повітря не враховувати. (2007 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

Максимальна швидкість у каскадера була на висоті h над землею, тобто в положенні рівноваги, де сила тяжіння mg зрівноважена силою пружності $k \cdot (H - h - l)$, оскільки вище за цю точку сила тяжіння більша – рух каскадера прискорений, нижче – сила пружності більша – рух каскадера сповільнений. Тут l – довжина нерозтягнутого шнура. Умова рівноваги в точці 2: $mg = k(H - l - h)$ (1). Закон збереження енергії для положень 1 і 3: $mgH = \frac{k(H-l)^2}{2}$ (2). З цих двох рівнянь визначимо *l:*

$(kH - kl - kh)H = \frac{k(H^2 - 2lH + l^2)}{2}$. $2kH^2 - 2klH - 2khH = kH^2 - 2klH + kl^2$.

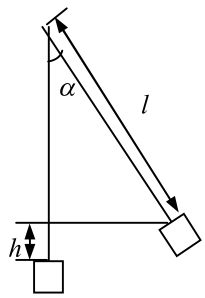
$kH^2 - 2khH = kl^2$. $\quad l = \sqrt{H^2 - 2Hh}$. Закон збереження для точок 1 і 2: $mgH = mgh + \frac{k(H-l-h)^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Враховуючи рівняння (1), запишемо: $mgH = mgh + \frac{mg(H-l-h)}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}$. $\frac{\upsilon^2}{2} = gH - gh - \frac{g(H-l-h)}{2}$.

$\upsilon^2 = g(H - h + l)$. $\upsilon = \sqrt{g\left(H - h + \sqrt{H^2 - 2Hh}\right)} \approx 28\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

96. У мішку з піском масою 1 кг, що висить на легкому підвісі завдовжки 10 м, застряє куля масою 10 г, яка летіла горизонтально зі швидкістю 1010 м/с. Визначте кут, на який відхилиться підвіс від вертикалі. (2010 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок



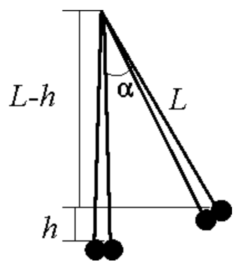
Нехай $m_1 = 10$ г, $\upsilon_1 = 1010\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $m_2 = 1$ кг, $l = 10$ м.

Згідно закону збереження імпульсу $m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon$. Звідси швидкість мішка з кулею $\upsilon = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Згідно закону збереження енергії $(m_1 + m_2)gh = (m_1 + m_2)\frac{\upsilon^2}{2}$. $h = 5$ м

З прямокутного трикутника $\cos\alpha = \frac{l-h}{l} = \frac{10-5}{5} = 0{,}5$. $\alpha = 60^0$.

97. Дві однакові пластилінові кульки підвішено на нерозтяжних невагомих нитках однакової довжини L, які закріплено в одній точці. Одну з кульок відхилили на кут 90^0 від вертикалі і відпустили. На яку висоту піднімуться кульки після непружної взаємодії? На який кут від вертикалі при цьому відхиляться нитки? Розміром кульок знехтуйте. (2015 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок



Після відхилення кулька має потенціальну енергію mgL. В другу кульку вона вдаряється з швидкістю υ, яку знайдемо із закону збереження енергії. $\frac{m\upsilon^2}{2} = mgL$.

$\upsilon = \sqrt{2gL}$. Після непружної взаємодії кульки будуть рухатися разом з швидкістю υ_1, яку знайдемо із закону збереження імпульсу. $m\upsilon = (m + m)\upsilon_1$. $\upsilon_1 = \frac{\upsilon}{2}$. Висоту підняття знаходимо знову із закону збереження енергії. $\frac{2m\upsilon_1^2}{2} = 2mgh$. Звідси $h = \frac{\upsilon_1^2}{2g} = \frac{\upsilon^2}{8g} = \frac{L}{4}$. З прямокутного трикутника $\sin\alpha = \frac{L-h}{L} = \frac{3}{4}$. $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$.

98. Підвішений на нитці тягар відхилили на деякий кут і відпустили. За якого максимального значення кута відхилення нитка не розірветься при подальшому русі, якщо міцність нитки на розрив становить $2mg$? (2002 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Знайдемо швидкість тягаря в нижньому положенні, за якої нитка не розірветься. Для цього запишемо ІІ закон Ньютона.

$T - mg = ma$; $2mg - mg = ma$; $g = a = \frac{\upsilon^2}{l}$. Звідси $\upsilon = \sqrt{gl}$, де l – довжина підвісу. Максимальний кут відхилення знайдемо із закону збереження енергії: $mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}$. Враховуючи, що $h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha)$, одержимо $gl(1 - \cos\alpha) = \frac{gl}{2}$ або $1 - \cos\alpha = \frac{1}{2}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 60^0$.

99. Пробірка з краплею ефіру підвішена на нитці завдовжки 0,8 м. З якою швидкістю повинен вилітати корок після підігрівання ефіру, щоб пробірка зробила повний оберт у вертикальній площині? Маса пробірки 50 г, маса корка 15 г. Масою підвісу знехтувати. (2002 р. з. 10 к.)

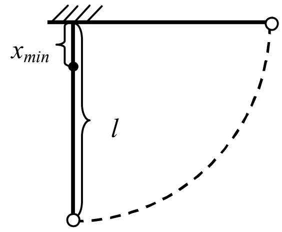
Розв'язок

Для того, щоб пробірка на нитці зробила повний оберт, необхідно, щоб у верхній точці тіло рухалося з швидкістю, значення якої можна визначити з другого закону Ньютона: $T+mg=ma$. Для граничного випадку T=0, $a=g=\dfrac{\upsilon^2}{l}$. Звідси $\upsilon=\sqrt{gl}$. З закону збереження енергії $\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}=\dfrac{m\upsilon^2}{2}+mg\cdot 2l$. $\dfrac{\upsilon_1^2}{2}=\dfrac{gl}{2}+2gl$.

Швидкість у нижній точці $\upsilon_1=\sqrt{5gl}$. З закону збереження імпульсу $M\upsilon_1=m\upsilon_2$, швидкість корка $\upsilon_2=\dfrac{M}{m}\sqrt{5gl}$. Підставляючи дані, одержимо: υ_2 =21 м/с.

100. Нитка довжиною l із прикріпленою до неї кулькою маси m підвішена близько біля стіни. Кульку з ниткою відхилили по дузі кола радіуса l, яка лежить в площині паралельній площині стіни. Кут відхилення від вертикалі становить 90⁰. Потім кульку відпустили. На якій найменшій відстані під точкою підвісу вздовж вертикалі потрібно забити в стінку цвях, щоб нитка, зачепившись за нього, перервалася, якщо вона витримує силу натягу T? (2003 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

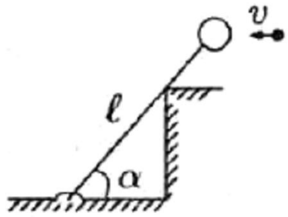


За законом збереження енергії в положенні рівноваги: $\dfrac{m\upsilon^2}{2}=mgl$. Сила натягу може бути визначена з II закону Ньютона.

$T-mg=\dfrac{m\upsilon^2}{R}$, де $R=l-x_{\min}$. Тоді $T=\dfrac{2glm}{l-x_{\min}}+mg$. Звідси $x_{\min}=l-\dfrac{2glm}{T-mg}$;

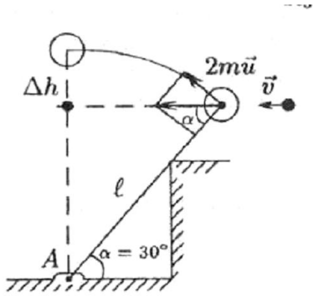
$x_{\min}=l\dfrac{T-3mg}{T-mg}$. Задача має розв'язок, якщо $T\geq 3mg$.

101. Легкий нерозтяжний стрижень довжиною l шарнірно прикріплений одним кінцем до масивної опори і спирається на її виступ, утворюючи кут α=30^0 з горизонтом. На іншому кінці стрижня прикріплено кульку. Куля, що має таку ж масу як і кулька, летить горизонтально, попадає в кульку і застрягає в ній. Визначити при якій швидкості кулі стрижень впаде на опору. (2017 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

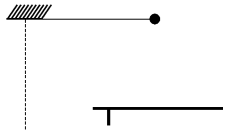
Для того, щоб стрижень з кулькою вправ на опору, потрібно, щоб він, обертаючись, пройшов вертикальне положення, тобто щоб запас його кінетичної енергії був більший за потенціальну енергію у вертикальному положенні: $\dfrac{2mu^2}{2}\geq 2mg\cdot\Delta h$ або $u\geq\sqrt{2g\Delta h}$, де u – швидкість кульки з кулею після того, як куля застряне в кульці, m – маса кульки і маса кулі, $\Delta h=l-l\sin\alpha$ – максимальна висота підйому кульки над її початковим положенням.



Імпульс стрижня з кулькою і кулею відразу після попадання кулі становитиме $2mu=m\upsilon\cdot\sin\alpha$. Звідси $\upsilon=\dfrac{2u}{\sin\alpha}\geq\dfrac{2\sqrt{2gl(1-\sin\alpha)}}{\sin\alpha}$.

Врахувавши, що кут 30^0, sinα=0,5, отримаємо: $\upsilon\geq 4\sqrt{gl}$.

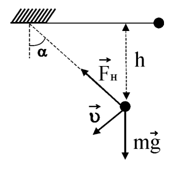
102. Кульку масою m, яка підвішена до невагомої нерозтяжної нитки довжиною l, відводять на кут 90⁰ і розміщують над столом. На якій висоті від горизонтальної поверхні стола повинна знаходитись кулька, щоб після відпускання передати столу максимальний імпульс? Яке значення цього імпульсу? (2006 р. III е. 10 к.)



Мал. 2

Розв'язок

Оскільки імпульс, що передається поверхні стола буде максимальним тоді, коли вертикальна складова швидкості буде найбільшою, визначимо це значення. Через проекцію на вісь OY, вертикальна складова максимальна у момент, коли сила тяжіння і проекція сили натягу на вертикальну вісь будуть однаковими, тобто $mg=F_н\cos\alpha$ (1). Запишемо II закон Ньютона для цього моменту: $ma=F_н-mg\cos\alpha$, де a – доцентрове прискорення. $a=\dfrac{\upsilon^2}{l}$. Згідно закону збереження енергії: $mgh=\dfrac{m\upsilon^2}{2}$, де h - шукана висота.



Враховуючи, що $h = l\cos\alpha$, одержимо: $\upsilon^2 = 2gl\cos\alpha$. Тоді $ma = \frac{m\upsilon^2}{l} = \frac{m\cdot 2gl\cos\alpha}{l} = F_н - mg\cos\alpha$. Звідси $F_н = 3mg\cos\alpha$. Підставимо в рівняння (1): $mg - 3mg\cos^2\alpha = 0$ або $\cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тоді $h = l\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Значення вертикальної складової швидкості у цій точці $\upsilon_в = \upsilon\sin\alpha = \sqrt{2gl\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$. Зміна імпульсу кульки внаслідок удару $\Delta p = -2m\upsilon_в = -2m\sqrt{2gl\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$. Імпульс, переданий столу згідно III закону Ньютона $p = +2m\sqrt{2gl\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)} = 4m\sqrt{\frac{gl}{3\sqrt{3}}}$.

103. Кульку, яка висить на нитці довжиною *L*, вдаряють молотком, надаючи їй горизонтальної швидкості. На яку найбільшу висоту підніметься кулька в залежності від наданої їй початкової швидкості υ_0? (2012 р. III е. 11 к.)

Розв'язок

Можливі 3 випадки:

1). Під час руху по колу кулька відхилилася на кут, менший або рівний 90°. Тоді, згідно закону збереження енергії $mgh = \frac{m\upsilon_0^2}{2}$, звідки $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$.

При цьому максимальна висота підняття кульки буде при відхиленні на 90^0 і становитиме *L*. Тоді

$L = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2gL}$.

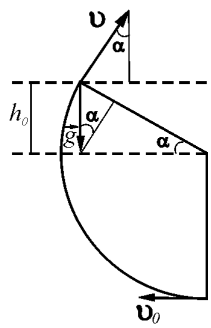
Тобто, при швидкості $\upsilon_0 = \sqrt{2gL}$ кулька може піднятися на висоту $h \le L$.

2). При більших швидкостях, кулька може описати півколо або зробити декілька повних обертів. II з-н Ньютона у верхній точці: $ma = mg - T$. Гранична умова, коли у верхній точці кулька перестає рухатися по колу і починає повільно падати з деякою початковою горизонтальною швидкістю: *T*=0. Тоді $\frac{m\upsilon^2}{L} = mg$. Звідси: $\upsilon = \sqrt{gL}$.

Згідно закону збереження енергії $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgh + \frac{m\upsilon^2}{2}$. Оскільки $h = 2L$, $\upsilon = \sqrt{gL}$, то

$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{5}{2}mgL \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{5gL}$. Тобто, при швидкості $\upsilon_0 \ge \sqrt{5gL}$ максимальна висота підняття кульки буде 2*L*.

3) Кулька рухається по колу, здійснивши більше як четвертину оберту, а потім починає рухатися під дією сили тяжіння з деякою початковою швидкістю. Маємо випадок, аналогічний руху тіла, кинутого під кутом до горизонту. Швидкість кульки в початковий момент цього руху знайдемо, використовуючи II з-н Ньютона: $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. *T*=0. $|\vec{a}| = \frac{\upsilon^2}{L}$, де $a = g\sin\alpha$. Звідси $\upsilon^2 = gL\sin\alpha$ (1).



Закон збереження енергії для точки початку руху під дією сили тяжіння:

$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mg(L + h_0)$, де $h_0 = L\sin\alpha$ – висота підняття відносно положення при відхиленні на 90^0.

Отже $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgL + mgL\sin\alpha$. Підставивши (1), отримаємо:

$\upsilon_0^2 = 3\upsilon^2 + 2gL \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\upsilon_0^2 - 2gL}{3}$. Тоді $\sin\alpha = \frac{\upsilon_0^2 - 2gL}{3gL}$.

При русі під дією сили тяжіння з початковою швидкістю, горизонтальна складова швидкості $\upsilon_x = \upsilon\sin\alpha$ залишається незмінною. Вертикальна складова зменшується під дією сили тяжіння і у найвищій точці дорівнює нулю. Закон збереження енергії для найвищої точки підняття: $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_x^2}{2} + mgh$.

$h = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon_x^2}{2g} = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{\upsilon_0^2}{2g} - \frac{(\upsilon_0^2 - 2gL)^3}{54g^3\cdot L^2}$.

Отже, при $\sqrt{2gL} \le \upsilon_0 \le \sqrt{5gL}$, $h = \frac{\upsilon_0^2}{2g} - \frac{(\upsilon_0^2 - 2gL)^3}{54g^3\cdot L^2}$.