II Всеукраїнська учнівська олімпіада з астрономії **м. Ужгород, 26-30 березня 2012 р.**		**Теоретичний тур** **10 клас**

1. Зоря-гостя. У 386 році китайські літописці відмітили появу у сузір'ї Стрільця «зорі-гості». За сучасними оцінками її видима зоряна величина була $+1^m,5$, а відстань зо зорі оцінюється у 16 000 світлових років. Визначити, що спостерігали древні китайці: спалах нової чи наднової зорі?

Розв'язання

Відстань до зорі є 16000св.р./3.2616 = 4900 пк, що дозволяє визначили її абсолютну зоряну величину:

$$M = m + 5 - 5\lg r = +1.5 + 5 - 5\lg 4900 = 1.5 + 5 - 18.5 = -12^m$$

При спалаху Нової зірки її абсолютна зоряна величина не буває менша -10^m; $-12^m < -10^m$, тобто спостерігався спалах наднової. Її позначення SN 386.

2. Вага космонавта. Космічний корабель стартує з полюсу Землі вертикально вгору з постійним прискоренням a = 0,5 g. На якій висоті та через який час вага космонавта в кораблі буде така сама, як і на поверхні Землі?

Розв'язання

Записавши другий закон Ньютона для космонавта маси *m,* який знаходиться в кораблі, отримаємо:

$$N - G\frac{mM}{\left(R+h\right)^2} = ma,$$

де N – реакція опори, h – висота над поверхнею Землі, M та R - маса та радіус Землі.

За третім законом Ньютона реакція опори N чисельно дорівнює вазі космонавта P.

На висоті h прискорення вільного падіння дорівнює

$$g_h = \frac{GM}{\left(R+h\right)^2}.$$

З умови задачі отримуємо $g_h = \frac{g}{2}$. Тобто

$$\frac{GM}{\left(R+h\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}.$$

Звідси остаточно маємо**:**

$$h = R\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Так як за умовою задачі корабель рухається рівноприскорено, то

$$h = \frac{at^2}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Підставивши числові значення даної задачі, маємо:
h = 6371,3 * 0,41 = 2639 км (Якщо взяти екваторіальний радіус Землі, то 6378* 0,41 = 2642 км)
t = 1038 с = 17 хв. 18 с.

3. МКС. Уважно розгляньте фрагмент фотографії, виконаної французьким астрофотографом - любителем Т’єрі Лего (на фото: міжнародна космічна станція і космічний човник *Atlantis* на фоні Сонця за 50 хв. до їх стикування. Фото отримане 16 травня 2010 р. об $13^h 28^m 55^s$ за Всесвітнім часом у передмісті Мадриду (Іспанія)).
За знімком визначте на якій відстані від Землі у момент фотографування перебуває Міжнародна космічна станція, якщо довжина сонячних панелей на МКС становить 73 м. Панелі розвернуті у бік Сонця. (Кутовй радіус Сонця 16′).

Розв’язання

Для визначення відстані від Землі до Міжнародної космічної станції проведемо наступні міркування:

1). За допомогою олівця і лінійки проводимо лінії, які відповідають хорді (a - півхорда), висоті сегмента (h), відділеного хордою і лінійним розмірам сонячних батарей (b) МКС (рис. 2).

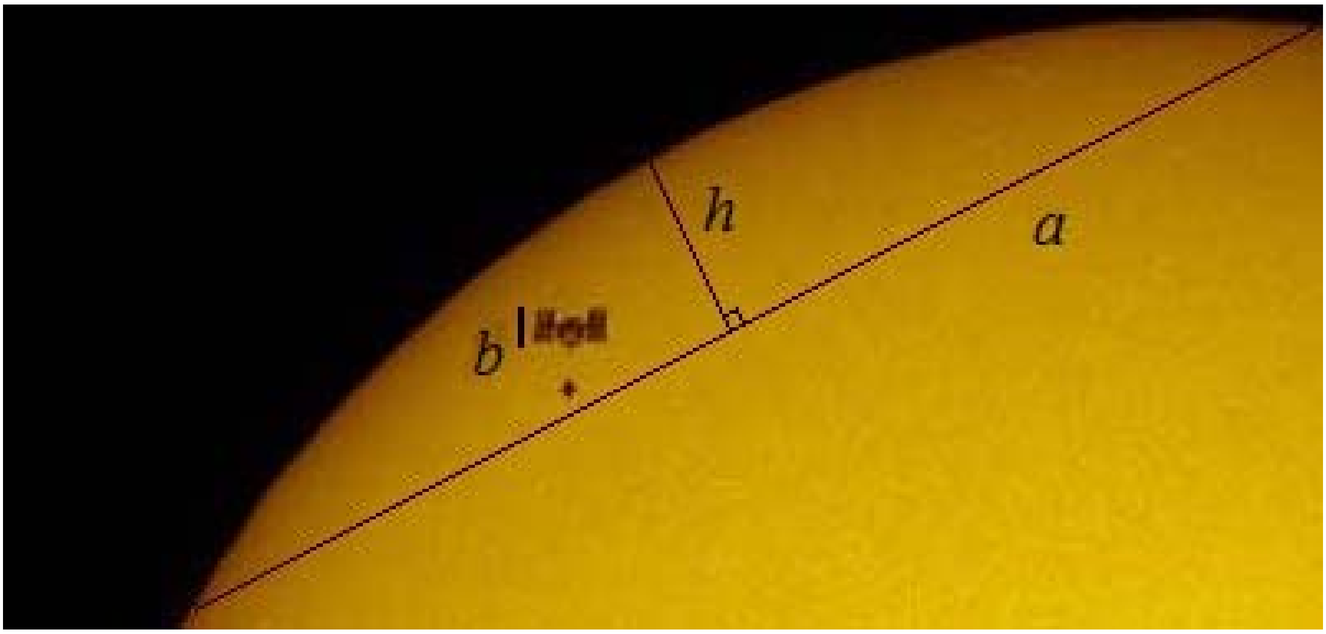


Рис. 2.

2). Як видно з (рис. 3) у прямокутному трикутнику ΔBCO: $BC = a$, $CO = R - h$, $BO = R$. Згідно з теоремою Піфагора, можемо записати: $R^2 = a^2 + (R-h)^2$, звідки:

$$R^2 = a^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot h + h^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot R \cdot h = a^2 + h^2$$

$$R = \frac{a^2 + h^2}{2 \cdot h}$$

3). Оскільки середній кутовий радіус Сонця α=16′, можна визначити кутовий розмір сонячних панелей β із співвідношення $\frac{R}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$, звідки:

$$\beta = \alpha \cdot \frac{b}{R}$$

4). За відомими реальними розмірами сонячних панелей МКС $b_0 = 73\,м$ і їх кутовим розміром β, можемо визначити відстань l до МКС із співвідношення $\frac{2 \cdot \pi \cdot l}{b_0} = \frac{360^0}{\beta}$, звідки:

$$l = \frac{b_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{360^0}{\beta}$$

5). Обчислимо шукане значення відстані до Міжнародної космічної станції:

а). Експериментальні дані:

$h = 25$ мм. $a = 85$ мм. $b = 6$ мм.

б). Розрахункові дані:

$$R = \frac{a^2 + h^2}{2 \cdot h} = \frac{(85мм)^2 + (25мм)^2}{2 \cdot 25мм} = 157\,мм.$$

$$\beta = \alpha \cdot \frac{b}{R} = 16' \cdot \frac{6мм}{157мм} = 0{,}61' \approx 0{,}01^0$$

в). Відстань до станції:

$$l = \frac{b_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{360^0}{\beta} = \frac{73м \cdot 360^0}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01^0} = 418471\,\text{м} \approx 420\,\text{км}.$$

Зауважимо, що отримане значення лежить у діапазоні теоретичних значень розташування станції від Землі: в перигеї – 350 км., в апогеї – 460 км.

4. Зіткнення астероїдів. Два однакові астероїди, захоплені планетою (маса планети *M*), рухаються в однаковому напрямку по колових траєкторіях радіуса *R*, кут між площинами орбіт α. На скільки зросте температура астероїдів при їх зіткненні (питома теплоємність – *c*). Оцінити, на яку найменшу відстань будуть наближатись астероїди до планети після зіткнення.

Розв'язання

Перша космічна швидкість астероїдів $v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$. Нехай *m* - маса кожного астероїда. Записавши закон збереження імпульсу для даного випадку, отримуємо швидкість їх руху після зіткнення: $u = v\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$. При ударі виділиться кількість теплоти:

$$\Delta Q = \frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}-2\mathrm{m}\frac{u^2}{2}=\frac{GmM}{R}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{GmM}{R}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Отже, температура речовини зросте на $\Delta t = \dfrac{GM\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2Rc}$.

Найменша відстань до планети.

Запишемо закон збереження енергії та другий закон Кеплера:

1-е положення: астероїди в перший момент після удару (найвища точка);

2-е положення: астероїди в найнижчому положенні (R').

$$\frac{2mu^2}{2}-\frac{G2mM}{R}=\frac{2mu'^2}{2}-\frac{G2mM}{R'};$$

$$Ru = R'u'.$$

Тобто:

$$\frac{2m}{2}\cdot\frac{GM}{R}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{G2mM}{R}=\frac{2m}{2}\cdot\frac{R^2}{R'^2}\frac{GM}{R}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{GM\cdot 2m}{R'}\rightarrow$$

$$\frac{1}{R}-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2R}=\frac{1}{R'}-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot R}{2R'^2}\rightarrow R'=\frac{R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1\pm\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Оскільки $R'<R$, то $R'=\dfrac{R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

5. Малий «парад планет». Останнім часом у засобах масової інформації з'являється багато повідомлень про «парад планет» у 2012 р. Визначте з якою періодичністю відбувається сполучення хоча б трьох планет (малий «парад планет»), тобто проміжок часу, через який три планети вишукуються на одній лінії з Сонцем. Розрахунки зробіть для системи «Меркурій-Венера-Земля». (Вважайте, що орбіти всіх планет колові та лежать в одній площині).

Розв'язання

Уявімо собі конфігурацію з трьох планет на одній лінії (рис. 1). Позначимо сидеричні періоди цих планет відповідно через T_1, T_2, T_3.

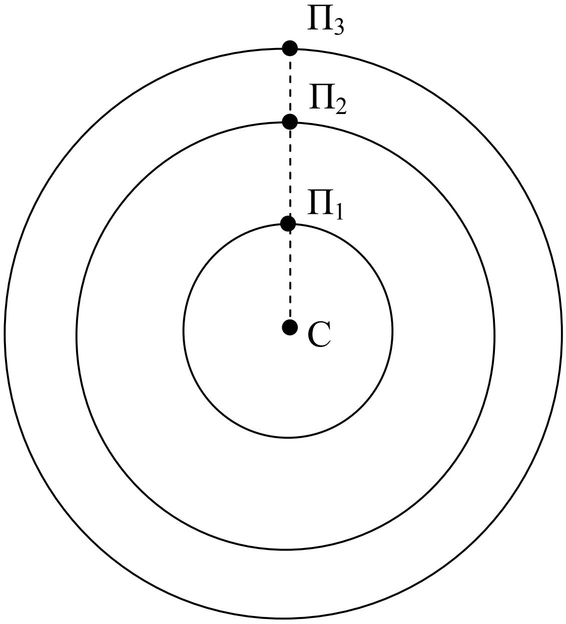


Рис. 1

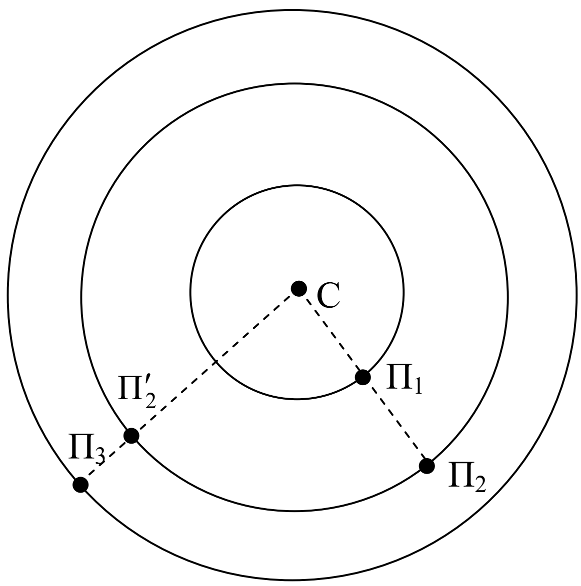


Рис. 2

Точний розв'язок полягає у знаходженні найменшого спільного кратного з періодом T_1, T_2, T_3

$S = T_1 T_2 T_3 = 19766,86$ років.

Але це дуже жорстка умова. Ми, фактично, вимагаємо, щоб планети повернулися в ті самі точки, що зображені на рис. 1. Насправді, тут можливі ще два малих паради планет.

Через синодичний період S_1 повториться лише задана конфігурація планет 1 та 2. Наближене розташування планет в цей час показано на рис. 2: планета 1 розташована в точці Π_1, планета 2 – в точці Π_2, а планета 3 – Π_3.

Для синодичного періоду системи планет 2-3 S_2 матимемо

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}.$$

Через синодичний період S_2 повториться лише задана конфігурація планет 2 та 3. Наближене розташування планет в цей час показано на рис. 2: планета 1 розташована в точці Π_1, планета 2 – в точці Π'_2, а планета 3 – Π_3. Для того, щоб утворилася задана на рис. 1 конфігурація, лінії $С\Pi_2$ та $С\Pi_3$ мають збігтися. А це може відбутися тільки через проміжок часу, який дорівнює найменшому спільному кратному від S_1 та S_2. У загальному випадку

$$S = S_1 S_2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right)}.$$

Розрахунки для системи «Меркурій-Венера-Земля»:

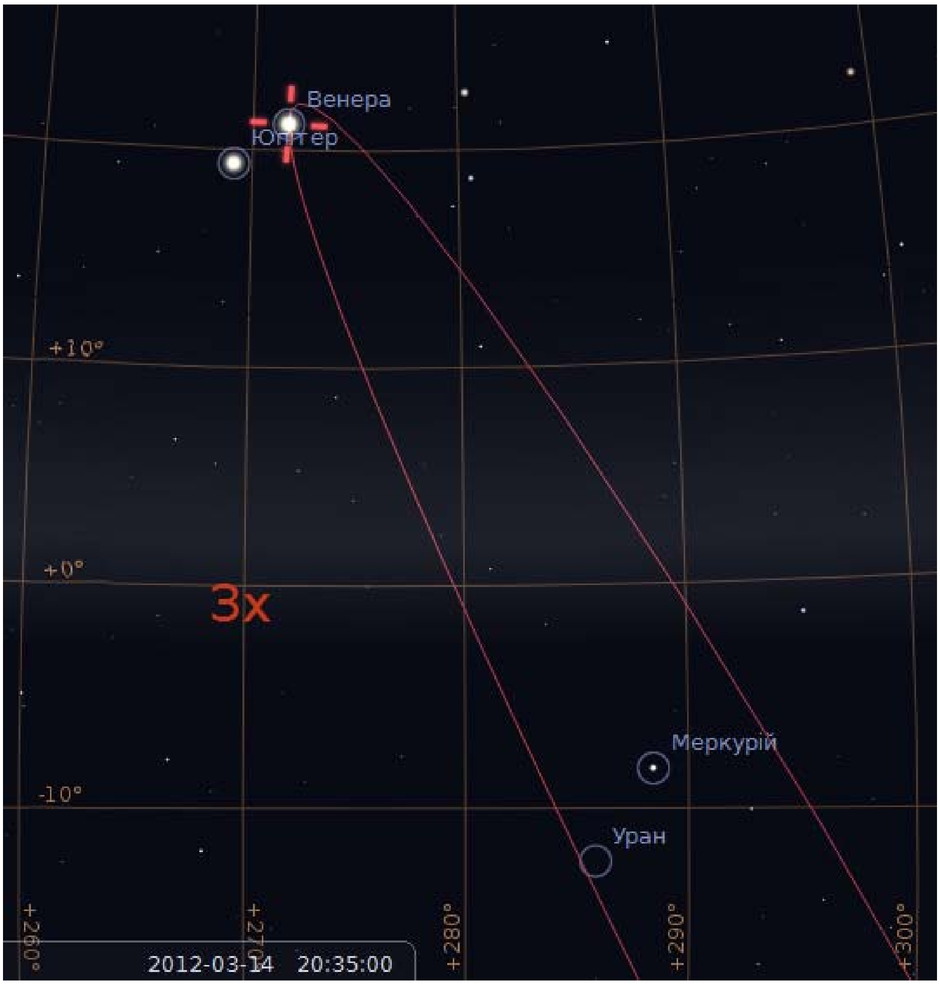
$$S_{\text{МеВЗ}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{88} - \frac{1}{225}\right)\left(\frac{1}{225} - \frac{1}{365}\right)} = 84780^d = 231{,}1 \text{ роки.}$$

(Малий парад планет настане також через

$$S = S_1 S_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_3}\right)} = 185{,}25 \text{ років})$$

6. Зустріч Венери і Юпітера. На рисунку показано ділянку неба над Ужгородом 14 березня 2012 року, коли можна було спостерігати сполучення Венери та Юпітера (показано також горизонтальну систему координат та орбіту Венери). Знайти кутову відстань між Венерою та Юпітером на небі Меркурія в цей час. Видимі та абсолютні зоряні величини планет на цей час вказано в таблиці.
(10 балів)

Планета	Видима зоряна величина, m	Абсолютна зоряна величина, M
Меркурій	2.24	34.60
Венера	-4.18	27.87
Юпітер	-1.96	25.85



Розв'язання

На рисунку в умові задачі показано орбіту Венери. Отже, планети розташовані в площині екліптики як показано на рисунку 1:

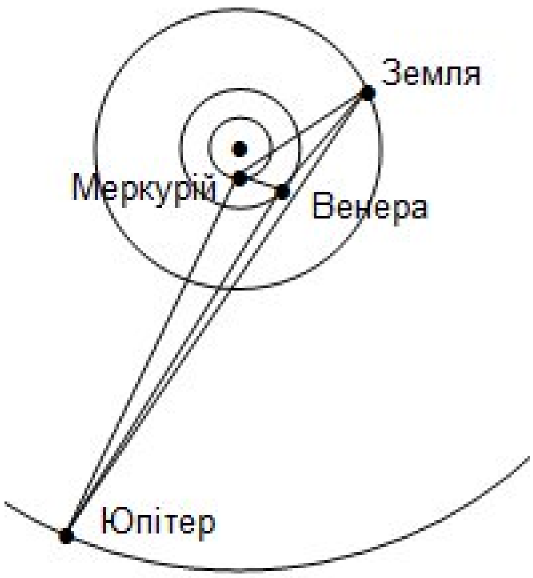


Рис.1

Зі співвідношення

$$M = m + 5 - 5\lg r$$

можна знайти абсолютні відстані від Землі до планет в парсеках:

$$r_М = 3.37 \cdot 10^{-6} \text{ пк},$$

$$r_В = 3.89 \cdot 10^{-6} \text{ пк},$$

$$r_Ю = 2.74 \cdot 10^{-5} \text{ пк}.$$

Проте зручніше розв'язувати задачу у відносних одиницях

$$r_М / r_Ю = 0.123,$$

$$r_В / r_Ю = 0.142.$$

З рисунка 2 видно, що слід знайти кут γ. Кутові відстані між Венерою і Меркурієм α та Вереною і Юпітером β знаходимо із рисунку в умові задачі:

$$\alpha=33.6^{o}=0.586\text{ рад},$$
$$\beta=3.2^{o}=0.056\text{ рад}.$$

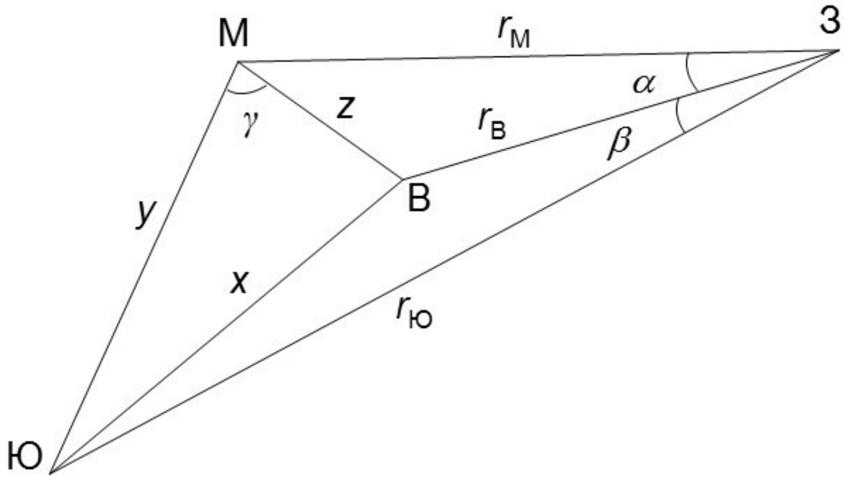


Рис.2

Із рисунку 2 за теоремою косинусів:

$$\left(\frac{x}{r_Ю}\right)^2=1+\left(\frac{r_B}{r_Ю}\right)^2-2\frac{r_B}{r_Ю}\cos\beta$$

$$\left(\frac{y}{r_Ю}\right)^2=1+\left(\frac{r_M}{r_Ю}\right)^2-2\frac{r_M}{r_Ю}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\left(\frac{z}{r_Ю}\right)^2=\left(\frac{r_M}{r_Ю}\right)^2+\left(\frac{r_B}{r_Ю}\right)^2-2\frac{r_M r_B}{r_Ю^2}\cos\alpha$$

знаходимо: $(x/r_Ю)^2=0.737$, $(y/r_Ю)^2=0.818$, $(z/r_Ю)^2=0.0062$.

Кутову відстань між Венерою і Юпітером на небі Меркурія шукаємо із рівності

$$\left(\frac{x}{r_Ю}\right)^2 = \left(\frac{y}{r_Ю}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_Ю}\right)^2 - 2\frac{yz}{r_{Ю}{}^2}\cos\gamma$$

З останнього виразу знаходимо cos γ=0.616, а кут

$$\gamma = 0.907 \text{ рад} = 52^{\circ}.$$