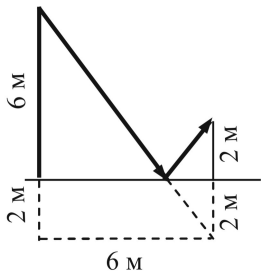
Механічний рух

1. Ворона сидить на дереві, висота якого 6 м. На дереві, що росте на відстані 6 м від першого, висить шматок сиру на висоті 2 м. Між деревами протікає річка. Яку мінімальну відстань необхідно пролетіти вороні до шматка сиру, попередньо змочивши дзьоб водою? (2002 р. з. 8 к.)



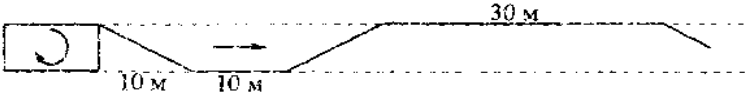
Розв'язок

Схема польоту ворони зображена на малюнку. Відстань, яку пролетить ворона

$S = \sqrt{(6+2)^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = 10$ м .

2. Пліт, що має форму прямокутника зі сторонами 5м×10 м, рухається вночі за течією річки зі швидкістю 1 м/с. По периметру плоту ходить людина з ліхтариком зі швидкістю 0,5 м/с. Намалюйте траєкторію руху ліхтарика відносно землі за 1 хвилину руху (вигляд зверху). Початкову точку руху виберіть самостійно. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок



3. Фігуристка, обертаючись навколо своєї осі, 20 разів повернулась лицем до свого партнера, який за цей час, що дорівнює 10 с, зробив 2 оберти навколо фігуристки. Скільки обертів за секунду робила фігуристка? (2002 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Якщо фігуристка обертається в ту ж сторону, що й фігурист, то вона робить 2,2 об/с, якщо в протилежну – 1,8 об/с.

4. Знайка живе в будинку на узбіччі дороги між зупинками А і В на відстані 800 м від А. У напрямку від А до В по дорозі щодня проїжджають автобус зі швидкістю 40 км/год і трамвай зі швидкістю 20 км/год. На зупинку В вони приїжджають одночасно в 8 годин ранку. Знайка ходить зі швидкістю 4,8 км/год, відстань між зупинками 2 км. Коли найпізніше повинен вийти з будинку Знайка і в якому напрямку, щоб встигнути на автобус? на трамвай? Час, який транспорт перебуває на зупинці, надзвичайно малий в порівнянні з часом знаходження Знайки в дорозі. (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

У Знайки є два варіанти: йти до зупинки *А* чи до зупинки *В*. Відповідно, він повинен вибрати той з них, який потребує меншого часу.

Нехай Знайка хоче встигнути на автобус. Якщо він піде на зупинку *B*, то повинен вийти за $\frac{2\text{ км} - 0{,}8\text{ км}}{4{,}8\frac{\text{км}}{\text{год}}} = \frac{1}{4}\text{год} = 15$ хв до 8 годин. Якщо він піде до зупинки *A* на автобус, то йому необхідно прийти туди не до 8, а на $\frac{2\text{ км}}{40\frac{\text{км}}{\text{год}}} = \frac{1}{20}\text{год} = 3$ хв раніше. Тому йому треба вийти за $\frac{0{,}8\text{ км}}{4{,}8\frac{\text{км}}{\text{год}}} + \frac{1}{20}\text{год} = \frac{13}{60}\text{год} = 13$ хв. до 8 годин. Отже, Знайці вигідно йти до зупинки *A*: в цьому випадку йому потрібно вийти з дому в 7,47.

Аналогічні роздуми для випадку, коли Знайка хоче встигнути на трамвай, приводять до наступного результату: якщо Знайка йде до зупинки *B*, то він повинен вийти за 15 хв до 8 годин, а якщо до *A* – за 16 хв до 8 годин. Тому Знайка повинен вийти в 7,45 і піти до зупинки *B*.

5. Три спортсмени одночасно починають велокрос і рухаються на дистанції рівномірно: перший зі швидкістю 10 м/с, другий – 9,8 м/с. Другий спортсмен на фініші відстав від першого на 10 с, зате виграв 5 с у третього. З якою швидкістю рухався третій спортсмен? (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Позначимо швидкості спортсменів відповідно υ_1, υ_2, υ_3.

Якщо час руху першого спортсмена t_1, то другого t_1+10, третього t_1+15. Тоді $\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2(t_1+10)$, звідки $t_1=490$ с. Оскільки $\upsilon_1 t_1 = \upsilon_3(t_1+15)$, то $\upsilon_3=9{,}7$ м/с.

6. Команді з двох осіб потрібно подолати відстань між пунктами А і В (20 км). Команда має один велосипед, на якому зі швидкістю 20 км/год може рухатись лише одна людина. Швидкість пішохода 6 км/год. За який мінімальний час і як команда прибуде в пункт В? Залік ведеться за останнім членом команди. (2003 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Час руху команди буде мінімальним за умови, що час руху обох спортсменів пішки однаковий $t_{11}=t_{12}=t_1$ і час руху на велосипеді однаковий $t_{21}=t_{22}=t_2$. Ці умови виконуються, якщо кожен спортсмен половину дороги йде пішки, а решту їде на велосипеді. Перший спортсмен стартує на велосипеді й на середині дистанції залишає велосипед, а далі йде пішки. Другий спортсмен робить все навпаки: $t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2\upsilon_1} + \frac{l}{2\upsilon_2} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2}\right) = 2$ год 10 хв.

7. Проїхавши третину довжини моста, велосипедист почув звук автомобіля. Якщо він поверне назад, то зустрінеться з автомобілем на початку мосту, а якщо продовжуватиме рух вперед – то у кінці мосту. Визначити у скільки разів швидкість руху автомобіля більша за швидкість руху велосипедиста. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

1) Якщо велосипедист поверне назад: $t_1 = t_2$. Позначимо довжину мосту – *l,*

Шлях пройдений автомобілем – *x*. Отже, $l_1 = x$,

$l_2 = \frac{1}{3}l$ – шлях, що пройде велосипедист. $\frac{x}{\upsilon_a} = \frac{l}{3\upsilon_в}$. Звідси $x = \frac{l \cdot \upsilon_a}{3\upsilon_в}$ (1).

2) Якщо велосипедист продовжуватиме рух вперед: $t_3 = t_4$.

$l_3 = x + l$ – шлях пройдений автомобілем, $l_4 = l - \frac{1}{3}l = \frac{2}{3}l$ – шлях пройдений велосипедистом. $\frac{x+l}{\upsilon_a} = \frac{2l}{3\upsilon_в}$. Звідси $x = \frac{2l \cdot \upsilon_a}{3\upsilon_в} - l$ (2).

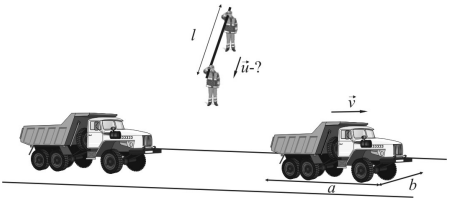
Підставимо рівняння (1) в рівняння (2) $\frac{l\upsilon_a}{3\upsilon_в} = \frac{2l\upsilon_a}{3\upsilon_в} - l$; $\frac{l\upsilon_a}{3\upsilon_в} = l$; $\frac{\upsilon_a}{\upsilon_в} = 3$.

8. Вовк і Заєць виїхали одночасно на велосипедах від своїх будинків назустріч один одному. Через 20 хв вони зустрілися і продовжили рух в тих же напрямках. Вовк доїхав до будинку Зайця і повернув назад, а Заєць доїхав до будинку Вовка і теж повернув у зворотному напрямку. Через який час від початку руху вони знову зустрінуться, якщо кожен з них проїхав весь шлях з однаковою швидкістю, але відмінною одна від одної? (2013 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай відстань між будинками Вовка і Зайця *S*. Тоді до моменту зустрічі Вовк подолає відстань $S_1 = \upsilon_B t_1$, а Заєць $S_2 = \upsilon_З t_1$. Оскільки зустріч була між будинками, то $S = S_1 + S_2 = \upsilon_B t_1 + \upsilon_З t_1 = (\upsilon_B + \upsilon_З)t_1$. Коли Вовк і Заєць роз'їхались і дісталися сусідського будинку, то вони подолали відстань *S*. Після розвороту до нової зустрічі вони втретє разом подолали відстань *S*. Тому з початку руху Вовк і Заєць разом подолали відстань 3*S*, на який затратили час, втричі більший першого: $t = 3t_1 = 3 \cdot 20$ хв $= 1$ год.

9. На будівництві проходить дорога, по якій з інтервалом t_0=11 с рухаються самоскиди з швидкістю υ=5 м/с. Двоє робітників несуть перпендикулярно до дороги трубу



довжиною l=6,5 м і повинні перетнути з нею дорогу. З якою мінімальною швидкістю можуть рухатися робітники, щоб не перешкодити руху самоскидів? Довжина і ширина самоскида дорівнюють a=10 м і b=2,5 м відповідно. (2015 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

За час t_0=11 с секунд самоскид встигає від'їхати на відстань $S=\upsilon t$=55 м. Довжина самоскида 10 метрів, отже, відстань між самоскидами S_1=45 м. А значить, просвіт на дорозі звільняється не 11 с, а $t_1 = \frac{S_1}{\upsilon} = 9$ секунд.

Робітники за цей час повинні пройти шлях $l+b$, який рівний сумі довжини труби і ширини самоскида: Отже швидкість робітників $u \geq \frac{l+b}{t_1}$=1 м/с.

10. Два літаки летять зустрічними курсами із швидкістю 200 м/с кожний. Із кулемета, розміщеного на борту першого літака, обстрілюють другий літак, причому вогонь ведеться перпендикулярно до напрямку польоту. На якій відстані один від одного повинні розміститись кульові отвори в борту другого літака, якщо кулемет робить 900 пострілів за 1 хв? (2005 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Літаки рухаються один відносно одного із швидкістю $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2 = 400\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Інтервал часу між двома пострілами: $t = \frac{1}{900}\text{хв} = \frac{1}{15}\text{с}$. Відстань між кульовими отворами повинна бути рівною відносному переміщенню другого літака за цей час: $S = \upsilon \cdot t = \frac{400}{15} \approx 27$ м .

11. Між містами Рівне і Житомир курсують маршрутні таксі, які рухаючись без зупинок з швидкістю 70 км/год, дотримуються встановленого графіка. В один з днів з Рівного до Житомира виїхала маршрутка і рухалася рівномірно із встановленою швидкістю. В зв'язку з реконструкцією дороги до Євро-2012 поблизу Новоград-Волинського вона змушена була зменшити швидкість до 50 км/год. Коли ця ділянка дороги закінчилася, до Житомира залишалось 40 км. Щоб не порушити графік, маршрутка збільшила швидкість до 80 км/год і прибула в Житомир точно по графіку. Визначити час руху маршрутки ділянкою дороги, де велись ремонтні роботи. (2010 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Розіб'ємо весь маршрут на три ділянки: перша – це рух з швидкістю 70 км/год, друга – ділянка, де велись ремонтні роботи, третя – ділянка довжиною 40 км. Третю ділянку маршрутка проїжджає за час

$t_3 = \dfrac{40\ км}{80\ \dfrac{км}{год}} = 0{,}5$ год. Нехай час руху маршрутки другою ділянкою t. Тоді шлях, пройдений цією ділянкою $50t$ Час руху другою і третьою ділянками (t+0,5) год. Оскільки для руху згідно графіка швидкість повинна становити 70 км/год, то можна вважати, що другу і третю ділянки маршрутка рухалась саме з такою середньою швидкістю і затратила час $\dfrac{50t+40}{70}$. Отже,

$t + 0{,}5 = \dfrac{50t+40}{70}$. Звідси t=1/4 год=15 хв.

12. Школярі побували на екскурсії в м. Кузнецовськ і поверталися в м. Рівне на автобусах. Автобуси їхали з швидкістю υ_1=70 км/год. Пішов дощ, і водії знизили швидкість до υ_2=50 км/год. Коли дощ закінчився, автобуси знову поїхали з попередньою швидкістю і в'їхали у Рівне на 10 хвилин пізніше, ніж було заплановано. Скільки часу йшов дощ? (2011 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Запланований час $t = \dfrac{S}{\upsilon_1}$. Весь шлях $S = S_1 + S_2 + S_3$ (1).

$t_1 = \dfrac{S_1}{\upsilon_1}$ (2), $t_2 = \dfrac{S_2}{\upsilon_2}$ (3), $t_3 = \dfrac{S_3}{\upsilon_1}$ (4).

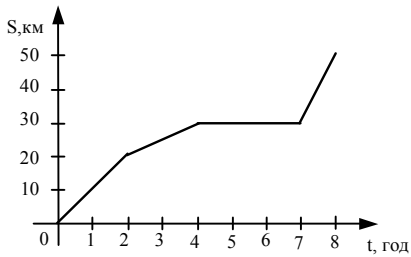
$t = t_1 + t_2 + t_3 - \Delta t$, де t_1, t_2, t_3 – часи проходження кожної ділянки, Δt=10 хв, час запізнення.

$t_2 = \dfrac{S}{\upsilon_1} - \dfrac{S_1}{\upsilon_1} - \dfrac{S_3}{\upsilon_1} + \Delta t = \dfrac{S - S_1 - S_3}{\upsilon_1} + \Delta t = \dfrac{S_2}{\upsilon_1} + \Delta t$ (5), Прирівняємо (3) і (5):

$\dfrac{S_2}{\upsilon_2} = \dfrac{S_2}{\upsilon_1} + \Delta t$, $S_2\left(\dfrac{1}{\upsilon_2} - \dfrac{1}{\upsilon_1}\right) = \Delta t$, $S_2 = \Delta t \cdot \dfrac{\upsilon_2 \cdot \upsilon_1}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$. Тоді

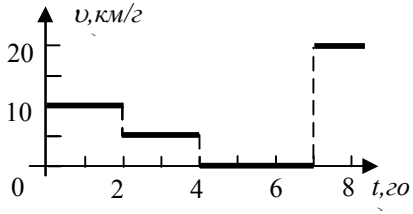
$t_2 = \dfrac{S_2}{\upsilon_2} = \Delta t \cdot \dfrac{\upsilon_2 \cdot \upsilon_1}{(\upsilon_1 - \upsilon_2)\cdot \upsilon_2} = \Delta t \cdot \dfrac{\upsilon_1}{(\upsilon_1 - \upsilon_2)}$ =35 хв.

13. На малюнку подано графік залежності шляху від часу для прямолінійного нерівномірного руху. Користуючись графіком, побудуйте графік залежності швидкості від часу $\upsilon = \upsilon(t)$. (2002 р. II е. 7 к.)



Розв'язок

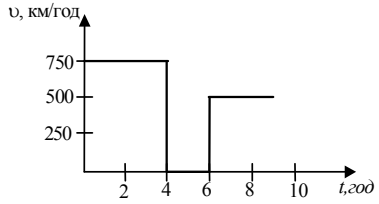
Залежність швидкості руху від часу виглядає так, як показано на малюнку.

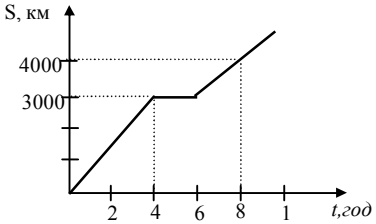


14. На малюнку подано графік залежності швидкості тіла від часу для прямолінійного нерівномірного руху. Користуючись графіком, побудувати графік залежності шляху від часу $S=S(t)$. (2001 р. II е. 7 к.)

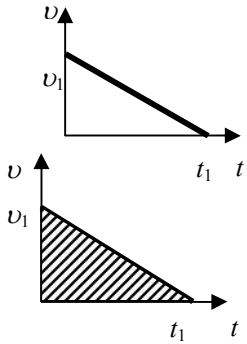
Розв'язок

Розв'язком задачі буде графік, зображений на малюнку.





15. Перший автомобіль, гальмуючи, зменшує свою швидкість з часом так, як показано на графіку. За час t_1 він пройшов таку ж відстань, як і другий автомобіль, що рухається із постійною швидкістю 20 м/с. Визначте початкову швидкість першого автомобіля υ_1. (2004 р. II е. 7 к.)



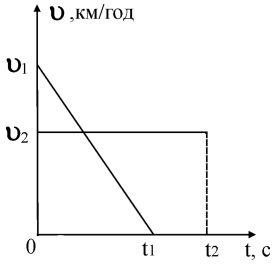
Розв'язок

Шлях, пройдений першим автомобілем за час t_1, чисельно дорівнює площі заштрихованого трикутника: $S_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1 t_1$. Шлях, пройдений другим автомобілем $S_2 = \upsilon_2 t_1$. З умови $S_1 = S_2$, звідки $\upsilon_1 = 2\upsilon_2 = 40$ м/с.

16. Повз радарний пост на швидкості 216 км/год пронісся новенький „Мерседес", не відреагувавши на вимогу зупинитися. Про порушення негайно передали по рації групі перехоплення, яка розпочала рух автомобілем з максимально можливою швидкістю в тому ж напрямку попереду порушника. Зважаючи на те, що швидкість патрульного авто була значно меншою від швидкості „Мерседеса", було вжито кардинальних заходів: коли порушник порівнявся з патрульним автомобілем, старшина Поліщук здійснив постріл з табельної зброї по колесах його автомобіля. Внаслідок екстреного гальмування „Мерс" зупинився через 8 с після

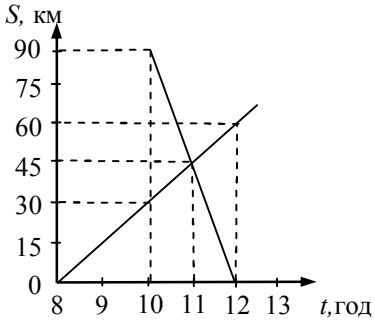
пострілу, а через 2 с його наздогнала група перехоплення. Визначте швидкість, з якою рухався патрульний автомобіль. (2005 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок



Задачу доречно розв'язати графічним методом. Шлях, пройдений "Мерседесом" $S_1 = \frac{1}{2}\upsilon_1 \cdot t_1$ рівний площі трикутника. Шлях, пройдений патрульним авто $S_2 = \upsilon_2 \cdot t_2$. Оскільки $S_1 = S_2$, то $\frac{1}{2}\upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2$, звідки $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1 t_1}{2t_2} = 86{,}4\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

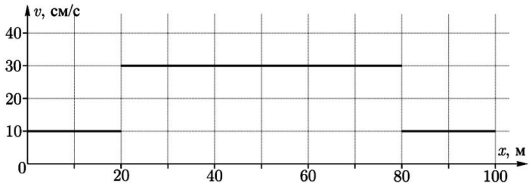
17. Із А у С, відстань між якими 90 км, о 8^{00} виїхав велосипедист, який рухався рівномірно зі швидкістю 15 км/год. В певний час із С виїхав мотоцикліст, який рухався з постійною швидкістю 45 км/год. На якій відстані знаходилися велосипедист і мотоцикліст о 10^{00} і 12^{00}, якщо відомо, що вони зустрілися на однаковій відстані між А і С? (2003 р. з. 8 к.)



Розв'язок

Задачу зручно розв'язати графічно, зобразивши залежності пройдених відстаней від часу. З графіка бачимо, що відстань між об'єктами о 10 і 12 год становить 60 км.

18. Хлопчик зміг перепливти річку за мінімальний час. Ширина річки 100 м. Швидкість хлопчика відносно води постійна і дорівнює 1 м/с. Залежність швидкості течії υ від відстані до берега *x* наведена на графіку. Зобразіть залежність швидкості течії *υ* від часу руху хлопчика. На яку відстань *l* вниз по річці його знесло течією? Вважайте що в будь-якому місці річки швидкість течії спрямована уздовж берегів. (2016 р. ІІІ е. 8 к.)

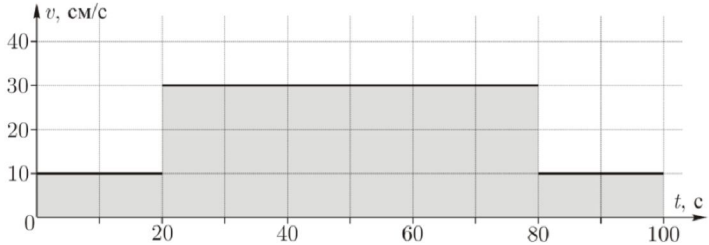


Розв'язок

Оскільки час переправи мінімальний, хлопчик спрямовував свою швидкість прямо на протилежний берег перпендикулярно до течії і затратив на

переправу час $t = \frac{100\text{ м}}{1\frac{\text{м}}{\text{с}}} = 100\text{ с}$. Ділянку від 0 до 20 м він плив 20 с, від 20 м до 80 м він плив 60 с і від 80 м до 100 м він плив 20 с.

Графік залежності швидкості течії річки можна перемалювати в осях υ(t), де t – час руху хлопчика.

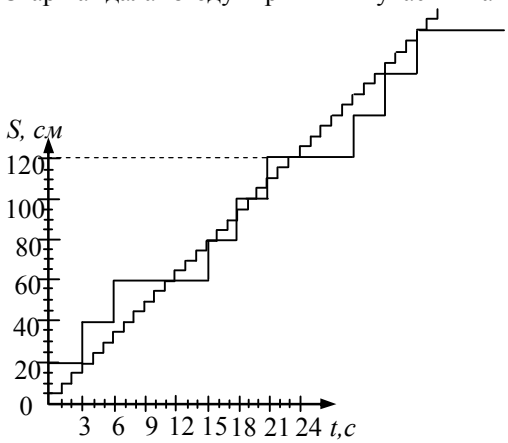


Графічний спосіб. Зміщення вниз по річці створювалося тільки швидкістю течії. Тому загальне зміщення дорівнює площі під графіком.

L=(2·10 см/с·20 с+30 см/с·60 с) = 2200 см = 22 м.

Аналітичний спосіб. Оскільки швидкість хлопчика 1 м/с, то перші 20 м він плив час t_1=20 с, а з графіка видно, що на цій відстані від берега швидкість течії була υ_1=10 см/с, отже хлопчика знесло на $l_1=\upsilon_1\cdot t_1$=200 см. Наступні 60 м хлопчик плив час t_2=60 с, швидкість течії була υ_2=30 см/с і хлопчика знесло на $l_2=\upsilon_2\cdot t_2$=1800 см. Останні 20 м хлопчик плив час t_3=20 с, швидкість течії була υ_3=10 см/с і хлопчика знесло на $l_3=\upsilon_3\cdot t_3$=200 см. Разом його знесло на 2200 см = 22 м.

19. На “легкоатлетичних змаганнях земноводних” молода жаба кинула виклик старшій на “перегони”. Старша дала згоду прийняти участь на перегонах на відстань S. Оцінити найбільшу відстань S, за якої старша жаба “виграє перегони”, якщо відомо, що: молода жаба здійснює щосекунди один стрибок на 5 см; старша – 1 стрибок через кожні три секунди на відстань 20 см, причому після третього стрибка відпочиває 6 с. Вважати, що переміщення жаб при стрибку відбувається практично миттєво. (2003 р. з. 9 к.)

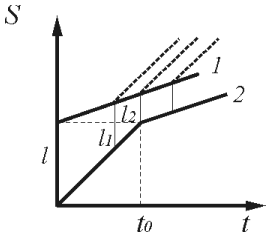


Розв'язок

Побудуємо графіки залежності відстані від часу, які відображають рух молодої та старої жаби. З графіка бачимо, що оптимальна відстань, на якій може перемогти стара жаба, становить 120 см.

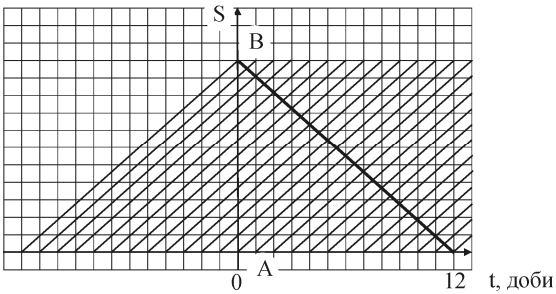
20. Два автомобілі, рухаються по прямій з однаковими швидкостями υ на відстані l один від одного і долають ділянку «поганої» дороги, де їх швидкість зменшується втричі. На яку мінімальну відстань наблизяться автомобілі? (2008 р. III е. 8 к.)

Розв'язок



Намалюємо графіки залежності шляху від часу. Візьмемо за початковий момент час виїзду першого автомобіля на погану дорогу. Відстань між автомобілями l. Другий автомобіль доїде до поганої дороги за час $t_0 = \frac{l}{\upsilon}$. Після цього він буде рухатись з швидкістю $\frac{\upsilon}{3}$ (графік 2). Якщо час проходження першим автомобілем поганої ділянки менший за t_0, то мінімальна відстань між автомобілями l_1, якщо це час рівний t_0, то мінімальна відстань l_2, якщо більший, то теж l_2, яка є найменшою з можливих. $l_2 = \frac{\upsilon}{3} \cdot t_0 = \frac{\upsilon}{3} \cdot \frac{l}{\upsilon} = \frac{l}{3}$.

21. Перехід теплоходів із порту А в порт В триває рівно 12 діб. Кожного дня опівдні із А в В відходить теплохід. Скільки теплоходів зустріне кожен теплохід під час дороги? (2005 р. II е. 7 к.)



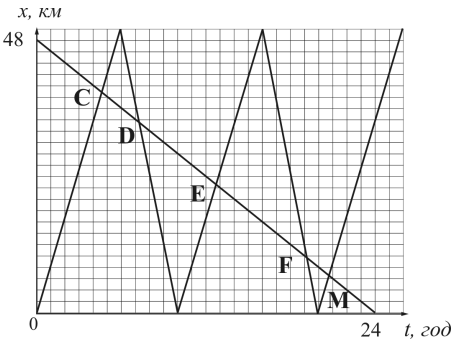
Розв'язок

Задачу доцільно розв'язати графічно. Розглянемо, скільки теплоходів зустріне теплохід, який вийшов з порта В. З першим він зустрінеться в порту В, з останнім в порту А. В дорозі він зустріне 23 теплоходи.

22. Між пунктами А і В, що знаходяться на березі річки на відстані L=48 км, курсує катер, рухаючись відносно води з швидкістю u=10 км/год. У момент часу, коли катер відходить від пункту В, йому назустріч з пункту А починає пливти пліт із швидкістю υ=2 км/год. Визначте,

скільки разів катер і пліт пропливатимуть один повз одного. Часом, протягом якого катер розвертається в пунктах А і В, нехтувати. Через який час від початку руху відбудеться їхня перша зустріч? (2009 р. III е. 8 к.)

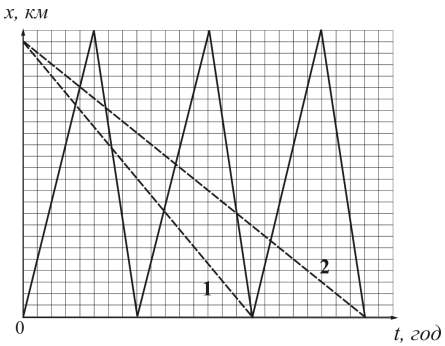
Розв'язок



Задачу доцільно розв'язувати графічно. Зобразимо графіки залежності координати (місцеположення) катера та плоту від часу. За початок відліку вибираємо точку В. Оскільки пліт рухається з пункту А в пункт В, то саме в цьому напрямку спрямована течія. Отже катер рухається з В до А з швидкістю 8 км/год, а з А до В з швидкістю 12 км/год. З графіка видно, що катер і пліт пропливатимуть один повз одного 5 разів (точки C,D,E,F,M). Для знаходження часу, через який відбудеться перша зустріч, запишемо рівняння: $8t+2t=48$. Звідси $t=4{,}8$ год.

23. Між пунктами А і В, що знаходяться на березі річки на відстані $L=48$ км, курсує катер. У момент часу, коли катер відходить від пункту В, йому назустріч з пункту А починає пливти пліт із швидкістю $\upsilon=2$ км/год. За час, поки пліт доплив до пункту В він зустрівся з катером 5 разів. В яких межах може лежати значення швидкості катера? Часом, протягом якого катер розвертається в пунктах А і В, нехтувати. (2009 р. III е. 9 к.)

Розв'язок



Задачу доцільно розв'язувати графічно. Зобразимо схематично графіки залежності координати катера та плоту від часу. За початок відліку вибираємо точку В. Оскільки пліт рухається з пункту А в пункт В, то саме в цьому напрямку спрямована течія. Отже катер рухається з В до А з швидкістю (υ–2) км/год, а з А до В з швидкістю (υ+2) км/год. Щоб зустрічі катера і плота відбулися 4 рази, четверта зустріч повинна відбутися в пункті В (графік плота №1). Щоб зустрічі катера і плота відбулися 6 разів, шоста зустріч повинна відбутися теж в пункті В (графік плота №2). Всі інші проміжні графіки якраз забезпечать 5 зустрічей. Отже, складемо два рівняння для граничних випадків:

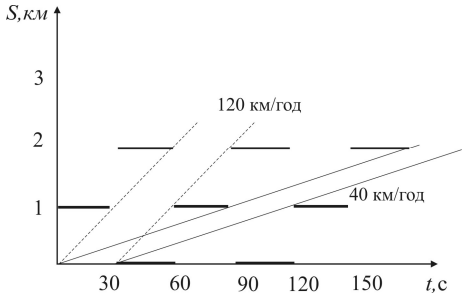
$$2\left(\frac{48}{\upsilon_{\min}-2}+\frac{48}{\upsilon_{\min}+2}\right)=24 \qquad 3\left(\frac{48}{\upsilon_{\max}-2}+\frac{48}{\upsilon_{\max}+2}\right)=24.$$

$12\upsilon_{\min}^2 - 96\upsilon_{\min} - 48 = 0$ $\qquad$ $8\upsilon_{\min}^2 - 96\upsilon_{\min} - 32 = 0$

$\upsilon_{\min} = 4 + 2\sqrt{5}\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$. $\qquad$ $\upsilon_{\max} = 6 + 2\sqrt{10}\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

24. На довгому шосе на відстані 1 км встановлені світлофори. Червоний сигнал кожного світлофора горить на протязі 30 с, зелений – на протязі наступних 30 с. (Часом горіння жовтого сигналу знехтувати). За такої умови всі автомобілі, які рухаються зі швидкістю 40 км/год, проїхавши на зелене світло один світлофор, проїжджають без зупинки, тобто також на зелене світло всі інші світлофори. З якими іншими, більшими за 40 км/год, швидкостями можуть рухатися автомобілі, щоб, проїхавши один світлофор на зелене світло, потім ніде не зупинятися? (2007 р. III е. 8 к.)

Розв'язок



Намалюємо графік руху автомобіля. По горизонтальній осі відкладаємо час у секундах, по вертикальній осі – шлях у кілометрах. Нехай в початковий момент включилося зелене світло. Чорним кольором позначимо час горіння червоного світла. Відстань 1 км автомобіль, який рухається з швидкістю 40 км/год, проїжджає за 1/40 год =90 с. Отже в точці S=1 км в момент часу t=90 с повинно загорітись зелене світло. Намалюємо графік горіння світлофора. З графіка видно, що автомобіль буде їхати без зупинок, якщо 1 км проїде за 30 с, 90 с, 150 с..., отже швидкість автомобіля, яка задовольняє умову υ_1=(1км/30с)·3600с=120км/год; υ_2=(1км/150с)·3600с=24км/год, що не задовольняє умову задачі. Отже υ=40 км/год; 120 км/год.

25. Першу половину часу свого руху пішохід пройшов із швидкістю 5 км/год, а другу половину часу – з швидкістю 4 км/год. Яка середня швидкість пішохода за весь час руху? (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Середню швидкість знаходять за формулою $\upsilon_c = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{2t_1}$, де t_1 – половина часу руху; S_1, S_2 – шлях пройдений пішоходом за кожну половину часу руху. $S_1=\upsilon_1 t_1$; $S_2=\upsilon_2 t_1$, тоді $\upsilon_c = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = 4{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

26. Автомобіль проїхав половину шляху зі швидкістю 60 км/год. Наступний відрізок шляху – зі швидкістю 15 км/год, а останній відрізок шляху – зі швидкістю 45 км/год. Чому рівна середня швидкість автомобіля, якщо другий та третій відрізки було пройдено за однаковий час? (2001 р. ІІ етап. 8 клас)

Розв'язок

Знайдемо середню швидкість руху на другій половині шляху. Два відрізки цього шляху автомобіль проїхав за однаковий час.

$\upsilon_{c1} = \frac{S_1 + S_2}{t + t} = \frac{\upsilon_2 t + \upsilon_3 t}{2t} = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_3}{2} = 30\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Середня швидкість на всьому шляху: $\upsilon_c = \frac{S + S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{\upsilon_1} + \frac{S}{\upsilon_{c1}}} = \frac{2S}{\frac{S(\upsilon_{c1} + \upsilon_1)}{\upsilon_{c1}\upsilon_1}} = \frac{2\upsilon_{c1}\upsilon_1}{\upsilon_{c1} + \upsilon_1} = 40\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

27. Другу половину шляху потяг їхав з постійною швидкістю, яка в 1,5 рази більша від швидкості на першій половині шляху. Середня швидкість на всьому шляху становить 43,2 км/год. З якими швидкостями їхав потяг кожну половину шляху? (2004 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Скористаємося формулою для визначення середньої швидкості під час руху на двох однакових ділянках шляху: $\upsilon_c = \frac{2\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$. Оскільки

$\upsilon_2 = 1{,}5\upsilon_1$, то $\upsilon_c = \frac{3}{2{,}5}\upsilon_1$. Отже υ_1=36 км/год, υ_2=54 км/год.

28. Хлопчик йде від міста А до міста В. Першу половину шляху він рухався із швидкістю 2,4 км/год, потім половину часу, що залишився, із швидкістю 5 км/год, решту шляху він подолав із швидкістю, що чисельно рівна середній швидкості руху хлопчика на всьому шляху. Знайти середню швидкість руху хлопчика. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Середня швидкість хлопчика знаходиться із співвідношення: $\upsilon_c = \frac{2S}{t_1 + t_2}$ (1), де S – половина шляху, t_1, t_2 – часи, за які він проходив відповідні половини.

$t_1 = \frac{S}{\upsilon_1}$, де υ_1 – швидкість на першій половині шляху.

$t_2 = 2t_3$, де t_3 – половина часу, що рухався хлопчик на другій половині шляху.

$S = \upsilon_2 t_3 + \upsilon_c t_3$. Підставивши у формулу (1), отримаємо:

$\upsilon_c = \dfrac{2(\upsilon_2 t_3 + \upsilon_c t_3)}{\dfrac{\upsilon_2 t_3 + \upsilon_c t_3}{\upsilon_1} + 2t_3}$. Після спрощень $\upsilon_c^2 + 5\upsilon_c - 24 = 0$. Звідси $\upsilon_c = 3\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

29. Любитель бігу пробіг половину шляху зі швидкістю υ_1=10 км/год. Потім половину часу (що залишився) біг зі швидкістю υ_2=8 км/год, решту шляху йшов зі швидкістю υ_3=4 км/год. Визначити середню швидкість руху любителя бігу. (2005 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Середня швидкість $\upsilon_c = \dfrac{S}{t} = \dfrac{S_1 + S_2}{t_1 + 2t_2}$, де S_1 – половина шляху, t_1 – час, за який пройдена перша половина шляху, t_2 – половина часу, що залишився.

$t_1 = \dfrac{S_1}{\upsilon_1}$. Оскільки $S_2 = \upsilon_2 t_2 + \upsilon_3 t_2$, то $t_2 = \dfrac{S_2}{\upsilon_2 + \upsilon_3}$. Враховуючи, що S_1=S_2,

одержимо: $\upsilon_c = \dfrac{2S_1}{\dfrac{S_1}{\upsilon_1} + \dfrac{2S_1}{\upsilon_2 + \upsilon_3}} = \dfrac{2S_1}{\dfrac{S_1(\upsilon_2 + \upsilon_3 + 2\upsilon_1)}{\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}} = \dfrac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{\upsilon_2 + \upsilon_3 + 2\upsilon_1} = 7{,}5\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

30. Автомобіль першу третину шляху проїхав за одну четверту частину всього часу руху. Середня швидкість автомобіля на всьому шляху 54 км/год. З якими швидкостями рухався автомобіль на першій і другій ділянках шляху, якщо на кожній ділянці він рухався з постійною швидкістю? (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок Нехай автомобіль проїхав шлях S за час t. Згідно умови, протяжність першої ділянки шляху $S_1 = \dfrac{S}{3}$, а тривалість руху $t_1 = \dfrac{t}{4}$.

Отже швидкість автомобіля на першій ділянці $\upsilon_1 = \dfrac{S_1}{t_1} = \dfrac{S}{3} \cdot \dfrac{4}{t} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{S}{t}$.

Середня швидкість автомобіля на всьому шляху $\upsilon_{cp} = \dfrac{S}{t}$, отже

$\upsilon_1 = \dfrac{4}{3}\upsilon_{cp} = \dfrac{4}{3} \cdot 54\dfrac{\text{км}}{\text{год}} = 72\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$. Аналогічно для другої ділянки шляху:

$S_2 = \dfrac{2}{3}S$, $t_2 = \dfrac{3}{4}t$. Швидкість на другій ділянці в цьому випадку:

$\upsilon_2 = \dfrac{S_2}{t_2} = \dfrac{2S}{3} \cdot \dfrac{4}{3t} = \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{S}{t} = \dfrac{8}{9}\upsilon_{cp} = 48\dfrac{\text{км}}{\text{год}}$.

31. Велосипедист першу половину часу руху між двома пунктами їхав із швидкістю 30 км/год, а другу – із швидкістю 15 км/год. З якою середньою швидкістю велосипедист проїхав другу половину шляху? (2013 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

$\upsilon_c = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Першу половину часу велосипедист їхав швидше, отже проїхав більшу частину шляху. Тому на першій половині шляху $\upsilon_1 = 30\frac{\text{км}}{\text{год}}$. $\upsilon_c = \frac{2\upsilon_1 \cdot \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$, $(\upsilon_1 + \upsilon_2)\cdot \upsilon_c = 2\upsilon_1 \cdot \upsilon_2$, $\upsilon_1\upsilon_c + \upsilon_2\upsilon_c = 2\upsilon_1\upsilon_2$,

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1\upsilon_c}{2\upsilon_1 - \upsilon_c} = \frac{30 \cdot 22{,}5}{60 - 22{,}5} = 18\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

32. Під час гонки Формула-1 автомобілі багато разів проходять кільцеву трасу. Ця траса умовно розбита на три ділянки однакової довжини, але різного рівня складності. Гонщик пройшов першу і другу ділянку з загальною середньою швидкістю 200 км/год, другу і третю – з загальною середньою швидкістю 150 км/год, а третю і першу – з загальною середньою швидкістю 225 км/год. На якій з ділянок (першій, другій чи третій), середня швидкість автомобіля була найбільшою? Визначте цю швидкість. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки гонщик проходив з найбільшими швидкостями першу та другу (υ_{12}=200 км/год) і третю та першу (υ_{31}=225 км/год) дільниці, слід очікувати, що найбільшою буде середня швидкість на першій ділянці: $\upsilon_1 = \frac{S}{t_1}$ (1), S – довжина однієї ділянки, t_1 – час руху на першій ділянці. За умовою $t_1 + t_2 = \frac{2S}{\upsilon_{12}}$ (2); $t_2 + t_3 = \frac{2S}{\upsilon_{23}}$ (3); $t_3 + t_1 = \frac{2S}{\upsilon_{31}}$ (4).

Для того, щоб знайти t_1, додамо рівняння (2) і (3) і віднімемо (4): $t_1 = S\left(\frac{1}{\upsilon_{12}} + \frac{1}{\upsilon_{31}} - \frac{1}{\upsilon_{23}}\right)$. Підставимо час у рівняння (1). Знаходимо, що

$$\upsilon_1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{\upsilon_{12}} + \frac{1}{\upsilon_{31}} - \frac{1}{\upsilon_{23}}}\right) = 360\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

33. Моторний човен проходить відстань між двома пунктами А і В за течією річки за 3 год, а пліт – за 12 год. Скільки часу моторний човен затратить на зворотній шлях? (2002 р. ІІ е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай швидкість човна υ, швидкість течії υ_m, відстань між пунктами S. Тоді $\upsilon_m = \frac{S}{12}$; $\upsilon + \upsilon_m = \frac{S}{3}$. Звідси $\upsilon = \frac{S}{3} - \frac{S}{12}$. Час руху човна проти течії $t = \frac{S}{\upsilon - \upsilon_m} = 6$ год.

34. Від пункту A до пункту B по річці відходить човен зі швидкістю 3 км/год відносно води. Назустріч човну одночасно з ним від B до A відходить катер зі швидкістю 10 км/год відносно води. За час руху човна від A до B катер встигає пройти двічі туди й назад і прибуває у пункт B одночасно з човном. Яка (за величиною і за напрямком) швидкість течії? (2001 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Відстань між пунктами А і В позначимо S. Припустимо, що течія напрямлена від А до В. Тоді час, за який цю відстань пропливе човен $t = \frac{S}{\upsilon_ч + \upsilon_т}$. Час, який витратить катер, щоб двічі пройти від А до В й назад: $t = \frac{2S}{\upsilon_к + \upsilon_т} + \frac{2S}{\upsilon_к - \upsilon_т}$. Оскільки ці часи рівні, то $\frac{S}{\upsilon_ч + \upsilon_т} = \frac{4S\upsilon_к}{\upsilon_к^2 - \upsilon_т^2}$. Або $4\upsilon_к\upsilon_ч + 4\upsilon_к\upsilon_т = \upsilon_к^2 - \upsilon_т^2$. Підставивши швидкість катера, отримаємо $\upsilon_т^2 + 40\upsilon_т + 20 = 0$. Звідси $\upsilon_{т=} \frac{-40 + 4\sqrt{95}}{2}$ або $\upsilon_{т=} \frac{-40 - 4\sqrt{95}}{2}$. Другий розв'язок не задовольняє умову задачі (швидкість течії не може бути більшою швидкості човна), отже $\upsilon_т = -20 + 2\sqrt{95} \approx -0{,}5 \frac{км}{год}$. Знак "–" означає, що наше припущення невірне, а значить течія має напрям від В до А.

35. Від буксира, що йшов проти течії річки, відірвався човен. В момент часу, коли на буксирі помітили човен, він знаходився від нього на відстані S_0. З буксира спустили катер, який доплив до човна і повернувся з ним до буксира. Скільки часу на це пішло? Яку відстань пройшов катер в один та другий бік, якщо швидкості катера і буксира відповідно рівні $\upsilon_к$, $\upsilon_б$. (2004 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Тіло відліку – річка. Час руху катера до човна: $t_1 = \frac{S_0}{\upsilon_к}$ (1). Час руху катера до буксира: $t_2 = \frac{S_0 + S_б}{\upsilon_к}$, де $S_б$ – відстань, яку пройде буксир за час

руху катера. $S_б = \upsilon_б t_1 + \upsilon_б t_2$, отже $t_2 = \dfrac{S_0 + \upsilon_б t_1 + \upsilon_б t_2}{\upsilon_к}$ (2). Після підстановок $t_2 = \dfrac{\upsilon_к + \upsilon_б}{\upsilon_к - \upsilon_б} t_1$. $t = t_1 + t_2 = \dfrac{2S_0}{\upsilon_к - \upsilon_б}$.

36. Відстань між кінцевими зупинками тролейбуса дорівнює 5 км. На маршруті рівномірно курсують 10 тролейбусів. Пасажир тролейбуса визначив, що зустрічні тролейбуси проїжджають повз нього через кожні 2 хв. Визначте швидкість руху тролейбуса. (2003 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Тролейбуси по маршруту розподілені рівномірно, тому відстань між ними $l_0 = \dfrac{2l}{N}$, де l – довжина маршруту. Час між зустрічами тролейбусів: $t = \dfrac{l_0}{\upsilon + \upsilon}$. Звідси $\upsilon = \dfrac{l_0}{2t} = \dfrac{l}{Nt} = 4{,}2\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

37. Потяг проходить повз спостерігача за 10 с, а по мосту довжиною 400 м – впродовж 30 с. Визначте довжину і швидкість руху потяга. (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай υ – швидкість потяга. Тоді його довжина 10υ. 30υ=400+10υ, звідки υ=20 м/с, а довжина потяга 200 м.

38. До мосту довжиною 100 м під'їжджає поїзд довжиною 200 м зі швидкістю 20 м/с. З якою найменшою швидкістю повинен бігти хлопчик, щоб пробігти через міст раніше за поїзд? (2005 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Час руху поїзда мостом $t = \dfrac{100\text{ м} + 200\text{ м}}{20\dfrac{\text{м}}{\text{с}}} = 15\text{ с}$. Швидкість хлопчика повинна бути не меншою, ніж $\upsilon = \dfrac{100}{15} = \dfrac{20}{3}$ м/с.

39. Хлопчик рухається рівномірно вздовж залізничної колії з швидкістю 4 км/год. Повз нього з однаковою швидкістю в протилежних напрямках проїжджають дві електрички, одна з яких містить 9 вагонів, друга – 10 вагонів. Визначте, з якою швидкістю рухалися електрички, якщо вони зустрілися і розійшлися навпроти хлопчика. (2003 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай l – довжина одного вагона, υ – швидкість електричок, u – швидкість хлопчика. Тоді час, за який кожна з електричок проїхала повз хлопчика

$$t=\frac{n_1 l}{\upsilon-u}=\frac{n_2 l}{\upsilon+u}\text{, звідки } \upsilon=u\frac{n_1+n_2}{n_2-n_1}=76\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

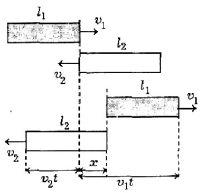
40. Потяг-експрес пройшов за час t_1=9 с повз зустрічну електричку, що рухалася з такою ж швидкістю і мала вдвічі більшу довжину. За який час експрес пройде повз зустрічний пасажирський потяг, який вдвічі довший за електричку і їде вдвічі швидше? (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Нехай υ–модуль швидкостей експреса та електрички, L–довжина експреса. Швидкість зближення експреса та електрички $\upsilon_1=\upsilon+\upsilon=2\upsilon$.

За час t_1 вони подолали сумарну відстань $L_1=L+2L=3L$. Отже $t_1=\frac{L_1}{\upsilon_1}=\frac{3L}{2\upsilon}$, звідки $\frac{L}{\upsilon}=\frac{2}{3}t_1$. Швидкість зближення експреса та пасажирського потяга $\upsilon_2=\upsilon+2\upsilon=3\upsilon$. За час t_2 вони подолали сумарну відстань $L_2=L+4L=5L$. Звідси $t_2=\frac{L_2}{\upsilon_2}=\frac{5L}{3\upsilon}=\frac{10}{9}t_1=10$ с.

41. По паралельних коліях назустріч один одному рухаються два потяги: пасажирський довжиною 300 м зі швидкістю 60 км/год і вантажний зі швидкістю 40 км/год. Машиніст пасажирського потяга визначив, що вантажний проїжджає повз нього за 21,6 с. Визначте відстань від точки зустрічі потягів до точки розходження останніх вагонів. (2006 р. II е. 8 к.)



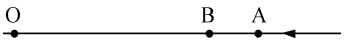
Розв'язок

Відносна швидкість потягів $\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2$. Довжина вантажного потягу $l_2=\upsilon t=(\upsilon_1+\upsilon_2)t_1$=610 м.

Визначимо час t, за який потяги розминуться. Відносно пасажирського потяга $t=\frac{l_1+l_2}{\upsilon_1+\upsilon_2}$=32,76 с. З малюнка маємо: $x=\upsilon_1 t-l_1$=246 м.

42. Потяг рухається прямолінійною ділянкою з швидкістю υ=118,8 км/год. Перебуваючи на відстані l=1 км від переїзду, машиніст подає сигнал, тривалість якого τ=5 с. Протягом якого інтервалу часу чутиме сигнал людина на переїзді? Швидкість звуку в повітрі υ_1= 330 м/с. (2006 р. III е. 8 к.)

Розв'язок



Нехай людина знаходиться в т. О. На момент початку подачі сигналу поїзд знаходився в т. А, а на момент закінчення в т. В. ОА=l. Початок сигналу

людина почує із запізненням $t_1 = \frac{l}{\upsilon_1}$, закінчення із запізненням $t_2 = \frac{l - \upsilon\tau}{\upsilon_1}$, а сам сигнал триває τ. Тому протяжність сигналу почутого людиною буде тривати $\Delta t = \tau + \left(\frac{l - \upsilon\tau}{\upsilon_1} - \frac{l}{\upsilon_1}\right) = \frac{\upsilon_1\tau + l - \upsilon\tau - l}{\upsilon_1} = \tau\left(1 - \frac{\upsilon}{\upsilon_1}\right)$. τ=4,5 с.

43. Два тіла рухаються назустріч одне одному так, що за кожні 10 с відстань між ними зменшується на 16 м. Якщо ці тіла будуть рухатися в одному напрямку з тими ж швидкостями, то за 5 с відстань між ними збільшиться на 3 м. З якою швидкістю рухається кожне з цих тіл? (2005 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

I-й випадок: $\upsilon_I = \upsilon_1 + \upsilon_2$; $\upsilon_I = \frac{S_I}{t_I} = 1{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

II–й випадок: $\upsilon_{II} = \upsilon_1 - \upsilon_2$; $\upsilon_{II} = \frac{S_{II}}{t_{II}} = 0{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}}$. $\upsilon_I - \upsilon_{II} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$\upsilon_1 + \upsilon_2 - (\upsilon_1 - \upsilon_2) = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $2\upsilon_2 = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\upsilon_2 = 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\upsilon_1 = 1{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

44. Хлопчик йде вниз по ескалатору, що опускається, 1 хв. Якщо він буде йти вдвічі швидше, спуск триватиме на 15 с менше. Скільки часу він буде опускатися, стоячи нерухомо на ескалаторі? (2006 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

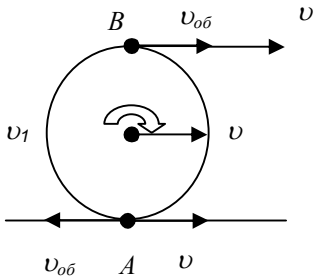
Нехай u – швидкість хлопчика, υ - швидкість ескалатора. Тоді в першому випадку: $u + \upsilon = \frac{S}{t_1}$ (1); в другому випадку: $2u + \upsilon = \frac{S}{t_2}$ (2). Час руху нерухомого хлопчика на ескалаторі $t_3 = \frac{S}{\upsilon}$. Віднявши почленно від (2) (1), отримаємо: $u = \frac{S}{180}$ (3). Підставивши (3) в (1), отримаємо: $\upsilon = \frac{S}{90}$. Тоді $t_3 = 90\text{ с} = 1{,}5\text{ хв}$.

45. З якою швидкістю відносно Землі рухаються верхні та нижні ланки гусениці трактора, якщо його швидкість 10 км/год? (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай вісь колеса має швидкість υ відносно землі. Тоді рух різних точок на ободі колеса розглядатимемо як суму двох рухів: поступального руху осі колеса і обертального руху точок обода навколо осі $\upsilon_{\text{об}}$.

Розглянемо точку А. Ця точка нерухома відносно землі (відсутнє проковзування). Це означає, що з відсутністю проковзування швидкості поступального руху осі колеса (автомобіля, трактора) і обертального руху точок обода рівні $\upsilon_{об.}=\upsilon$, отже $\upsilon_A=0$. У точці В швидкості поступального і обертального рухів додаються, тому $\upsilon_B=\upsilon_{об}+\upsilon=2\upsilon$. Верхня ланка гусениці трактора має таку ж швидкість, що й точка В: $\upsilon_1=2\upsilon=20$ км/год. Нижня – нерухома: $\upsilon_2=0$.



46. Відстань між двома хлопчиками S=300 м. Поруч з першим хлопчиком знаходиться песик. Хлопці йдуть назустріч з однаковими швидкостями υ_1=1,5 м/с. Песик бігає не зупиняючись від одного хлопчика до іншого з швидкістю υ_2 =2,5 м/с до тих пір поки хлопці не зустрінуться. Яку відстань пробіжить песик? (2014 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Час зближення хлопців $t=\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_1}$. Тоді песик пробіжить відстань

$l=\upsilon_2\cdot t=\upsilon_2\cdot\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_1}$=250 м.

47. Відстань між двома хлопчиками S=300 м. Поруч з першим хлопчиком знаходиться песик. Хлопці йдуть назустріч з однаковими швидкостями υ_1=1,5 м/с. Песик біжить до другого хлопчика з швидкістю υ_2 =2,5 м/с. Добігши до хлопчика, песик йде поруч з ним певний час, а потім біжить до першого хлопчика і йде поруч з ним такий же час аж до зустрічі хлопців. Скільки часу йшов песик поруч з кожним хлопцем? (2014 р. ІІІ е. 9 к.)

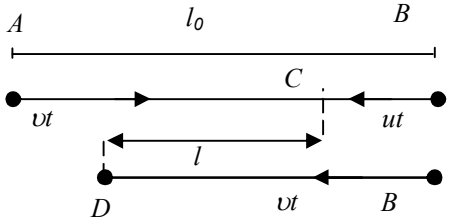
Розв'язок

До зустрічі хлопці йдуть час $t=\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_1}=100$ с. Час руху песика до другого хлопця $t_1=\dfrac{S}{\upsilon_1+\upsilon_2}=75$ с. За цей час хлопці пройдуть шлях $2\upsilon_1\cdot t_1=225$ м. Відстань між ними буде S_1=75 м. Нехай песик йде поруч з кожним хлопцем час t_0. Тоді після того, як песик йшов біля другого хлопця, відстань між хлопцями стала $S_2=S_1-2\upsilon_1 t_0$. Песик біжить до першого хлопця. Час його руху $t_2=\dfrac{S_2}{\upsilon_1+\upsilon_2}=\dfrac{S_1-2\upsilon_1 t_0}{\upsilon_1+\upsilon_2}$. Отже загальний час руху песика

$t = t_1 + t_0 + t_2 + t_0$. Після підстановки $100 = 75 + 2t_0 + \frac{75 - 3t_0}{4}$. Розв'язавши це рівняння, отримуємо, що t_0=5 с.

48. Спортсмени біжать із однаковими швидкостями υ колоною, довжина якої l_0. Назустріч їм біжить тренер із швидкістю u ($u < \upsilon$). Кожен із спортсменів, порівнявшись із тренером, біжить назад з тією ж швидкістю υ. Якою буде довжина колони, коли всі спортсмени розвернуться? (2002 р. II е. 7 к.)

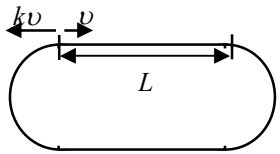
Розв'язок



$AB = l_0$ – колона, що зустріла тренера у точці B. Точка C – точка зустрічі тренера з останнім спортсменом колони. $l_0 = \upsilon t + ut$, звідки $t = \frac{l_0}{u + \upsilon}$, де t – час формування нової колони, в якій перший спортсмен з точки B перемістився в точку D, а останній спортсмен знаходиться у точці C. Тоді довжина нової колони $l = (\upsilon - u)t = \frac{(\upsilon - u)l_0}{u + \upsilon}$.

49. По колу стадіона бігають назустріч один одному двоє хлопців. Швидкість одного з них у k разів більша від швидкості другого. Щоразу хлопці зустрічаються на відстані L від попереднього місця зустрічі. Визначте довжину стадіона. (2002 р. II е. 8 к.)

Розв'язок



Нехай наступна зустріч хлопців відбудеться на відстані L (див. малюнок). Тоді для першого хлопця можна записати $L = \upsilon t$, для другого – $S - L = k\upsilon t$, де S – довжина стадіона. З цих двох рівнянь визначаємо S: $S = L + kL$.

50. З лінії старту колової доріжки стадіону починають бігти два спортсмени: один із швидкістю 6,5 м/с, другий – 4,5 м/с. Через скільки кругів вони зустрінуться на лінії старту? (2004 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Нехай це буде час t. За цей час перший спортсмен пройде шлях $S_1 = \upsilon_1 t$, другий – $S_2 = \upsilon_2 t$. З іншого боку $S_1 = nl$; $S_2 = ml$, де l – довжина колової доріжки, n, m – кількість кругів, пройдених першим та другим спортсменами

відповідно. Прирівнявши, отримаємо: $nl = \upsilon_1 t$, $ml = \upsilon_2 t$, звідки $\frac{n}{m} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{6,5}{4,5} = \frac{13}{9}$. Зважаючи на те, що 13 – число просте, перша зустріч спортсменів відбудеться, коли перший спортсмен подолає 13 кругів, другий – 9 кругів відповідно.

51. Зі старту бігової доріжки стадіону стартують два бігуни з різницею в часі Δt=2 с. Через який мінімальний час бігуни зустрінуться, якщо один з них пробігає повний круг за час t_1=65 с, а інший – за час t_2=70 с? (2012 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай довжина бігової доріжки S. Тоді швидкості бігунів відповідно дорівнюють: $\upsilon_1 = \frac{S}{t_1}$, $\upsilon_2 = \frac{S}{t_2}$ (1).

Розглянемо два випадки.

І. Перший спортсмен вибіг раніше за другого. Зв'яжемо систему відліку з другим бігуном. У цій системі відліку швидкість першого бігуна $u = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Шлях, який повинен пройти перший бігун до зустрічі з другим дорівнює $S - l$, де $l = \upsilon_1 \Delta t$. Тоді час зустрічі можна знайти з рівняння: $S - l = u \cdot t$.

Або згідно з (1): $S - \upsilon_1 \Delta t = \left(\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2}\right) \cdot t$; $S - \frac{S}{t_1}\Delta t = S\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \cdot t$;

$t = \frac{t_2(t_1 - \Delta t)}{t_2 - t_1} = 882$ с.

ІІ. Другий спортсмен вибіг раніше за першого. Тоді він перед стартом першого опиниться від нього на відстані $l = \upsilon_2 \Delta t$. Зв'яжемо систему відліку з першим спортсменом. У цій системі відліку другий спортсмен рухається до першого із швидкістю $u = \upsilon_1 - \upsilon_2$. Тоді час зустрічі можна знайти з умови $l = u \cdot t$.

Або згідно (1): $\upsilon_2 \Delta t = \left(\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2}\right) \cdot t$; $\frac{S}{t_2}\Delta t = S\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \cdot t$; $t = \frac{\Delta t \cdot t_1}{t_2 - t_1} = 26$ с.

52. Заєць втікає від Вовка по прямій, рухаючись рівномірно. У початковий момент часу відстань між Зайцем і Вовком 36 м, а швидкість Вовка 14 м/с. Вовк втомлюється і через кожні Δt=10 с (у моменти часу Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$..., рахуючи від початку руху) зменшує свою швидкість на $\Delta\upsilon$=1 м/с. З якою мінімальною швидкістю повинен бігти Заєць, щоб Вовк його не зловив? (2011 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

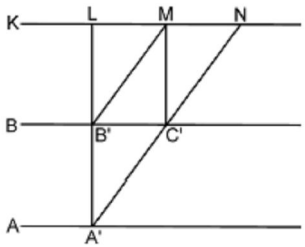
Якщо Заєць втікатиме із швидкістю 11 м/с, то Вовк наближатиметься до Зайця впродовж перших 10 с із швидкістю 3 м/с, впродовж наступних 10 с – із швидкістю 2 м/с. Тому Вовк наздожене Зайця.

Якщо Заєць втікатиме із швидкістю 12 м/с, то Вовк буде наближатися до Зайця впродовж перших 10 с із швидкістю 2 м/с, впродовж подальших 10 с – із швидкістю 1 м/с. За 20 с відстань між тваринами зменшиться на 30 м і потім перестане зменшуватися. Заєць втече від Вовка.

Таким чином, шукана мінімальна швидкість Зайця лежить в інтервалі від 11 м/с до 12 м/с. Позначимо її через $(12 - u)$ м/с, де $0 < u < 1$. За перші 10 с Вовк наближається до Зайця із швидкістю $(2 + u)$ м/с, за другі 10 с – із швидкістю $(1 + u)$ м/с, за треті 10 с – зі швидкістю u м/с. Надалі Вовк почне відставати від Зайця. За 30 с відстань між тваринами зменшиться на $10(2 + u) + 10(1 + u) + 10u = 30+30u$ метрів. Отже, Заєць втече від Вовка, якщо $36 > 30 + 30u$, або $u < 0{,}2$. Отже, швидкість Зайця повинна бути більшою за 11,8 м/с.

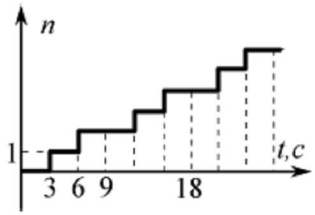
53. Хлопчик А йде прямолінійною доріжкою із швидкістю υ =2 м/с. Зліва від нього, паралельно в ту ж сторону йде хлопчик В з тією ж швидкістю υ, а хлопчик С біжить з швидкістю υ_1=4 м/с. Ще лівіше, на відстані, рівній відстані між доріжками, проходить лінія електропередач, стовпи якої розміщені на відстані a=18 м один від одного. У початковий момент часу всі три хлопчики і один з стовпів знаходяться на одному рівні (на малюнку вигляд зверху). Побудуйте на графіку залежність від часу кількості стовпів, які хлопчик А бачить в проміжку між двома іншими хлопчиками. Розмірами хлопчиків, стовпів і шириною доріжки знехтувати. (2015 р. III е. 10 к.)

Розв'язок



Нехай за деякий час хлопчик А перемістився в точку А′. Хлопчик В рухається з тією ж швидкістю, отже ВВ′=АА′. Хлопчик С рухається з вдвічі більшою швидкістю, отже ВС′=2 ВВ′. На малюнку стовпи розміщуються на прямій KN. Точка К відповідає тому стовпу, навпроти якого знаходилися всі три хлопчики в початковий момент. Точки L і N сама ліва і сама права точки, які хлопчик А бачить в інтервалі між хлопчиками В і С. З малюнка видно, що трикутники А′В′С′, В′LM і С′MN рівні. Отже KN=3АА′. А це значить, що точка N рухається з швидкістю 3υ=6 м/с. Отже через кожні $\frac{a}{3\upsilon} = 3$ с кількість стовпів збільшується на 1, оскільки точка N досягає нового стовпа і він буде входити у відстань LN. З

іншого боку через кожні $\frac{a}{\upsilon} = 9$ с один стовп виходить з цього проміжку із-за руху точки L. В початковий момент між хлопчиками B і C не проглядалося жодного стовпа. Стовпи будуть добавлятися на 3-ій і 6-ій секунді. На 9-ій секунді один стовп добавиться, а один відніметься, тобто кількість не зміниться. Потім знову появляться стовпи на 12 і на 15 секунді, на 18-ій кількість не зміниться. Зобразимо це на графіку.



Густина

54. Яку масу має куб, площа поверхні якого 150 см^2, якщо густина речовини, з якої він виготовлений, становить 2,7 г/см^3? (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Площа однієї грані 25 см^2, довжина ребра 5 см. Об'єм куба 125 см^3. Маса куба $m=\rho\cdot V$. m=337,5 г.

55. У скільки разів відрізняються маси суцільного кубика з довжиною ребра 6 см та порожнистого кубика таких самих розмірів, який виготовлений з того ж матеріалу? Товщина стінок порожнистого кубика 1 см. (2009 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Маса суцільного кубика $m = \rho \cdot V$, де $V = a^3$ – об'єм кубика. Маса порожнистого кубика $m = \rho \cdot V_1$, де V_1 – об'єм стінок. $V_1 = V - V_2$, де V_2 – об'єм порожнини. $V_2 = b^3$, де b = 6 см – 2 см = 4 см. Тоді $\frac{m}{m_1} = \frac{V}{V_1} = \frac{a^3}{a^3 - b^3}$.

$$\frac{m}{m_1} = \frac{6^3}{6^3 - 4^3} = \frac{27}{19}.$$

56. У шматок льоду вмерзла мідна кулька. Який її об'єм, якщо об'єм льоду і кульки V=100 см^3, а маса m=170 г? $\rho_м$=8,9 г/см^3, $\rho_л$=0,9 г/см^3 (2011 р. III е. 8 к.)

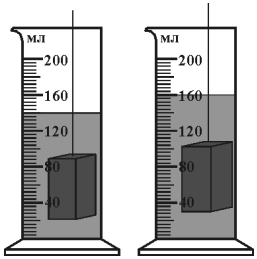
Розв'язок

Нехай об'єм кульки – V_1. Тоді об'єм льоду (V–V_1). Маса кульки: $m_к = \rho_м \cdot V_1$. Маса льоду: $m_л = \rho_л \cdot (V - V_1)$. Загальна маса: $m = m_к + m_л$;

Після підстановки $170 = 8{,}9 \cdot V + 0{,}9 \cdot (100 - V)$; $80 = 8 \cdot V$; $V = \frac{80}{8} = 10$ см^3.

57. У дві мензурки, в які було налито однакову кількість води, опускають два бруски однакової маси, виготовлені з свинцю та олова. Визначити початковий об'єм води в мензурках. Густина свинцю ρ_1=11,3 г/см^3; олова ρ_2= 7,3 г/см^3. (2010 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок



Враховуючи, що $\rho_2 < \rho_1$, а маси брусків однакові, робимо висновок, що об'єм олов'яної деталі більший. В умові задачі сказано, що в мензурки було налито однакову кількість води, а з малюнка видно, що після опускання деталей у другій мензурці рівень води більший на 20 см^3, отже об'єм олов'яної деталі більший за об'єм свинцевої на ΔV=20 см^3. $V_2=V_1+\Delta V$.

З формули густини $\rho = \dfrac{m}{V}$ маси деталей: $m_1 = \rho_1 \cdot V_1$; $m_2 = \rho_2 \cdot V_2$.

Враховуючи рівність мас можна записати: $\rho_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot (V_1 + \Delta V)$. Розв'яжемо це рівняння: $V_1 = \dfrac{\rho_2 \cdot \Delta V}{\rho_1 - \rho_2}$. Після підстановки значень отримаємо:

$$V_1 = \frac{7{,}3\,\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 20\ \text{см}^3}{11{,}3\,\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3} - 7{,}3\,\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}} = 36{,}5\ \text{см}^3.$$

Згідно малюнка вода і свинцевий циліндр займають об'єм V_3=140 см^3. Тоді початковий об'єм води у мензурках $V = V_3 - V_1 = 103{,}5\ \text{см}^3$.

58. Сухий махровий рушник, що має розміри 50 см на 80 см має масу m=250 г. Повністю мокрий рушник, з якого починає капати вода, має масу M=950 г. Петрик П'яточкін безтурботно відпочивав на пляжі, як раптом пішов дощ, в результаті якого рівень води в розташованому поряд басейні збільшився на 2,5 мм. Рятуючись від дощу, Петрик розтягнув рушник над головою. Чи промок Петрик в цей день? Густина води ρ=1 г/см^3. (2013 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Визначимо максимальну масу води Δm, яку може ввібрати рушник: $\Delta m = M - m$; $\Delta m = 950 - 250 = 700$ г.

Дана маса води має об'єм V: $V = \dfrac{\Delta m}{\rho}$; $V = \dfrac{700 \cdot 10^{-3}\,\text{кг}}{10^3\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 7 \cdot 10^{-4}\,\text{м}^3$.

Якщо цей об'єм рівномірно розподілиться по площі рушника S, то висота шару води $h = \frac{V}{S}$. $h = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-1}} = 1{,}75$ мм.

Під час дощу випало 2,5 мм опадів. Отже, рушник промокне повністю і не зможе захистити Петрика від дощу.

59. У посудину, заповнену водою, кидають шматок алюмінієвого сплаву. Після того, як частина води вилилася з посудини, маса посудини із рештою води і шматком сплаву збільшилася на 25 г. Коли замість води використали рідке мастило з густиною 0,9 г/см^3 і повторили вимірювання, то маса посудини з мастилом і шматком сплаву збільшився на 26 г. Визначити густину сплаву. Густина води 1 г/см^3. (2001 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Різниця між масою шматка алюмінієвого сплаву і частиною води, що вилилася, згідно умови 25 г. Аналогічно різниця між масою сплаву і мастилом, що вилилось 26 г. Об'єми шматка сплаву, води і мастила, що вилились однакові. Тому, $m_c - \rho_в V_c = 25$; $m_c - \rho_м V_c = 26$, де m_c–маса шматка сплаву, $\rho_в$, $\rho_м$ – густини води і мастила, V_c – об'єм шматка сплаву.

$V_c(\rho_c - \rho_в) = 25$; $V_c(\rho_c - \rho_м) = 26$. Поділимо рівняння:

$$\frac{\rho_c - \rho_в}{\rho_c - \rho_м} = \frac{25}{26}; \quad 26\rho_c - 26\rho_в = 25\rho_c - 25\rho_м; \; \rho_c = 26\rho_в - 25\rho_м = 3{,}5\frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

60. Сплав складається з свинцю масою 1,13 кг і олова масою 2,92 кг. Яка густина сплаву, якщо вважати, що об'єм сплаву рівний сумі об'ємів його складових частин? Густина свинцю ρ_1=11300 кг/м^3, олова ρ_2= 7300 кг/м^3. (2002 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$. Оскільки $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$, $V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$, то

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2)\rho_1\rho_2}{m_1\rho_2 + m_2\rho_1} = 8100\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

61. Монета викарбувана із сплаву, який містить за масою 90% золота і 10% срібла. Визначте густину монети. Вважати, що об'єм монети дорівнює сумі об'ємів його складових частин. $\rho_з$=19,3 г/см^3, $\rho_с$= 10,5 г/см^3. (2005 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Густина монети $\rho = \frac{m}{V}$, де m – маса монети, V – об'єм. $V = V_з + V_с$.

$V_з = \frac{0{,}9m}{\rho_з}$; $V_c = \frac{0{,}1m}{\rho_c}$. Отже, $\rho = \frac{m}{\frac{0{,}9m}{\rho_3} + \frac{0{,}1m}{\rho_c}} = \frac{\rho_c \rho_3}{0{,}9\rho_c + 0{,}1\rho_3}$. Після підстановки $\rho \approx 17{,}8$ г/см^3.

62. На археологічних знахідках двох зливків коштовного металу було викарбувано: 40% – Au, 60% – Ag. Чи правильно відображає напис вміст цих компонентів у зливку, якщо після вимірювання їх мас та об'ємів дістали такі дані: m_1=4,6 кг; V_1=357 см^3, m_2=3,2 кг, V_2=228 см^3? Густина золота $\rho_з$=19,3г/см^3 , срібла ρ_c= 10,5 г/см^3. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Згідно даних задачі густина першого зливку $\rho_1 \approx 12{,}9$ г/см^3 , другого – $\rho_2 \approx 14{,}0$ г/см^3. Якщо під двома частинами золота і трьома частинами срібла мали на увазі частини мас, то $\rho_{зл1} = \frac{m_{зл1}}{V_{зл1}} = \frac{m_{зл1}}{V_з + V_c}$ (1), де $V_з = \frac{0{,}4m_{зл1}}{\rho_з}$ (2), $V_c = \frac{0{,}6m_{зл1}}{\rho_c}$ (3). Після підстановки (2) і (3) в (1) отримаємо: $\rho_{зл1} = \frac{5\rho_3\rho_c}{3\rho_3 + 2\rho_c} \approx 12{,}8 \frac{г}{см^3}$, що практично співпадає з густиною першого зливку. Якщо ж під двома частинами золота і трьома частинами срібла мали на увазі частини об'ємів, густина $\rho_{зл2} = \frac{2\rho_3 + 3\rho_c}{5} \approx 14{,}0 \frac{г}{см^3}$ і це співпадає з густиною другого зливку. Отже, з фізичної точки зору обидва написи можуть бути вірними.

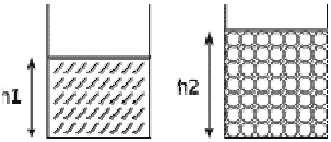
63. Для приготування гречаної каші домогосподарка залила 650 г гречки водою об'ємом 1,5 л. Скільки води википіло під час приготування каші, якщо вважати, що вода або википає, або поглинається гречкою і йде на збільшення об'єму зерна? Густина сухої зернини гречки 1,3 г/см^3, вареної 1,1 г/см^3, густина води 1 г/см^3. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Об'єм вареної крупи дорівнює сумі об'ємів V_1 сухої крупи і V_2 води, що поглинулася: $V = V_1 + V_2$. З іншого боку об'єм V дорівнює відношенню маси вареної крупи, що складається з маси m_1 сухих зерен і маси m_x води, що поглинулася, до густини ρ_2 вареної крупи: $V = \frac{m_1 + m_x}{\rho_2}$. Об'єм V_1 сухої крупи густиною ρ_1 : $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$. Об'єм води, що поглинулася $V_2 = \frac{m_x}{\rho_0}$. Тоді

$\frac{m_1+m_x}{\rho_2}=\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_x}{\rho_0}$. Звідси маса води, що поглинулася крупою $m_x=\frac{m_1\rho_0(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_0-\rho_2)}=1{,}3$ кг . Маса води, що википіла: 1,5 кг – m_x = 0,2 кг.

64. Висота рівня води в циліндричній посудині становить h_1 = 1 м. В посудину акуратно засипали маленькі металеві кульки. Виявилось, що вода точно покриває кульки. При цьому густина «суміші», яка утворилася ρ=4070 кг/м^3. Знайти висоту рівня води в посудині з кульками h_2. Густина води ρ_1=1000 кг/м^3, густина речовини кульок ρ_2=7140 кг/м^3. (2012 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Об'єм «суміші» визначимо як $V_c=\frac{m_c}{\rho}$; $m_c=m_в+m_к$, де $m_с$ – маса суміші, $m_в$ – маса води, $m_к$ – маса кульок. $m_в=\rho_1\cdot V_в$; $m_к=\rho_2\cdot V_к$. Після підстановки отримаємо: $V_c=\frac{\rho_1V_в+\rho_2V_к}{\rho}$ (1). $V_в=S\cdot h_1$; $V_c=S\cdot h_2$, де S – площа основи циліндричної посудини. $V_к=V_c-V_в$; $V_к=Sh_2-Sh_1=S(h_2-h_1)$. Підставивши у (1), отримаємо: $S\cdot h_2=\frac{\rho_1\cdot S\cdot h_1+\rho_к\cdot S(h_2-h_1)}{\rho}$. Проведемо математичні перетворення і визначимо h_2: $\rho\cdot h_2=\rho_1\cdot h_1+\rho_2\cdot h_2-\rho_2\cdot h_1$; $h_2=\frac{(\rho_1-\rho_2)\cdot h_1}{\rho-\rho_2}=2$ м .

Сила пружності. Закон Гука

65. Під дією сили F_1=2 Н довжина пружини x_1=9 см, а під дією сили F_2=5 Н – x_2=12 см. Яка довжина пружини у нерозтягнутому стані? (2013 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

$F_1=k(x_1-x_0)$, $F_2=k(x_2-x_0)$, де x_0 – довжина пружини у нерозтягнутому стані . $\frac{F_1}{x_1-x_0}=\frac{F_2}{x_2-x_0}$, $2\cdot(12-x_0)=5\cdot(9-x_0)$, $x_0=7$ см .

66. У нерозтягнутому стані пружина мала довжину 80 мм. Після того, як до неї підвісили сталевий та алюмінієвий тягарці однакового об'єму, пружина видовжилась на 10 мм, а коли зняли алюмінієвий, то її довжина зменшилася

до 88 мм. Визначити, чи суцільний алюмінієвий тягарець, чи має порожнину. Густина сталі ρ_1=7800 кг/м^3 , алюмінію ρ_2=2700 кг/м^3. (2001 р. II е. 7 к.)

Розв'язок

Пружина під дією сталевого тягарця розтягнулась у 4 рази більше, ніж під дією алюмінієвого, тому маса сталевого тягарця у 4 рази більша за масу алюмінієвого. Оскільки, за однакових об'ємів $\frac{m_c}{m_a} = \frac{\rho_c}{\rho_a} = \frac{7800}{2700} = 2{,}9$, то можна зробити висновок, що алюмінієвий тягарець має порожнину.

67. Вертикально розташована пружина з'єднує два вантажі у формі куба. Маса верхнього вантажу 2 кг, нижнього 3 кг. Коли система підвішена за верхній вантаж, довжина пружини 10 см. Якщо ж систему поставити вертикально нижнім вантажем на підставку, довжина пружини 4 см. Визначте власну довжину пружини. (2012 р. III е. 8 к.)

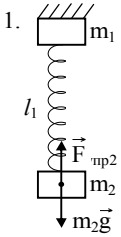
Розв'язок

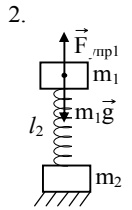
1 випадок: $F_{пр_2} = m_2 g$; $F_{пр_2} = k(l_1 - l_0)$; $k(l_1 - l_0) = m_2 g$.

2 випадок: $F_{пр_1} = m_1 g$; $F_{пр_1} = k(l_0 - l_2)$; $k(l_0 - l_2) = m_1 g$.

$$\begin{matrix} m_2 g = k(l_1 - l_0) \\ m_1 g = k(l_0 - l_2) \end{matrix} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{l_1 - l_0}{l_0 - l_2} .$$

$$l_0 = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_2 + m_1} ; \quad l_0 = 6{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6{,}4 \text{ см}.$$

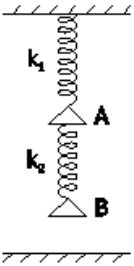




68. До стелі прикріплена конструкція, що складається з двох пружин і двох маленьких невагомих чашок А і В. Відстань від підлоги до стелі 1 м. Жорсткості пружин k_1=15 Н/м і k_2=30 Н/м. Довжини нерозтягнутих пружин однакові і становлять 30 см.

а) Вантаж якої маси треба покласти в чашку А, щоб чашка В дістала до підлоги?

б) Вантаж якої маси треба покласти в чашку В, щоб вона дістала до підлоги (чашка А при цьому порожня)? (2009 р. III е. 8 к.)

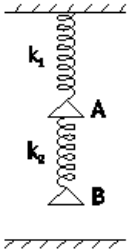


Розв'язок

а) Щоб дістатися до підлоги, чашка В повинна опуститися на $\Delta l = 1 \text{ м} - (0{,}3 \text{ м} + 0{,}3 \text{ м}) = 0{,}4 \text{ м}$. Якщо покласти вантаж в чашку А, то пружина № 2 при цьому не видовжується, а видовження пружини № 1 якраз повинно становити 0,4 м. Знайдемо масу вантажу в чашці А, щоб відбулося саме таке видовження пружини. Пружина видовжиться під дією сили тяжіння, яка діє на вантаж m_1: $m_1 g = k_1 \Delta l$. Звідси знаходимо, що m_1=0,6 кг.

б) Тепер подивимося, що буде, якщо положити вантаж в нижню чашку. В такому випадку розтягуються вже дві пружини: $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Підрахуємо видовження кожної із них окремо: $\Delta l_1 = \dfrac{m_2 g}{k_1}$ (все аналогічно першому випадку); $\Delta l_2 = \dfrac{m_2 g}{k_2}$. Щоб дістатися до підлоги, чашка В повинна опуститися на Δl=0,4 м, як і в попередньому випадку. Звідси отримуємо рівняння: $\dfrac{m_2 g}{k_1} + \dfrac{m_2 g}{k_2} = \Delta l$. Розв'язуючи його з урахуванням числових даних, знайдемо, що m_2=0,4 кг.

69. До стелі прикріплена конструкція, що складається з двох пружин і двох вантажів А і В. Маса вантажа В невідома, маса вантажа А: m_1=2 кг. Жорсткості пружин k_1=100 Н/м і k_2= 400 Н/м. На скільки зміниться загальне видовження пружин, якщо, не змінюючи вантажів, пружини поміняти місцями? Масою пружин знехтувати. (2014 р. ІІІ е. 8 к.)

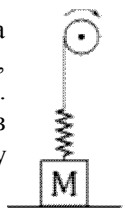


Розв'язок

Перша ситуація: $k_1 x_1 = (m_1 + m_2)g$; $k_2 x_2 = m_2 g$. Загальне видовження $x_1 + x_2 = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{k_1} + \dfrac{m_2}{k_2}\right)g$.

Друга ситуація після зміни пружин: $k_1 x_1' = m_2 g$; $k_2 x_2' = (m_1 + m_2)g$. Загальне видовження $x_1' + x_2' = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{k_2} + \dfrac{m_2}{k_1}\right)g$. Знаходимо зміну видовження. $\Delta x = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{k_1} + \dfrac{m_2}{k_2}\right) - \left(\dfrac{m_1 + m_2}{k_2} + \dfrac{m_2}{k_1}\right)g = \left(\dfrac{m_1}{k_1} - \dfrac{m_1}{k_2}\right)g = 0{,}15$ м. Видовження пружин зменшиться.

70. До розміщеного на столі вантажу масою M=100 г прикріплена пружина. Інший кінець пружини прикріплений до довгої мотузки, намотаної на вал радіусом 5 см. Жорсткість пружини k=10 Н/м. Спочатку пружина не розтягнута. Вал починає обертатися з періодом 10π с. Побудуйте графік залежності сили тиску вантажу на підлогу від часу. (2011 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Сили, що діють на тіло: $M\vec{g}$ – сила тяжіння, $\vec{F}_{пр}$ – сила пружності, $\vec{N}$ –сила реакції опори, яка чисельно рівна силі тиску вантажу на опору $\vec{F}_T$.

$F_T = N$ (1). Виходячи з умови: $Mg = N + F_{пр}$ (2). З рівностей (1) та (2) отримаємо: $F_T = Mg - F_{пр}$ (3). Згідно закону Гука $\left|F_{пр}\right| = kx$ маємо:

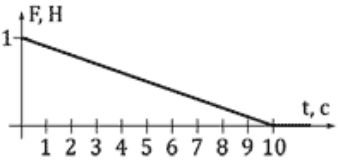
$F_T = Mg - kx$ (4), де $x = \upsilon t$ – видовження пружини.

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 0{,}05\ \text{м}}{10\pi\ \text{с}} = 0{,}01\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

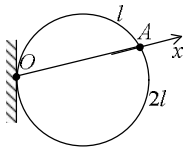
Звідси, підставивши дані в (4), отримаємо:

$F_T = -0{,}1t + 1$ (Н).

Отже, графік матиме вигляд:

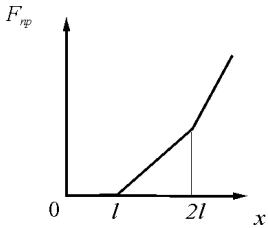


71. Точку *O* тоненького гумового кільця довжиною 3*l* закріпили, а точку *A*, яка поділяє кільце на дві частини (*l* і 2*l*), переміщують уздовж осі *Ox*. Побудуйте схематичний графік залежності сили *F*, яку прикладають до точки *A*, від координати *x* точки *A*. Поясніть графік. (2015 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

Якщо $OA \le l$, то гумка не розтягнута: $F_{пр} = 0$. Якщо $l \le OA \le 2l$, то розтягнута тільки коротка частина гумки, яка має деякий коефіцієнт жорсткості *k*. $F_{пр} = kx$. На графіку $F_{пр}$ лінійно зростає. Якщо $OA \ge 2l$, то розтягуються обидві частини гумки (паралельно), їх сумарний коефіцієнт жорсткості k_1 більший за *k* . На графіку $F_{пр}$ буде також лінійно зростати, але кут нахилу зміниться.



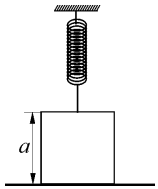
Тиск твердих тіл, рідин і газів

72. Оцінити масу земної атмосфери. Радіус Землі 6400 км. (2005 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Площа земної поверхні $S = 4\pi R^2 \approx 5{,}14 \cdot 10^{14}$ м^2. Вважаючи нормальний атмосферний тиск $p = 10^5$ Па, сила тиску на земну поверхню з боку атмосфери $F = pS = 5{,}14 \cdot 10^{19}$ Н. Тоді маса атмосфери $m = \dfrac{F}{g} = 5{,}14 \cdot 10^{18}$ кг .

73. Вантаж у формі куба із стороною a=0,2 м і масою m=20 кг прикріплений пружиною жорсткістю k=1,4 кН/м до стелі, як показано на малюнку. Спочатку пружина не деформована. Через різке охолодження куб швидко стиснувся так, що усі його сторони зменшилися на Δa=4 см. Визначити тиск куба на підлогу до і після охолодження. (2016 р. III е. 8 к.)



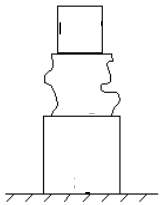
Розв'язок

Початковий тиск куба на підлогу був $p = \dfrac{mg}{a^2} = 5000$ Па.

Так як потім висота куба зменшилася, то пружина розтягнулася і почала діяти на вантаж з силою, яка спрямована вгору і дорівнює $F = k\Delta a$. F=56 Н. Крім того, змінилася і площа контакту куба з підлогою.

В результаті, тиск $p_1 = \dfrac{(mg - F)}{(a - \Delta a)^2} = \dfrac{200\text{ Н} - 56\text{ Н}}{(0{,}16\text{ м})^2} = 5625$ Па.

74. На столі розміщено кубик масою m_1=90 г, ребро якого a_1=5 см. На нього кладуть тіло неправильної форми так, що площа контакту з кубиком S_2=16 см^2. Зверху на тіло кладуть ще один кубик, ребро якого a_3=3 см так, що він повністю дотикається до тіла. Відомо, що всі тиски у місцях дотику тіл і дотику нижнього кубика зі столом рівні. Визначити масу тіла неправильної форми і масу верхнього кубика. (2013 р. III е. 8 к.)



Розв'язок

Запишемо умову рівності тисків для кожної із трьох площин, починаючи з верхньої: $\dfrac{m_3 g}{a_3^2} = \dfrac{(m_2 + m_3)g}{S_2} = \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3)g}{a_1^2}$, де m_2 – маса тіла неправильної форми, m_3 – маса верхнього кубика. Виразимо m_3 через m_2:

$m_3 = \dfrac{m_2 \cdot a_3^2}{S_2 - a_3^2}$. Тоді: $\dfrac{m_2 + \dfrac{m_2 \cdot a_3^2}{S_2 - a_3^2}}{S_2} = \dfrac{m_1 + m_2 + \dfrac{m_2 \cdot a_3^2}{S_2 - a_3^2}}{a_1^2}$. Для спрощення обрахунків підставимо замість S_2 і a_3 значення: $\dfrac{a_3^2}{S_2 - a_3^2} = \dfrac{9 \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 10^{-4} - 9 \cdot 10^{-4}} = \dfrac{9}{7}$. Тоді рівняння матиме вигляд:

$\dfrac{m_2 + \dfrac{9}{7} \cdot m_2}{S_2} = \dfrac{m_1 + m_2 + \dfrac{9}{7} \cdot m_2}{a_1^2}$, $m_2 = \dfrac{7 m_1 \cdot S_2}{16\left(a_1^2 - S_2\right)} = 7 \cdot 10^{-2}$ кг або m_2=70 г.

Звідси $m_3 = \dfrac{m_2 \cdot a_3^2}{S_2 - a_3^2} = 9 \cdot 10^{-2}$ кг або m_3= 90 г.

75. На столі лежить куб з пластиліну. Коли зверху на нього поклали мідний куб, ребро якого в 3 рази більше за ребро пластилінового, пластилін розплющився і площа його контакту зі столом збільшилася вдвічі. При цьому тиск на стіл став 14502 Па. Який тиск чинив спочатку на стіл пластиліновий куб і якою була його початкова висота? $\rho_{пл}$=1400 кг/м^3, $\rho_м$=8900 кг/м^3. (2008 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Розглянемо випадок, коли на столі лежить лише пластиліновий куб. Нехай його маса m, довжина ребра a. Тоді тиск $p_1 = \dfrac{mg}{S} = \dfrac{\rho_{пл} a^3 g}{a^2}$. Звідси $a = \dfrac{p_1}{\rho_{пл} \cdot g}$. Тепер на пластиліновий куб поклали мідний. Маса пластилінового куба не змінилась, а маса мідного $m_м = 27a^3 \cdot \rho_м \cdot g$. Отже тиск на стіл $p_2 = \dfrac{27a^3 \rho_м g + \rho_{пл} a^3 g}{2a^2}$. $p_2 = \dfrac{ga}{2}(27\rho_м + \rho_{пл}) = \dfrac{p_1}{2\rho_{пл}}(27\rho_м + \rho_{пл})$.

Звідси $p_1 = \dfrac{2\rho_{пл}}{27\rho_м + \rho_{пл}} \cdot p_2$. p_1=168 Па. a=1,2 см.

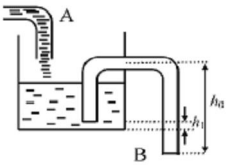
76. З якою силою тисне на дно посудини алюмінієвий куб з ребром 0,5 м, якщо рівень води у посудині 2 м? Дно посудини і грані куба ідеально гладенькі. Густина води 1000 кг/м^3, густина алюмінію 2700 кг/м^3. (2005 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки дно посудини і грані куба ідеально гладенькі, то архімедова сила на куб не діє. Сила тиску, з якою діє на дно посудини куб: $F = mg + \rho_в gh \cdot a^2$, де a – довжина ребра куба, h – висота стовпчика води над верхньою граню куба, m – маса куба. $m = \rho_a V = \rho_a a^3$. Отже,

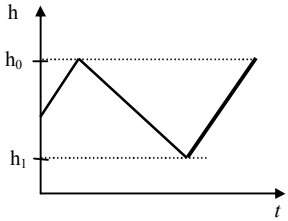
$F = \rho_a a^3 \cdot g + \rho_в gh \cdot a^2 = a^2 g(\rho_a a + \rho_в h) \approx 8375$ Н.

77. Побудувати графік зміни з часом рівня води в зображеній на малюнку відкритій посудині, якщо швидкість витікання води з підвідної трубки A менша від швидкості витікання з сифонної трубки B. (2001 р. II е. 8 к.)



Розв'язок

Коли вода підніметься до висоти h_0, з сифона почне витікати вода назовні. Швидкість зниження її рівня залежить від швидкості витікання води назовні, яка дорівнює різниці швидкостей витікання з сифонної трубки і підвідної. Згодом рівень води впаде до висоти h_1 і витікання припиниться. Вода знову набиратиметься до висоти h_0.



78. До якої висоти необхідно налити молоко в дійницю циліндричної форми, щоб сила тиску молока на бокові стінки дорівнювала силі тиску на дно? Діаметр дна дійниці 20 см. (2002 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Сила тиску молока на бокові стінки $F_1 = p_c \cdot S$, де p_c – середнє значення тиску. Оскільки $p_c = \rho g \dfrac{h}{2}$, а площа бічної поверхні $S = 2\pi r \cdot h$, то $F_1 = \rho g \dfrac{h}{2} \cdot 2\pi r h = \rho g \pi r h^2$. Сила тиску на дно дорівнює вазі молока: $F_2 = mg = \rho V g = \rho \cdot \pi r^2 h \cdot g$. З рівності двох сил отримуємо: $h = r$.

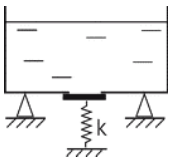
79. У циліндричну посудину налита ртуть, а зверху масло. Маса масла в 2 рази менша за масу ртуті, а загальна висота шарів 30 см. Визначте тиск рідин на дно посудини. Густина масла 900 кг/м^3, ртуті 13600 кг/м^3. (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Тиск на дно посудини складається з тисків, які чинять масло і ртуть:

$p = p_{рт} + p_м = \rho_{рт} g h_{рт} + \rho_м g h_м$ (1). За умовою задачі $m_{рт}=2m_м$, тоді: $\rho_{рт} h_{рт} = 2\rho_м h_м \Rightarrow h_{рт} = \dfrac{2\rho_м h_м}{\rho_{рт}}$. Оскільки $h_{рт} = h - h_м = \dfrac{2\rho_м h_м}{\rho_{рт}}$, то $h_м = \dfrac{\rho_{рт} h}{\rho_{рт} + 2\rho_м}$. Підставивши значення $h_{рт}$ та $h_м$ у формулу (1), матимемо:

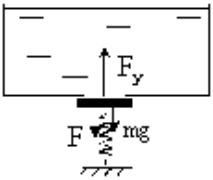
$$p = \frac{3\rho_{рт} g \rho_м h}{\rho_{рт} + 2\rho_м} = 7 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$



80. В дні високої посудини є пружинний клапан площею S і масою m. Жорсткість пружини k, пружина стиснута на ΔL.

До якої висоти від дна посудини можна наливати рідину з густиною ρ, щоб вона не витікала через клапан? (2007 р. з. 10 к.)

Розв'язок



Клапан відкриється, якщо $F + mg \geq F_Y$, де F_Y – сила пружного стискання пружини: $F_Y = k\Delta L$, $F = pS = \rho ghS$.

$\rho ghS + mg \geq k\Delta L$. Звідси $h \geq \dfrac{k\Delta L - mg}{\rho gS}$.

81. У циліндричну посудину, закриту з одного боку, яка лежить на горизонтальній поверхні, починають повільно вводити з відкритого боку легкий гладенький поршень. Знайти тиск повітря в посудині в той момент, коли вона зрушить з місця. Маса посудини 200 г. Сила тертя, яка діє на посудину, становить 30 % сили тяжіння, атмосферний тиск 10^5 Па, площа поршня 5 см^2. (2002 р. з. 9 к.)

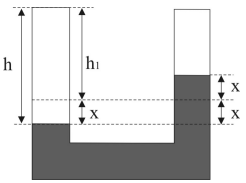
Розв'язок

Посудина зрушить з місця, якщо різниця сил тиску повітря в посудині з обох сторін поршня зрівняється з силою тертя: $p \cdot S - p_{атм.}S = F_{тер}$. Оскільки

$F_{тер.} = 0{,}3 \cdot F_{тяж.} = 0{,}3 \cdot mg$, то $p = p_{атм.} + \dfrac{0{,}3mg}{S} \approx 1{,}012 \cdot 10^5$ Па.

82. Вода на h_1=9 см не доходить до верхнього краю U-подібної трубки постійного перерізу. В ліве коліно трубки потроху наливають гас. При якій висоті стовпа гасу рідина почне витікати з трубки? Густина гасу $\rho_г$=800 кг/м^3, густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2007 р. III е. 8 к.)

Розв'язок



Густина гасу менша за густину води, отже верхній рівень гасу завжди вищий рівня води, тобто витікати почне гас.

$\rho_г gh = \rho_в g 2x$, де $x = h - h_1$. $\rho_г gh = 2\rho_в gh - 2\rho_в gh_1$.

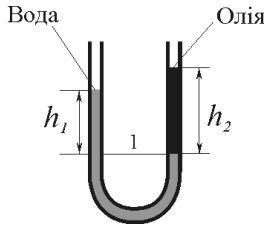
$h(2\rho_в - \rho_г) = 2\rho_в h_1$. $h = \dfrac{2\rho_в h_1}{2\rho_в - \rho_г} = 15$ см .

83. У сполучених посудинах знаходиться вода. Після того, як в праве коліно посудини налили олію, різниця рівнів води у посудині стала 9 см. Яка висота стовпчика олії? Якою стане різниця рівнів води в посудині, якщо в ліве коліно долити гас, висота стовпчика якого 7 см? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, олії $\rho_о$=900 кг/м^3, гасу$\rho_г$=800 кг/м^3. (2015 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Після того як налили олію рідини зайняли положення, як зображено на малюнку. На рівні 1 тиски однакові, тому $\rho_в g h_1 = \rho_о g h_2$. Звідси

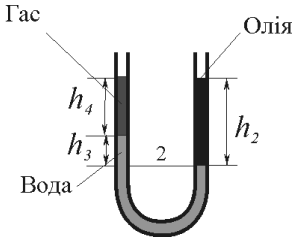
$h_2 = \dfrac{\rho_в \cdot h_1}{\rho_о}$. h_2=10 см.



Тиск, який чинить шар гасу висотою 7 см менший, ніж тиск, який чинить шар олії висотою 10 см, тому розміщення рідин буде наступним:

Рівність тисків на рівні 2 визначається співвідношенням: $\rho_в g h_3 + \rho_г g h_4 = \rho_о g h_2$. Звідси

$h_3 = \dfrac{\rho_о \cdot h_2 - \rho_г h_4}{\rho_в}$ =3,4 см.



84. У трьох однакових сполучених посудинах знаходиться ртуть. Визначити, на скільки підніметься рівень ртуті в середній посудині після того, як у ліву посудину налити шар води висотою l_1, а в праву – висотою l_2. Густина води $\rho_в$, ртуті $\rho_р$. (2006 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

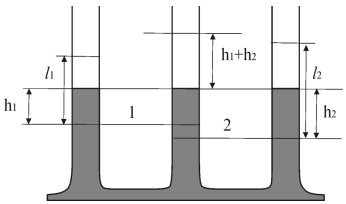
Об'єм ртуті не змінюється. Якщо припустити, що в лівій посудині ртуть опустилась на h_1, а в правій на h_2, то в середній вона піднімається на h_1+h_2.

Умова рівноваги на рівні 1:

$\rho_в g l_1 = \rho_р g(h_1 + h_2 + h_1) = \rho_р g(2h_1 + h_2)$.

Умова рівноваги на рівні 2:

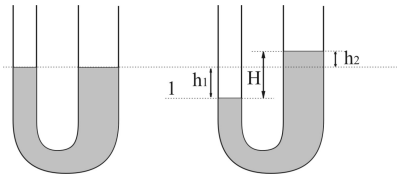
$\rho_в g l_2 = \rho_р g(h_1 + h_2 + h_2) = \rho_р g(h_1 + 2h_2)$.



Додавши ці рівняння одержимо:

$\rho_в g(l_1 + l_2) = 3\rho_р g(h_1 + h_2)$. Тому $h_1 + h_2 = \dfrac{\rho_в}{3\rho_р}(l_1 + l_2)$.

85. У сполучених посудинах з площами перерізу 10 см^2 і 15 см^2 знаходиться ртуть. Як і на скільки зміниться рівень ртуті у ширшій посудині, якщо в обидві посудини долити по 150 г масла? Густина ртуті $\rho_{рт}$= 13600 кг/м^3. (2006 р. з. 8 к.)



Розв'язок

Нехай у першій посудині рівень ртуті зменшився на h_1, а в другій збільшився на h_2. Тоді $S_1h_1=S_2h_2$. Різниця рівнів ртуті у двох посудинах $H=h_1+h_2$. З цих

двох рівнянь $S_1(H-h_2)=S_2h_2$; $h_2=\dfrac{S_1H}{S_1+S_2}$ (1). На рівні 1 тиски однакові:

$\dfrac{m_м g}{S_1}=\dfrac{m_м g}{S_2}+\rho_{рт}gH$; $H=\dfrac{m_м(S_2-S_1)}{\rho_{рт}S_1\cdot S_2}$ (2). Підставимо (2) в (1).

$h_2=\dfrac{m_м(S_2-S_1)}{\rho_{рт}\cdot S_2(S_1+S_2)}\approx 1{,}5$ см.

86. В сполучених посудинах знаходиться ртуть на 36,8 см нижче верхнього краю посудини. Площа перерізу однієї посудини вдвічі більша за площу іншої. У широку посудину доливають воду до краю. На скільки сантиметрів підніметься ртуть у вузькій посудині? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, ртуті $\rho_р$=13600 кг/м^3. (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

В широку посудину доведеться долити воду висотою $h+h_1$, де h_1 – це висота опускання ртуті в широкій посудині. При цьому ртуть, по відношенню до свого початкового положення підніметься у вузькій посудині на висоту h_2. Висоти h_1 і h_2 пов'яжемо, скориставшись рівновагою об'ємів ртуті в силу її нестисливості. $h_1S_1=h_2S_2$, Оскільки за умовою задачі $\dfrac{S_1}{S_2}=2$, то $h_2=2h_1$. Тиск, який створює вода в широкій посудині буде дорівнювати тиску ртуті у вузькій посудині : $p_в g\left(h+\dfrac{h_2}{2}\right)=p_р g\left(\dfrac{h_2}{2}+h_2\right)$.

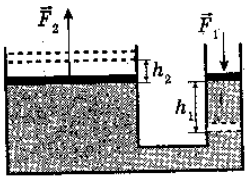
Відлік висоти ведеться від нижнього рівня ртуті у широкій посудині.
Розв'яжемо останнє рівняння відносно шуканої висоти:

$p_в h+p_в\dfrac{h_2}{2}=p_р\dfrac{3h_2}{2}\Rightarrow h_2=\dfrac{2p_в h}{3p_р-p_в}$. Звідси $h_2\approx 1{,}85$ см.

87. Малий поршень гідравлічного пресу за один хід опускається на відстань 0,2 м, а більший поршень піднімається на 0,01 м. З якою силою він діє на затиснуте в нього тіло, якщо на малий поршень діє сила 500 Н? (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

За законом Паскаля: $p_1=p_2$, де $p_1=\dfrac{F_1}{S_1}$, $p_2=\dfrac{F_2}{S_2}$, S_1, S_2 – площі малого і великого поршнів. $\dfrac{F_1}{S_1}=\dfrac{F_2}{S_2}\Rightarrow F_2=\dfrac{S_2}{S_1}\cdot F_1$. Оскільки рідина нестислива, то об'єм рідини, яка перейшла з одного циліндра в інший, однаковий:



$V_1=V_2,\ S_1h_1 = S_2h_2 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{h_1}{h_2}$. Тоді $F_2 = \frac{h_1}{h_2}F_1$. $F_2 = \frac{0{,}2\text{ м}}{0{,}01\text{ м}} \cdot 500\text{ Н} = 10^4\text{ Н}$.

88. Дві вертикальні сполучені посудини заповнені водою і закриті поршнями, маси яких відповідно m_1=0,1 кг і m_2=0,2 кг. У положенні рівноваги лівий поршень вище правого на h=2 см. Коли на лівий поршень покласти гирю масою m=100 г, поршні розмістяться на одному рівні. Яка буде різниця висот між поршнями у положенні рівноваги, якщо гирю поставити на правий поршень? Тертям нехтувати. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

У положеннях рівноваги тиски на однаковому рівні у лівій і правій посудинах однакові. З умови рівності тисків для трьох випадків:

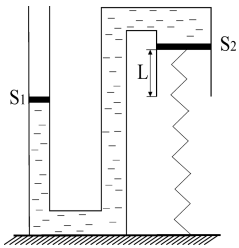
$\frac{m_1g}{S_1} + \rho gh = \frac{m_2g}{S_2}$ (1) ; $\frac{(m_1+m)g}{S_1} = \frac{m_2g}{S_2}$ (2) ;

$\frac{m_1g}{S_1} + \rho gH = \frac{(m_2+m)g}{S_2}$ (3) , де H – шукана різниця рівнів.

Оскільки згідно умови $m_1+m=m_2$, то з другого рівняння випливає, що $S_1=S_2$.

Тоді з першого рівняння $S = \frac{m_2 - m_1}{\rho h}$. Підставляючи одержаний вираз у третє рівняння, одержимо: $H = \frac{h(m_2+m-m_1)}{m_2-m_1} = 4$ см .

89. Два масивних поршні знаходяться в нерухомій S - подібній жорсткій трубі, заповненій водою. До одного з поршнів прикріплена пружина жорсткістю 1000 Н/м, другий кінець якої вмонтовано в підлогу. Система знаходиться в рівновазі. Відстань від правого поршня до кінця труби L=20 см. На лівий поршень акуратно кладуть вантаж. При якій максимальній масі вантажу вода не виливається з системи? Площа лівого поршня S_1=100 см^2, правого S_2=500 см^2, $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2006 р. III е. 8 к.)

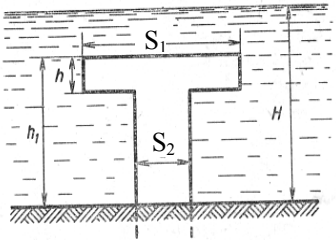


Розв'язок

Нехай лівий поршень змістився на h, тоді правий зміститься на h/5. Для того, щоб вода не виливалась потрібно щоб $h/5 \le 0{,}2$ м, тобто $h \le 1$ м. Зміна тиску в лівій трубці $\Delta p = \frac{mg}{S_1}$. Зміна різниці рівнів води в трубах $\Delta h = h - \frac{h}{5} = \frac{4}{5}h$.

Сила пружності пружини $F = k\frac{h}{5}$. Отже $\frac{mg}{S_1} = \rho_в g\frac{4}{5}h + \frac{kh}{5S_2}$. Звідси m=12 кг.

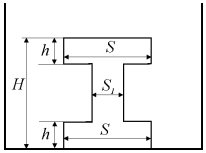
90. На дні водойми встановлена бетонна конструкція грибоподібної форми, розміри якої вказані на малюнку. Площа верхньої частини S_1, нижньої S_2. Глибина водойми H. З якою силою тисне конструкція на дно водойми? Густина бетону ρ, густина води ρ_0. (2006 р. з. 8 к.)



Розв'язок

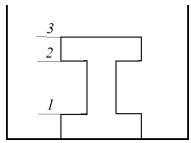
Сила тиску конструкції на дно складається із сили тяжіння конструкції $F_1 = \rho g(S_1 h + S_2(h_1 - h))$, сили тиску води на верхню поверхню деталі $F_2 = \rho_0 g S_1 (H - h_1)$ і сили тиску води на нижню поверхню, напрямлену вверх $F_3 = \rho_0 g(S_1 - S_2)\cdot(H - h_1 + h)$. Тоді $F = F_1 + F_2 - F_3$. Після підстановки $F = g(\rho - \rho_0)(S_1 h + S_2 h_1 - S_2 h) + g\rho_0 S_2 H$.

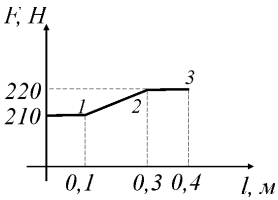
91. На дні посудини встановлена конструкція, яка нагадує штангу, виготовлена з чавуну. Площа верхньої і нижньої частини S=100 см^2, площа середньої частини S_1=50 см^2. Висота конструкції та її частин вказані на малюнку. H=40 см, h=10 см. У посудину наливають воду до висоти H. Визначити силу тиску конструкції на дно за відсутності води та побудувати графік залежності сили тиску конструкції на дно посудини від висоти налитої води. Дно посудини і поверхня конструкції ідеально гладенькі. Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, чавуну ρ=7000 кг/м^3. (2010 р. III е. 8 к.)



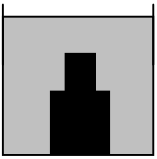
Розв'язок

Сила тиску конструкції за відсутності води $F = mg = \rho V g = \rho g\left(2Sh + S_1(H - 2h)\right)$. Після підстановки F=210 Н. Під час збільшення рівня води до рівня 1 тиск не змінюється. На графіку це горизонтальна лінія 1. Під час збільшення рівня води від рівня 1 до рівня 2 вода тисне на нижню основу і тиск рівномірно збільшується. Знайдемо силу тиску води на нижню основу, коли вода підніметься до рівня 2: $F_1 = \rho_в g\left(H - 2h\right)\cdot\left(S - S_1\right)$. Після підстановки F_1=10 Н. Отже, загальна сила тиску $F+F_1$ = 220 Н. На графіку це пряма лінія 2. Після наступного збільшення рівня води до рівня 3 сила тиску на нижню основу збільшується, але разом з тим вода починає тиснути знизу на верхню основу. Ці сили тиску однакові, бо однакові площі поверхонь і вони компенсують одна одну, тому загальна сила тиску не змінюється. На графіку це горизонтальна лінія 3.





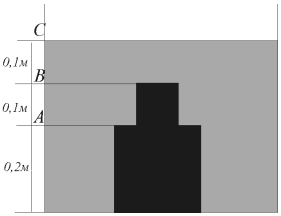
92. На рівне чисте дно сухого акваріуму поставили кубик, а на нього інший, розміри якого вдвічі менші. Ребро меншого кубика a=10 см. Акваріум заливають водою до висоти 40 см. Вода при цьому не проникає під нижню грань більшого кубика і між кубики. Побудувати графік залежності сили тиску кубика на дно акваріума від висоти налитої води (без врахування атмосферного тиску). Густина речовини кубика ρ=3 г/см^3, густина води ρ_0=1 г/см^3. (2014 р. ІІІ е. 8 к.)

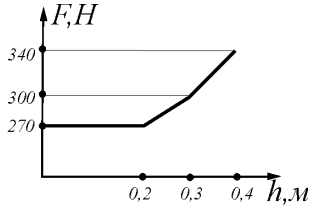


Розв'язок

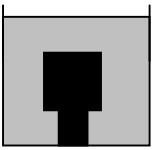
Поки в акваріумі немає води, то сила тиску – це вага кубиків. $F = P_1 + P_2$.

$F = \rho \cdot a^3 \cdot g + \rho \cdot (2a)^3 \cdot g$ =270 Н. Наливання води до рівня A силу тиску не змінює. Починаючи від цього рівня, виникне сила тиску з боку води на частину верхньої грані нижнього кубика, яка збільшує загальну силу тиску. $F_1 = \rho_0 gh \cdot (S_2 - S_1)$, де S_2=4a^2 – площа грані нижнього кубика, S_1=a^2 – площа грані верхнього кубика, h – висота шару води, який змінюється від 0 до 0,2 м. Отже F_1 змінюється від 0 до 60 Н (від 0 до 30 Н від рівня A до рівня B і від 30 Н до 60 Н від рівня B до рівня C). Але, коли вода буде на рівні B, виникне сила тиску з боку води на верхню грань верхнього кубика, яка теж збільшує загальну силу тиску. $F_2 = \rho_0 gh_1 \cdot S_1$, де h_1– висота шару води, який змінюється від 0 до 0,1 м. F_2 змінюється від 0 до 10 Н. Тоді загальна зміна сили тиску з боку води від рівня B до рівня C становитиме 40 Н. Зобразимо це на графіку.



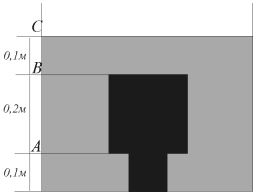


93. На рівне чисте дно сухого акваріуму поставили кубик, ребро якого a=10 см. На нього поставили інший кубик, розміри якого вдвічі більші. Акваріум заливають водою до висоти 40 см. Вода при цьому не проникає під нижню грань меншого кубика і між кубики. Побудувати графік залежності сили тиску кубиків на дно акваріума від висоти налитої води (без врахування атмосферного тиску). Густина речовини кубиків ρ=3000 кг/м^3, густина води ρ_0=1000 кг/м^3. (2014 р. ІІІ е. 9 к.)

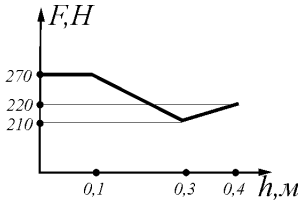


Розв'язок

Поки в акваріумі немає води, то сила тиску – це вага кубиків. $F = P_1 + P_2$. $F = \rho \cdot a^3 \cdot g + \rho \cdot (2a)^3 \cdot g$ =270 Н. Наливання води до рівня A силу тиску не змінює. Починаючи від цього рівня, виникне сила тиску з боку води на частину нижньої грані верхнього

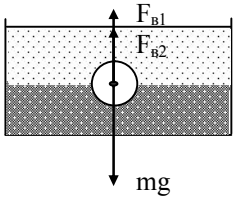


кубика, яка зменшує загальну силу тиску. $F_1 = \rho_0 gh \cdot (S_2 - S_1)$, де $S_2=4a^2$ – площа грані верхнього кубика, $S_1=a^2$ – площа грані нижнього кубика, h – висота шару води, який змінюється від 0 до 0,3 м. Отже F_1 змінюється від 0 до 90 Н (від 0 до 60 Н від рівня *A* до рівня *B* і від 60 Н до 90 Н від рівня *B* до рівня *C*). Але, коли вода буде на рівні *B*, виникне сила тиску з боку води на верхню грань верхнього кубика, яка збільшує загальну силу тиску. $F_2 = \rho_0 gh_1 \cdot S_2$, де h_1 – висота шару води, який змінюється від 0 до 0,1 м. F_2 змінюється від 0 до 40 Н. Тоді загальна сила тиску з боку води від рівня *B* до рівня *C* змінюється від 60 Н до 90–40=50 Н. Зобразимо це на графіку.



Виштовхувальна сила. Закон Архімеда

94. У посудину налили ртуть, а на неї мастило. Куля, опущена в посудину, плаває так, що вона рівно наполовину занурена у ртуть. Визначити густину кулі, якщо густина мастила 0,9 г/см^3, а густина ртуті 13,6 г/см^3. (2001 р. II е. 8 к.)



Розв'язок

З умови плавання $mg = F_{в1} + F_{в2}$. Звідси

$$\rho_к Vg = \frac{1}{2}\rho_р Vg + \frac{1}{2}\rho_м Vg. \quad \rho_к = \frac{1}{2}(\rho_р + \rho_м) = 7{,}25\frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

95. Вага у воді прозорого каменя, знайденого геологами на Поліссі, виявилася у 1,4 рази меншою, ніж у повітрі. На користь скла чи алмазу слугують результати досліджень геологів? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, скла $\rho_с$=2500 кг/м^3, алмазу ρ=3500 кг/м^3. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Вага каменя в повітрі $\rho_к gV$. Вага каменя у воді $\rho_к gV - \rho_в gV$. Згідно умови задачі $\frac{\rho_k gV}{(\rho_k - \rho_в)gV} = 1{,}4$. Звідси $\rho_к$=3500 кг/м^3. Це густина алмазу.

96. Куля з чавуна, яка має всередині порожнину, плаває у воді, занурившись наполовину. Знайти об'єм внутрішньої порожнини, якщо маса кулі 5 кг. Густина чавуну 7800 кг/м^3, води 1000 кг/м^3. (2002 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

З умови плавання mg=0,5ρgV, де ρ – густина води, V – об'єм кулі.

Враховуючи, що $m=\rho_1 V_1$, де ρ_1 – густина чавуну, а V_1 – його об'єм, знаходимо: $V_{порож} = V - V_1 = \frac{m}{0{,}5\rho} - \frac{m}{\rho_1} = \frac{m(2\rho_1 - \rho)}{\rho\rho_1}$. $V_{порож} \approx 0{,}0093$ м^3.

97. Алюмінієва куля з внутрішньою порожниною важить 2 Н у повітрі і 1,2 Н у воді. Визначте об'єм внутрішньої порожнини кулі. Виштовхувальною силою повітря знехтувати. Густина алюмінію ρ_a=2700 кг/м^3, води $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2005 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

На кулю діє виштовхувальна сила $F_A = 0{,}8$ Н. $F_A = \rho_в g V_к$. Об'єм алюмінію $V_a = \frac{F_{пов.}}{g\rho_a}$. Тоді об'єм порожнини $V = \frac{F_A}{\rho_в g} - \frac{F_{пов.}}{\rho_a g}$. $V \approx 6\cdot 10^{-6}$ м^3=6 см^3.

98. Металева куля у досліджуваній рідині важить 1,1 Н. Вага кулі у воді 1 Н. Визначити густини рідини і матеріалу, з якого виготовлена куля, якщо вага кулі у повітрі 1,5 Н. Густина води $\rho_в$ = 1000 кг/м^3. (2002 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Виштовхувальна, що діє на кулю у воді: $\rho_в g V_к = P_1 - P_2$, де $V_к$ - об'єм кулі, P_1, P_2 – вага кулі відповідно у повітрі та воді. Звідси $V_к = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}$. Тоді густина матеріалу кулі $\rho_к = \frac{P_1}{V_к g} = \frac{P_1}{P_1 - P_2}\rho_в$. Після підстановки $\rho_к$=3000 кг/м^3. Виштовхувальна сила, що діє на кулю в досліджуваній рідині: $\rho_x g V_к = P_1 - P_3$, де P_3 – вага кулі в досліджуваній рідині. Тоді густина досліджуваної рідини $\rho_x = \frac{P_1 - P_3}{V_к g} = \frac{P_1 - P_3}{P_1 - P_2}\rho_в$. Після підстановки ρ_x=800 кг/м^3.

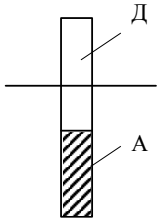
99. Динамометр, до якого підвішено злиток срібла і золота, у повітрі показує вагу P, а у воді P_B. Знайти вміст золота і срібла у злитку. Густина води $\rho_в$, золота $\rho_з$, срібла ρ_c. (2002 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Згідно умови задачі, виштовхувальна сила $F_A = P - P_B$. Враховуючи, що $F_A = \rho_в g(V_з + V_c)$, де $V_з, V_c$ – відповідно об'єм золота і срібла у злитку, одержимо: $V_з + V_c = \frac{F_A}{\rho_в g}$. Вага злитка у повітрі $P = (m_з + m_c)g = (\rho_з V_з + \rho_c V_c)g$. Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно

V_c і $V_з$, одержимо: $V_c = \dfrac{P(\rho_з - \rho_в) - P_в\rho_з}{g(\rho_з - \rho_c)\rho_в}$. Маса срібла $m_c = \rho_c V_c$. Маса золота $m_з = m - m_c = \dfrac{P}{g} - m_c$.

100. Два циліндри – алюмінієвий і дерев'яний – з'єднані між собою основами. Яка довжина алюмінієвого циліндра, якщо при плаванні у воді вони займають вертикальне положення, причому дерев'яний виступає над водою на Δl=2,9 см? Довжина дерев'яного бруска l=20 см, площі основ однакові. Густина води $\rho_в$=1 г/см^3, дерева $\rho_д$=0,6 г/см^3, алюмінію ρ_a =2,7 г/см^3. (2004 р. з. 8 к.)



Розв'язок

З умови плавання: $lS\rho_д g + l_a S\rho_a g = \rho_в(l - \Delta l)Sg + \rho_в l_a Sg$.

Звідси $l_a = \dfrac{\rho_в(l - \Delta l) - \rho_д l}{\rho_a - \rho_в}$. l_a=3 см.

101. До коромисла зрівноважених рівноплечих терезів підвішено два тягарі рівної маси, але різних об'ємів. Якщо перший тягар занурити у воду, а другий в олію, то рівновага збережеться. У скільки разів відрізняються густини тягарів? Густина води $\rho_в$=1 г/см^3 , олії ρ_o=0,9 г/см^3. (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки після занурення тягарів у рідини рівновага зберігається, то $F_{A1}=F_{A2}$.

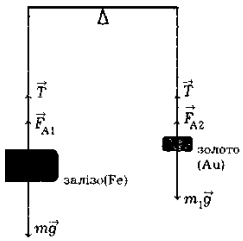
$$\rho_в g\frac{m}{\rho_1} = \rho_0 g\frac{m}{\rho_2},\quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_0}{\rho_в},\quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}9.$$

102. Знайдений на дні водоймища золотий скарб, водолаз зважив під водою, користуючись терезами із залізними гирями. Його маса становила 643 г. Однак, коли водолаз продавав свою знахідку, то його звинуватили в обмані. Скільки золота реально містив скарб? Густина води $\rho_в$=1 г/см^3, заліза ρ_{Fe}=7,8 г/см^3, золота ρ_{Au}=19,3 г/см^3 (2006 р. з. 9 к.)

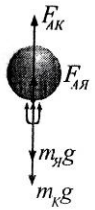
Розв'язок

Умова рівноваги рівноплечих терезів – рівність сил натягу ниток: $mg - \rho_в g\dfrac{m}{\rho_{Fe}} = m_1 g - \rho_в g\dfrac{m_1}{\rho_{Au}}$. Отже,

$$m_1 = m\frac{(\rho_{Fe} - \rho_в)\rho_{Au}}{(\rho_{Au} - \rho_в)\rho_{Fe}} = 590 \text{ г.}$$



103. З дна озера намагаються підняти затонулий сталевий якір масою 780 кг за допомогою пінопластової кулі, яку прикріплюють до якоря легким тросом. При якому мінімальному об'ємі кулі це можливо? Густини сталі, води і пінопласту дорівнюють відповідно 7800 кг/м^3, 1000 кг/м^3 і 150 кг/м^3. (2006 р. з. 8 к.)



Розв'язок

Запишемо умову рівноваги системи якір-куля (вважаймо, що якір піднімається рівномірно): $F_{AK} + F_{AЯ} = m_K g + m_Я g$.

$$\rho_B g(V_K + V_Я) = (\rho_K V_K + m_Я)g \ . \qquad V_K = \frac{m_Я(\rho_Я - \rho_B)}{(\rho_B - \rho_K)\rho_Я} = 0{,}8 \text{ м}^3 .$$

104. В посудині з водою плаває пористий шматок льоду. Рівно половина (за об'ємом) цього «айсберга» знаходиться над водою. Лід виймають з води, при цьому її рівень знизився на 6 см. Знайдіть сумарний об'єм повітряних пустот в шматку льоду, якщо поперечний переріз посудини 200 см^2. Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, густина льоду $\rho_л$=900 кг/м^3. (2007 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

$$m_л = \rho_л\left(V_{айсб} - V_п\right), \qquad V_{вит} = \frac{1}{2}V_{айсб} = S\Delta h \ .$$

З умови плавання: $m_л g = \rho_в g V_{вит}$. Розв'язуючи ці рівняння, отримаємо:

$$V_п = S\Delta h\frac{2\rho_л - \rho_в}{\rho_л} \approx 1066 \text{ см}^3 .$$

105. На дні вертикальної циліндричної посудини радіусом дна R=10 см лежить куля радіусом r=5 см. Густина матеріалу кулі в два рази менша, ніж густина води. Який об'єм води слід налити в посудину, щоб куля перестала чинити тиск на дно? (2007 р. з. 10 к.)

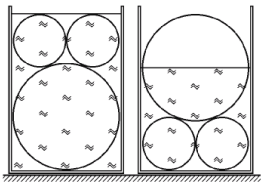
Розв'язок

Коли куля перестає тиснути на дно посудини, на неї діє дві сили, які зрівноважують одна одну: $F_A = F$, де F – сила тяжіння, F_A – виштовхувальна сила. $F_A = \rho_1 g V_1$, де V_1 – об'єм зануреної в рідину частини кулі, ρ_1 – густина води. $F = \rho_2 g V_2$, де V_2 – об'єм всієї кулі, ρ_2 – її густина. Враховуючи, що згідно умови $\rho_1 / \rho_2 = 2$, знаходимо, що $V_1 = \frac{V_2}{2}$. Це означає, що куля занурена у воду наполовину. Іншими словами, висота стовпчика рідини в посудині $h = r$. Після цього об'єм води V, налитої в посудину, визначається суто геометрично: із об'єма циліндра радіусом R і

висотою h віднімається об'єм півкулі радіусом r: $V = \pi R^2 h - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$,

де $h = r$. Звідси $V = \pi r\left(R^2 - \frac{2}{3}r^2\right) = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{м}^3$.

106. Дві однакові маленькі кулі радіусом R_1 і одну велику кулю радіусом R_2=2R_1 вміщують в циліндричну посудину з вертикальними стінками. Радіус посудини дещо більший за радіус великої кулі. Посудину наповнюють рідиною, густина якої ρ_0. Якщо велика куля знаходиться знизу, то вона перестає тиснути на дно, коли рівень рідини повністю покриває маленькі кулі. Якщо велика куля знаходиться зверху, то вона перестає тиснути на маленькі кулі при заповненні посудини до середини великої кулі. Визначте густини куль ρ_1 і ρ_2. Тертям знехтувати. *Примітка.* Об'єм кулі радіусом R дорівнює: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



(2009 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки радіуси кульок зв'язані відношенням $R_2 = 2R_1$, то для об'ємів маємо: $V_2 = 8V_1$. Позначимо густину малих кульок ρ_1, більшої ρ_2. Тоді маси кульок відповідно рівні: $m_1 = \rho_1 V_1$, $m_2 = \rho_2 V_2 = 8\rho_2 V_1$.

Умова того, що більша кулька припиняє тиснути на дно посудини означає, що система всіх трьох кульок починає вільно плавати в рідині, тобто сила тяжіння трьох кульок зрівноважується виштовхувальною силою, що діє на три кульки: $(2m_1 + m_2)g = \rho_0(2V_1 + V_2)g$. Таким чином $\rho_1 + 4\rho_2 = 5\rho_0$.

В другому випадку сказано, що більша кулька припиняє тиснути на менші кульки. Це означає, що більша кулька починає вільно плавати в рідині, тобто сила тяжіння і виштовхувальна сила, що діє на кульку, зрівнюються: $m_2 g = \rho_0 \frac{1}{2} V_2 g$. Таким чином $\rho_2 = 0{,}5\rho_0$ і $\rho_1 = 3\rho_0$.

107. На двох пустотілих кубиках, які плавають у воді, лежить легенька паличка. Розміри ребер кубиків a_1 = 0,1 м і a_2 = 0,2 м, маса кубиків відповідно m_1=50 г і m_2=100 г. Скільки води необхідно налити у один з кубиків, щоб паличка лежала горизонтально? Масою палички і товщиною кубиків знехтувати. Густина води ρ=1000 кг/м^3 (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

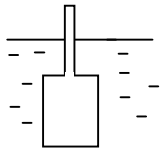
Запишемо умови плавання кубиків: $\rho g a_1^2 h_1 = m_1 g$, $\rho g a_2^2 h_2 = m_2 g$, де h_1 і h_2 –

глибини занурення відповідно першого і другого кубиків, ρ – густина води. Тоді висоти ребер, що виступають над водою:

для першого кубика $h_3 = a_1 - h_1 = a_1 - \dfrac{m_1}{a_1^2 \cdot \rho}$ =0,095 м;

для другого кубика $h_4 = a_2 - h_2 = a_2 - \dfrac{m_2}{a_2^2 \cdot \rho}$ =0,1975 м.

Оскільки $h_4 > h_3$, то воду потрібно долити в другий кубик. Маса цієї води $m = \rho \cdot a_2^2 \cdot \Delta h = \rho a_2^2 (h_4 - h_3)$=4,1 кг.



108. Ареометр – прилад для вимірювання густини рідини складається з двох циліндрів із спільною віссю, нижній з яких завжди занурений в досліджувану рідину, а на верхньому нанесені поділки відповідно до рівня занурення. На малюнку показано ареометр, у якого, при зануренні у воду, над поверхнею залишається рівно половина верхнього циліндра. Знайдіть, в якому діапазоні може вимірювати густину даний ареометр. Циліндри ареометра однакові по висоті, а відношення радіусів n=5. Густина води ρ_0=1000 кг/м^3. (2002 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

При зануренні ареометра у воду $mg = \rho_0 \left(\pi r_2^2 l + \pi r_1^2 \dfrac{l}{2} \right) g$, де l – висота циліндра, r_1, r_2 – їхні радіуси. Якщо ареометр повністю занурюється в досліджувану рідину, то $mg = \rho_{\min} \left(\pi r_2^2 l + \pi r_1^2 l \right) g$.

Якщо верхній циліндр знаходиться над поверхнею рідини, то $mg = \rho_{\max} \pi r_2^2 l \cdot g$. Оскільки ліві частини виразів рівні, то прирівнявши праві частини, отримаємо: $\rho_0 \left(r_2^2 + \dfrac{r_1^2}{2} \right) = \rho_{\min} \left(r_2^2 + r_1^2 \right)$; $\rho_0 \left(r_2^2 + \dfrac{r_1^2}{2} \right) = \rho_{\max} r_2^2$.

Оскільки $r_2 = 5r_1$, то $\rho_{\min} = \dfrac{51}{52} \rho_0 \approx 981 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\rho_{\max} = \dfrac{51}{50} \rho_0 \approx 1020 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

109. У посудину налили V_0=0,2 л води. Якщо в посудину помістити пінопластову пластинку об'ємом V = 50 см^3 і зверху на неї насипати цукор масою m, то вона зануриться у воду на 2/3 свого об'єму. Якщо весь цукор розчинити у воді, то пластинка зануриться у воду на 1/6 свого об'єму. Визначте масу цукру m, масу пластинки M і густину ρ одержаного цукрового сиропу. Вважати, що при розчиненні цукру об'єм рідини практично не змінюється. Густина води ρ_0=1000 кг/м^3. (2009 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Умови плавання пінопластової пластинки, "навантаженої" цукром: $(M+m)g=\frac{2}{3}\rho_0 Vg$ (1). При розчиненні цукру у воді одержимо цукровий розчин з густиною $\rho=\frac{M_0+m}{V_0}=\rho_0+\frac{m}{V_0}$ (2), де $M_0=\rho_0 V_0$ – маса води в посудині. Умова плавання пінопластової пластинки в цукровому розчині: $Mg=\frac{1}{6}\rho Vg$. З умов плавання пластинки запишемо: $m=\left(\frac{2}{3}\rho_0-\frac{1}{6}\rho\right)V$ (3).

Підставимо (3) в (2) і знайдемо густину цукрового розчину:

$\rho=\rho_0\frac{6V_0+4V}{6V_0+V}=1{,}12\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Тоді маса пластинки $M=\frac{1}{6}\rho V\approx 9{,}3$ г, маса цукру $m=(\rho-\rho_0)V_0=24$ г.

110. На корабель за допомогою батискафа піднімають з дна золоті скарби. Батискаф може занурюватися тільки з додатковим баластом. Баласт прикріплюють до нього зовні. На кораблі є m_c = 30 тонн свинцевого баласту. Опустившись на дно, батискаф прикріплює зовні скарб, скидає баласт і підіймається під дією виштовхувальної сили. Яку максимальну кількість $m_з$ золота можна підняти з дна, використавши весь баласт? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, свинцю ρ_c=11300 кг/м^3, золота $\rho_з$ = 19300 кг/м^3. Батискаф не має двигуна. (2015 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Хай всього відбувається N занурень. Маса батискафа (без баласту і вантажу) M, а виштовхувальна сила, діюча на нього F_A. Кожного разу батискаф занурюється з баластом масою $\frac{m_c}{N}$ і об'ємом $\frac{m_c}{\rho\cdot N}$. При цьому батискаф зможе зануритися, якщо сумарна сила тяжіння, що діє на батискаф і баласт більша за сумарну виштовхувальну силу: $Mg+\frac{m_c}{N}>F_A+\rho_в g\frac{m_c}{\rho_c\cdot N}$ (1).

Аналогічно, він зможе спливти із золотом масою $\frac{m_з}{N}$, якщо сумарна сила тяжіння менша за виштовхувальну силу: $Mg+\frac{m_з}{N}<F_A+\rho_в g\frac{m_з}{\rho_з\cdot N}$ (2). З

рівнянь (1) і (2): $m_c - \rho_в \frac{m_c}{\rho_c} > m_з - \rho_в \frac{m_з}{\rho_з}$. Звідси $m_з < m_c \frac{1-\frac{\rho_в}{\rho_c}}{1-\frac{\rho_в}{\rho_з}}$ ≈28,8 тонн.

111. У калориметрі плаває куб, складений з двох однакових половинок. Нижня половинка з льоду ($\rho_л$=0,9$\rho_в$) верхня – пінопластова ($\rho_п$=0,5$\rho_в$). Ребро куба d=8 см. На яку глибину зануриться пінопластова половинка після танення льоду? На скільки при цьому зміниться відстань між верхнім ребром пінопластової пластинки і дном калориметра? (2003 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

До танення льоду умова плавання куба запишеться так: $mg = \rho_в g V_з$, або

$\rho_л g S \frac{d}{2} + \rho_п g S \frac{d}{2} = \rho_в g S h_{з1}$. Звідси $h_{з1} = \frac{d(\rho_л + \rho_п)}{2\rho_в} = \frac{d \cdot 1{,}4\rho_в}{2\rho_в} = 0{,}7d$. Над водою буде частина кубика висотою h_1=0,3d.

Після танення льоду рівень води в калориметрі не зміниться.

Умова плавання запишеться: $\rho_п g S \frac{d}{2} = \rho_в g S h_{з2}$. Пінопластова частина кубика буде занурена на глибину $h_{з2} = \frac{d\rho_п}{2\rho_в} = \frac{d}{4} = 0{,}25d$ = 2 см. Над водою буде частина пінопластової пластинки висотою h_2=0,25d. Оскільки рівень води той самий, то відстань до дна зміниться на $\Delta h = h_1 - h_2 = 0{,}05d = 0{,}4$ см .

112. Крижаний кубик із вмерзлим у нього камінчиком опустили в циліндричну посудину з водою. Рівень води в посудині підвищився на Δh=4 см, а кубик став плавати, повністю поринувши у воду. У скільки разів об'єм камінчика V_2 менший за об'єм льоду V_1? Як і на скільки зміниться рівень води відносно початкового стану, коли весь лід розтане? Густина льоду ρ_1=900 кг/м^3, камінчика ρ_2=2700 кг/м^3, води ρ=1000 кг/м^3. (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Умова плавання кубика з каменем у воді при його повному зануренні: $(m_1+m_2)g=\rho(V_1+V_2)g$, де $m_1=\rho_1 V_1$, $m_2=\rho_2 V_2$. Тоді $\rho_1 V_1+\rho_2 V_2=\rho(V_1+V_2)$.

Розділивши цей вираз почленно на V_2, знаходимо відношення об'ємів льоду і камінця: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1} = \frac{2700-1000}{1000-900} = 17$ (1).

Отже, об'єм камінця в 17 разів менший за об'єм льоду.

Початкове підвищення рівня на Δh обумовлено виштовхуванням води при занурені льоду і камінця: $V_1+V_2=\Delta h \cdot S$ (2), де S – площа дна посудини. Коли лід розтає, то об'єм отриманої з нього води V_{1B} буде меншим, ніж об'єм

льоду V_1 із-за різниці густини води і льоду ρ і ρ_1. Так як маса при цьому не міняється, то $\rho_1 V_1 = \rho V_{1B}$ (3), або $V_{1B} = V_1 \dfrac{\rho_1}{\rho}$. Після танення льоду висота рівня води буде перевищувати початкове значення на Δh_1, яке визначається об'ємом камінця і отриманої води: $V_{1B} + V_2 = \Delta h_1 \cdot S$ (4).

Розділивши (4) на (2), отримаємо: $\Delta h_1 = \Delta h \cdot \dfrac{V_{1B} + V_2}{V_1 + V_2}$. Поділивши чисельник та знаменник останнього дробу на V_2, з врахуванням (3) знайдемо:

$\Delta h_1 = \Delta h \cdot \dfrac{\dfrac{\rho_1 V_1}{\rho V_2} + 1}{\dfrac{V_1}{V_2} + 1}$. Підставивши сюди відношення об'ємів і дані з умови задачі, отримаємо: Δh_1=3,6 см. Отже рівень води після танення льоду понизився на $\Delta h - \Delta h_1$=4–3,6=0,4 см від рівня води з льодом і камінцем або піднявся на Δh_1=3,6 см відносно початкового рівня води в посудині.

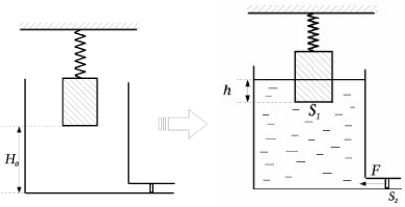
113. Крижаний кубик з повітряними бульбашками акуратно поклали в посудину, доверху заповнену водою. Частина води вилилася через край, і верхня грань кубика, паралельна поверхні води, стала виступати над нею на висоту h=2 см. Який об'єм води V_1 вилився з посудини відразу після опускання кубика? Який об'єм води V_2 додатково витече з посудини до того часу, коли кубик повністю розтане? (Густина води ρ_0=1000 кг/м^3, середня густина кубика ρ_1=800 кг/м^3). (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Об'єм V_1 води рівний об'єму зануреної в неї частини кубика. На кубик діє сила тяжіння і виштовхувальна сила: $F_m = \rho_1 a^3 g$; $F_A = \rho_0 g a^2 (a - h)$, де a– довжина ребра кубика. В рівновазі $F_m = F_A$, звідси $a = h \dfrac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1}$. Шуканий об'єм $V_1 = a^2 (a - h) = h^3 \dfrac{\dfrac{\rho_1}{\rho_0}}{\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_0}\right)^3} = 800$ см^3.

З закону Архімеда слідує, що кількість води, яка утворюється під час танення кубика, дорівнює кількості витісненої ним води. Тому вода із посудини витікати не буде, тобто $V_2 = 0$.

114. До посудини біля дна підведена тонка труба площею перерізу S_2, закрита рухомим поршнем. У посудині знаходиться циліндр з площею перерізу S_1. Циліндр за верхню основу підвішений за допомогою пружини жорсткістю k до стелі. Нижня основа при цьому знаходиться на висоті H_0 від дна посудини. У посудину наливають воду так, що поршень в трубі доводиться утримувати з деякою силою F. Знайти цю силу, якщо глибина занурення нижньої основи циліндра h. (2010 р. III е. 9 к.)



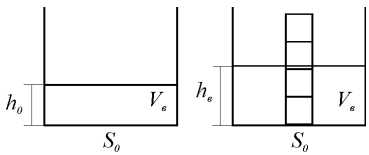
Розв'язок

Позначимо масу циліндра m. Нехай, коли води в посудині немає, розтяг пружини x_1. Тоді $kx_1 = mg$. Після того як в посудину налили воду, нехай розтяг пружини x_2. Тоді $kx_2 = mg - F_A$, або $k(x_1 - x_2) = F_A$, $k\Delta x = F_A$, де $F_A = \rho g S_1 h$. Циліндр був на висоті H_0, а після наливання води піднявся на відстань Δx, бо настільки змістилась пружина. Тоді тиск на дні посудини біля поршня $p = \dfrac{F}{S_2} = \rho g(h + \Delta x + H_0)$. $F = \rho g S_2\left(h + \dfrac{\rho g S_1 h}{k} + H_0\right)$.

115. В посудині, площа дна якої S_0=10 см^2, знаходиться вода. Висота її рівня h_0=1,5 см. На воду кладуть дерев'яний кубик, на нього другий і т. д. Скільки кубиків потрібно так покласти в стовпчик, щоб нижній торкнувся дна посудини? Всі кубики однакові, висота одного a=10 мм, густина дерева 0,4 г/см^3, води 1 г/см^3. Вода з посудини не виливається. (2012 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Об'єм води в посудині $V_в = S_0 \cdot h_0$. Після занурення кубиків у воду $V_в = (S_0 - a^2) \cdot h_в$ і він такий самий як і в першому випадку. Отже, рівень води став $h_в = \dfrac{10}{9} \cdot h_0$. Умова, за якої N кубиків торкнуться дна посудини (з умови плавання тіл):



$m_{куб} \cdot g \cdot N > F_A$; $m_{куб} \cdot g \cdot N > \rho_в \cdot g \cdot a^2 \cdot h_в$; $\rho_{дерева} \cdot a^3 \cdot g \cdot N > \rho_в \cdot g \cdot a^2 \cdot h_в$.

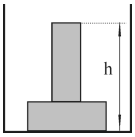
$N > \dfrac{\rho_в \cdot h_в}{\rho_{дерева} \cdot a} \approx 4{,}17$. N=5 кубиків.

116. У рідині з постійною швидкістю повільно опускається кулька радіуса R і маси m. Яку масу повинна мати кулька того ж радіуса, щоб підніматись з такою ж швидкістю? Густина рідини ρ. (2006 р. II е. 8 к.)

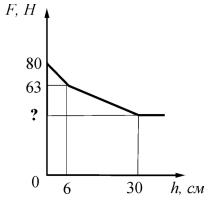
Розв'язок

Законом Архімеда користуються тільки для нерухомої рідини (у рухомій рідині відбувається зміна статичного тиску в рідині залежно від швидкості її руху, а сила Архімеда – це сума сил статичного тиску, що діють на тіло). Вважаймо, що кулька рухається так повільно, що можна користуватись законом Архімеда. Розглянемо умови рівномірного руху кульки. Сила опору кульки в обох випадках однакова тому, що форма, розміри і швидкість однакові: $mg = F_A + F_{оп}$ (1). $F_A = m_1 g + F_{оп.}$ (2). Розв'яжемо систему рівнянь (1) та (2):

$mg - F_A = F_A - m_1 g$. Звідси $m_1 = \dfrac{2F_A}{g} - m = 2\rho\dfrac{4}{3}\pi R^3 - m$. $m_1 = \dfrac{8\rho\pi R^3}{3} - m$.



117. Дві однакові шорсткі цеглини поклали на дно акваріума так, як показано на малюнку. Після того як в акваріум почали наливати воду, сила тиску цеглин на дно акваріума залежно від висоти рівня води, налитої в акваріум, змінювалася за законом, відображеним на графіку. Визначити довжини ребер цеглини і густину матеріалу, з якого вони виготовлені. Якому значенню сили відповідає поділка на осі *F*, проти якої стоїть знак питання? (2006 р. III е. 8 к.)

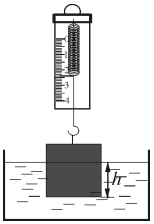


Розв'язок

Спочатку води в акваріумі немає. $F_1 = 2mg = 2\rho_ц V_ц g$; $F_1 = 80$ Н. Сила тиску на дно зазнавала нелінійної зміни в точках *h*=6 см, *h*=30 см, тому довжина одного ребра *a*=6 см, другого *b*=24 см. Оскільки цеглини шорсткі, то вода під них затікає і на цеглини діятиме виштовхувальна сила. Зменшення сили тиску відбувається завдяки виштовхувальній силі $F_{A1} = F_1 - F_2 = 17$ Н. $F_{A1} = \rho_в g V_ц$. Звідси

$V_ц = \dfrac{F_{A1}}{\rho_в g} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\,м^3$. Тоді третє ребро $c = \dfrac{V_ц}{a \cdot b} = 0{,}118$ м ≈ 12 см.

$\rho_ц = \dfrac{F_1}{2V_ц \cdot g} = 2{,}35 \cdot 10^3\,\dfrac{кг}{м^3}$. На одну цеглину діє F_{A1}=17 Н. На дві цеглини – F_{A2}=34 Н. Тому поділка на осі *F* відповідає значенню сили 80–34=46 Н.



118. Експериментатор проводив дослід по зануренню кубика, виготовленого з невідомого матеріалу в рідину, густина якої теж невідома. В таблицю він заніс покази динамометра, які відповідають різним глибинам занурення кубика. Деякі значення він забув занести в таблицю. За результатами вимірювань визначте густину кубика та густину рідини. (2016 р. III е. 9 к.)

h, см	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, Н	8,74	8,09					4,84	4,19	3,93	3,93

Розв'язок

Маса кубика $m = \frac{F(0)}{g}$ =0,874 кг. (Кубик ще не занурений і динамометр показує вагу кубика в повітрі). З таблиці бачимо, що при зануренні кубика від 0 до 1 см, сила змінилася на 8,74 Н – 8,09 Н = 0,65 Н. При зануренні кубика від 6 см до 7 см сила теж змінилася на 0,65 Н. В ці моменти кубик ще не був занурений повністю. Залежність сили F від глибини h занурення лінійна: $F=mg-\rho_p gSh$. При зануренні від 8 см до 9 см сила не міняється, отже кубик занурений вже повністю. Тобто повне занурення відбулося від 7 см до 8 см. Знайдемо його. Можна побудувати графік і визначити точку повного занурення. Або від 7 см до повного занурення сила змінилася на 4,19 Н – 3,93 Н = 0,26 Н. З лінійної залежності випливає, що $\frac{0{,}65\ \text{Н}}{0{,}26\ \text{Н}} = \frac{1\ \text{см}}{h_x}$. h_x=0,4 см.

Довжина ребра кубика a =7,4 см. Густина кубика $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} \approx 2{,}2$ г/см^3.

Коли кубик занурений повністю, виштовхувальна сила діє на весь кубик:

$\rho_p gV = mg - F(8)$=8,74 Н – 3,93 Н = 4,81 Н. Тоді $\rho_p = \frac{mg - F(8)}{ga^3} \approx 1{,}2$ г/см^3.

Механічна робота. Потужність. Закон збереження механічної енергії

119. Уламок античної мармурової скульптури об'ємом 0,2 м^3 рівномірно піднімають з водоймища, глибина якого 2 м. Яка мінімальна потужність механізму, якщо підйом здійснювався протягом 40 с? (2008 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

$N = \frac{A}{t}$, $A = F \cdot S$. На скульптуру діють сила тяжіння і виштовхувальна сила:

$F = mg - \rho_в gV = \rho_м gV - \rho_в gV$. Тоді $N = \frac{gV(\rho_м - \rho_в)\cdot S}{t}$. Підставивши дані отримаємо: $N = 170$ Вт .

120. Час проходження одного кола траси в змаганнях "Формула-1" першим спортсменом t_1=120 с, другим – t_2=123 с. Після 21 кола у першого автомобіля відбулася поломка, внаслідок чого його потужність зменшилася на 15 %, а сила тяги – на 10 %. Який з автомобілів на фініші буде першим, якщо кожен з них повинен проїхати 36 кіл. Вважати рухи автомобілів на окремих ділянках

рівномірними, а зміну швидкості під час поломки першого автомобіля миттєвою. (2005 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Час проходження траси другим спортсменом t_3=123·36=4428 с.

Час проходження першим спортсменом 21 кола t_4=120·21=2520 с.

До поломки швидкість першого автомобіля $\upsilon_1 = \frac{N_1}{F_1}$. Після поломки швидкість першого автомобіля $\upsilon = \frac{N}{F} = \frac{0{,}85N_1}{0{,}9F_1} = \frac{0{,}85}{0{,}9}\upsilon_1$. Нехай t_5 – час, за який цей автомобіль пройде 15 кіл, що залишилися. Тоді $\frac{t_4 \cdot \upsilon_1}{21} = \frac{t_5 \cdot \upsilon}{15} = \frac{t_5 \cdot 0{,}85\upsilon_1}{0{,}9 \cdot 15}$. t_5=1905,88 с. Весь час t=4425,88 с. Отже, гонку виграє перший автомобіль.

121. З колодязя глибиною H=20 м дістають воду відром. Внизу відро заповнюється водою до країв. Внаслідок витікання через щілину в дні при підніманні відра частина води виливається назад у колодязь. Відро піднімається рівномірно. Швидкість витікання води стала. Визначте роботу з піднімання відра, якщо до кінця піднімання у відрі залишалося 2/3 початкової кількості води. Маса порожнього відра m=2 кг, його об'єм V=15 л. (2005 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Сила, що прикладається при підніманні відра: $F = mg+\rho gV$.

Її максимальне значення у нижній точці, мінімальне – у верхній.

$F_{\max} = mg + \rho gV$, $F_{\min} = mg + \frac{2}{3}\rho gV$.

Оскільки вода витікає рівномірно, відро підніматиметься рівномірно, то роботу можна розрахувати через середню силу: $F_c = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}$.

$$A = F_c \cdot H = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} \cdot H = \left(m + \frac{\rho V\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{2} \right) gH \approx 2900 \text{ Дж} = 2{,}9 \text{ кДж}.$$

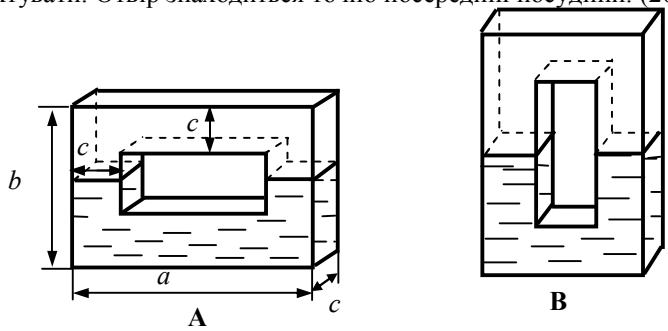
122. У воді плаває шматок льоду з площею поперечного перерізу S=2 м^2 і висотою H=20 см. Яку роботу необхідно виконати, щоб повністю занурити лід у воду? Густина води $\rho_в$=1000 кг/м^3, льоду $\rho_л$=900 кг/м^3. (2003 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Висоту частини шматка льоду, яка виступає над водою, знайдемо із

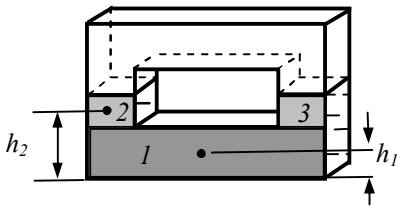
співвідношення: $mg = F_A = \rho_в gS(H - h_0) \Rightarrow h_0 = \dfrac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в} H$. По мірі занурення виштовхувальна сила зростає, тому слід прикладати більшу силу, максимальне значення якої: $F_{\max} = gSH(\rho_в - \rho_л)$. Робота змінної сили: $A = F_{сер} \cdot h_0 = \dfrac{F_{\max} \cdot h_0}{2} = \dfrac{gSH^2(\rho_в - \rho_л)^2}{2\rho_в}$. Після підстановки A= 4 Дж.

123. Яку мінімальну роботу слід виконати, щоб до половини заповнену водою посудину перевести з положення А в положення В? Масою посудини знехтувати. Отвір знаходиться точно посередині посудини. (2003 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Якщо посудину перевертати дуже повільно, то виконувана робота в цьому випадку буде мінімальною і дорівнюватиме збільшенню потенціальної енергії води. Знайдемо потенціальну енергію води в першому випадку. Розіб'ємо нашу воду на три частини і знайдемо їхні потенціальні енергії відносно нижнього рівня (рівня стола).



Об'єм першої частини води $V_1 = ac^2$. Об'єм другої частини води $V_2 = c^2 \cdot \dfrac{b - 2c}{2}$. Об'єм другої і третьої разом $V_{2,3} = c^2 b - 2c^3$. Висота $h_1 = \dfrac{c}{2}$. Висота $h_2 = c + \dfrac{b - 2c}{4} = \dfrac{2c + b}{4}$. Тоді потенціальна енергія всієї води у випадку А: $E_{п1} = \rho g(V_1 \cdot h_1 + V_{2,3} \cdot h_2)$. $E_{п1} = \rho g\left(\dfrac{ac^3}{2} + \dfrac{2c^3 b + c^2 b^2 - 4c^4 - 2bc^3}{4}\right)$.

Коли посудину перевернути, то сторони a і b поміняються місцями. По аналогії можна записати: $E_{n2} = \rho g\left(\frac{bc^3}{2} + \frac{2c^3a + c^2a^2 - 4c^4 - 2ac^3}{4}\right)$.

Зміна потенціальної енергії $\Delta E_n = E_{n2} - E_{n1}$.

$$\Delta E_n = \frac{\rho g c^2}{4}\left(2bc + 2ca + a^2 - 4c^2 - 2ac - 2ac - 2cbb^2 + 4c^2 + 2bc\right).$$

$$\Delta E_n = \frac{\rho g c^2}{4}\left(2bc + a^2 - 2ac - b^2\right).$$

Після перетворень $A = \frac{\rho g c^2}{4}(a-b)(a+b-2c)$.

124. У неглибокій канаві з водою лежить труба, заповнена водою. Лівий кінець труби щільно закритий, а правий відкритий. Трубу піднімають за лівий кінець до вертикального положення так, що правий кінець залишається у воді. Яка робота виконується під час підняття труби при наступних даних: маса труби (без води) 20 кг, довжина труби 20 м, площа поперечного перерізу труби 0,01 м^2? Атмосферний тиск p_0=10^5 Па. (2013 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Робота йде на зміну потенціальної енергії труби і зміну потенціальної енергії води, що знаходиться в трубі. Центр тяжіння труби піднімається на висоту $\frac{l_T}{2}$, тому потенціальна енергія збільшиться на $\frac{1}{2}m_T g l_T$, де m_T – маса труби, а l_T – її довжина. При підніманні труби вода частково витікатиме з неї. Коли труба займе вертикальне положення, висота рівня води $h_в$ буде такою, що тиск стовпа рідини (води) дорівнюватиме атмосферному тиску: $p_A = \rho_в g h_в$.

Звідси маємо: $h_в = \frac{p_A}{\rho_в g} = \frac{p_0}{\rho_в g}$. Маса піднятої води $m_в = \rho_в S_T h_в$. Центр тяжіння піднятої води знаходиться на висоті $\frac{h_в}{2}$, тому зміна потенціальної енергії води $\Delta E_n = \frac{1}{2}m_в g h_в = \frac{1}{2}\rho_в g S_T \cdot \frac{p_0^2}{\rho_в^2 g^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{S_T \cdot p_0^2}{\rho_в g}$. Повна робота рівна сумі зміни потенціальних енергій, тобто $A = \frac{1}{2}m_T g l_T + \frac{1}{2}\frac{S_T \cdot p_0^2}{\rho_в g}$. Після підстановки $A = 7000$ Дж.

Прості механізми. Коефіцієнт корисної дії механізмів

125. Хлопчик зрівноважив горизонтально важіль так, що точка обертання знаходиться на відстані 30 см і 70 см від його кінців. В розпорядженні хлопчика було 20 тягарців вагою по 1 Н. По скільки тягарців хлопчик підвісив до кінців важеля, якщо для досягнення рівноваги він використав усі тягарці? Масу важеля не враховувати. (2014 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Позначимо ліве плече l_1=0,3 м, а праве l_2=0,7 м. Нехай вага тягарців, підвішених до лівого краю F_1, тоді вага тягарців, підвішених до правого краю F_2=20 Н–F_1. Запишемо правило моментів: $\frac{F_1}{20-F_1}=\frac{l_2}{l_1}$. $\frac{F_1}{20-F_1}=\frac{0,7}{0,3}$.

Звідси F_1=14 Н, F_2=6 Н. Отже до лівого краю потрібно підвісити 14 тягарців по 1 Н, а до правого 6 тягарців по 1 Н.

126. Зважуючи на нерівноплечому невагомому важелі хлопчик встановив, що якщо кавун на лівому плечі, то маса гир для зрівноваження 4 кг, а коли він на правому плечі – маса гир 2,5 кг. Яка справжня маса кавуна? (2003 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

З умови рівноваги важеля для двох випадків:

$\frac{mg}{m_1 g}=\frac{l_2}{l_1}$, $\frac{m_2 g}{mg}=\frac{l_2}{l_1}$, звідки $\frac{m}{m_1}=\frac{m_2}{m}$. Тоді $m=\sqrt{m_1 m_2}\approx 3,2$ кг .

127. Продавець пропонує придбати рибу, дозволяючи покупцю самостійно її зважити на нерівноплечих терезах, виготовлених з палиці, шальок та мотузки з використанням набору гир. Причому дозволяється:

- класти рибу лише на ліву шальку терезів;
- проводити процес зважування (досягаючи рівноваги шальок підкладанням гир), при цьому не знімаючи рибу з лівої шальки, не більше двох разів.

Чи можливо за таких умов визначити справжню масу риби? «Палиця-терези» з шальками початково займають горизонтальне положення (2004 р. ІІ е. 8 к.)

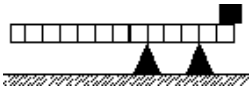
Розв'язок

Один з можливих розв'язків такий: Підвісити рибу на ліву чашку і зрівноважити терези, поклавши на праву чашку гирі масою m_1. З рівноваги терезів (важеля) $m_p g l_1 = m_1 g l_2$, де l_1 і l_2 - довжини плеч терезів-важеля, довжина яких є невідомою. Покласти на ліву чашку до риби гирю відомої маси m_2 і знову зрівноважити терези, поклавши на праву чашку гирю масою m_3. Рівновага за цих умов запишеться так: $(m_p+m_2)gl_1=(m_1+m_3)gl_2$.

Поділивши рівності, отримаємо: $\frac{m_p}{m_p+m_2}=\frac{m_1}{m_1+m_3}$, звідки $m_p=\frac{m_1 m_2}{m_3}$.

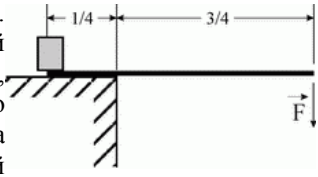
128. Лінійка масою 50 г лежить на двох опорах, як показано на малюнку. На її краю лежить тягарець. Визначити, якою може бути маса тягарця, щоб лінійка з тягарцем перебували у стані рівноваги. (2006 р. з. 8 к.)

Розв'язок



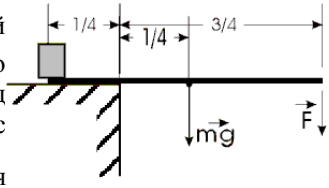
Якщо тягарець занадто легкий, то лінійка буде обертатися навколо лівої точки опори. Запишемо умову рівноваги важеля: $m_л g \cdot 1{,}5l = m_m g \cdot 5l$; $1{,}5 \cdot m_л = 5 \cdot m_m$; $m_m = 15$ г. Якщо тягарець занадто важкий, то лінійка буде обертатися навколо правої точки опори. Запишемо умову рівноваги важеля: $m_л g \cdot 4{,}5l = m_m g \cdot 2l$; $4{,}5 \cdot m_л = 2 \cdot m_m$; $m_m = 112{,}5$ г. Отже, маса тягарця може бути від 15 г до 112,5 г, інакше лінійка перевернеться або в одну, або в іншу сторону.

129. На платформі стоїть масивний куб. Підсунувши під куб плоский лом, виступаючий за край платформи на три чверті своєї довжини, і приклавши вертикально вниз до протилежного кінця лома силу F, куб піднімають. Маса лома m. Знайдіть масу лома тієї ж довжини, який піднімав би куб тільки за рахунок власної ваги. (2007 р. з. 8 к.)



Розв'язок

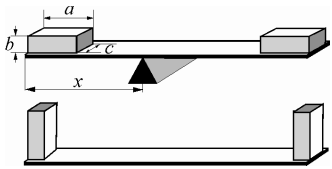
Запишемо правило моментів:



$M_1 = M_2 + M_3$, де M_1 - момент, створений кубом, а M_2 і M_3 ломом та силою F. Потрібно відмітити, що розв'язок задачі не залежить від конкретного місцезнаходження центра мас куба відносно лома. $M_1 = mg \cdot \frac{l}{4} + F \cdot 3\frac{l}{4}$, Для другого лома $M_1 = m'g \cdot \frac{l}{4}$. Тоді: $m'g \cdot \frac{l}{4} = mg \cdot \frac{l}{4} + F \cdot 3\frac{l}{4}$. $m'g = mg + 3F$.

$m' = m + 3\frac{F}{g}$.

130. На краю невагомої дошки довжиною l=1 м поклали, як показано на малюнку, два бруски однакової форми і розмірів, але виготовлені з матеріалів різної густини. Кожен брусок має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри якого $a \times b \times c$ (a=30 см, b=10 см, c=15 см). Дошку зрівноважили на опорі, розміщеній на відстані



x=40 см від лівого краю дошки. Потім бруски розвернули і розмістили на дошці так, як показано на іншому малюнку. Де потрібно розмістити опору, щоб дошка знову знаходилася в рівновазі? (2010 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

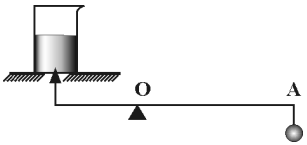
Позначимо масу лівого бруска m_1, правого m_2, а відстань від лівого краю дошки до точки опори y. Тоді умова рівноваги для першого випадку:

$m_1\left(x-\frac{a}{2}\right)=m_2\left(l-x-\frac{a}{2}\right)$ (1) . Умова рівноваги для другого випадку:

$m_1\left(y-\frac{b}{2}\right)=m_2\left(l-y-\frac{b}{2}\right)$ (2). Після підстановки значень в рівняння (1):

$0{,}25m_1=0{,}45m_2$ або $m_1=\frac{9}{5}m_2$. Після підстановки значень в рівняння (2):

$\frac{9}{5}(y-0{,}05)=1-y-0{,}05$, y=0,12 м.



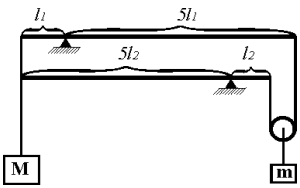
131. Круглий отвір у дні посудини закрито корком конічної форми, який знаходиться на кінці важеля, що може обертатися у точці О. Корок утримується тягарем, підвішеним у точці А на другому кінці важеля. Вода починає підтікати з-під корка, коли рівень води у посудині перевищує h=40 см. До якого рівня можна налити воду у посудину, якщо до важеля підвісити додатковий тягар удвічі меншої маси посередині плеча ОА? (2005 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Запишемо умову рівноваги важеля для двох випадків:

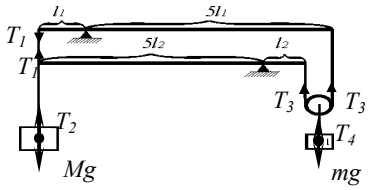
1. $\rho ghSl_1=mgl_2$; 2. $\rho gh_xSl_1=mgl_2+\frac{m}{2}g\frac{l_2}{2}$, де S – площа посудини, l_1 – плече сили тиску води, l_2 – плече ОА, m – масса тягаря, h_x – шуканий рівень води в посудині..

З цих двох рівнянь отримуємо $\frac{h_x}{h}=1+\frac{1}{4}$; $h_x=\frac{5}{4}h=50$ см.



132. Ліві кінці важелів з довжинами плеч l_1, $5l_1$ *і* $5l_2$, l_2 відповідно з'єднані ниткою, до якої підвішено вантаж масою M. До їхніх правих кінців за допомогою нитки підвішено рухомий блок з вантажем масою m=1 кг. Система знаходиться в рівновазі. Вважаючи, що важіль та блок невагомі, визначити M. (2005 р. III е. 9 к.)

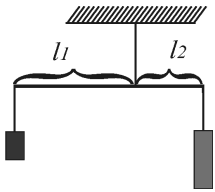
Розв'язок



Позначимо сили натягу ниток через T_1, T_2, T_3, T_4. Умови рівноваги для верхнього і нижнього важеля запишуться так: $T_1l_1=T_3\cdot 5l_1$; $(T_2-T_1)\cdot 5l_2=T_3l_2$. Оскільки блоки і вантажі знаходяться у рівновазі, то можна записати: $Mg=T_2$, $mg=T_4=2T_3$. З даних рівнянь визначимо M.

$$T_1=\frac{5}{2}mg\ ;\ (Mg-\frac{5}{2}mg)\cdot 5=\frac{mg}{2}\ ;\quad 5Mg=13mg;\quad M=\frac{13}{5}m=2{,}6\text{ кг}\ .$$

133. Два тіла з міді та алюмінію зрівноважені на невагомому нерівноплечому важелі, причому $l_1=2l_2$. Після того, як тіла занурили у невідому рідину, для збереження рівноваги їх поміняли місцями. Визначити густину невідомої рідини. ρ_a=2,7 г/см^3, $\rho_м$=8,9 г/см^3. (2006 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Умова рівноваги важеля: $m_1gl_1=m_2gl_2$; $2\rho_1V_1l_2=\rho_2V_2l_2$; $2\rho_1V_1=\rho_2V_2$ (1).

Після занурення в рідину і заміни тіл місцями:

$(m_2g-\rho V_2g)l_1=(m_1g-\rho V_1g)l_2$; $(\rho_2V_2-\rho V_2)\cdot 2l_2=(\rho_1V_1-\rho V_1)l_2$;

$V_1(\rho_1-\rho)=2V_2(\rho_2-\rho)$ (2).

Поділивши друге рівняння на перше, одержимо: $\dfrac{\rho_1-\rho}{2\rho_1}=\dfrac{2(\rho_2-\rho)}{\rho_2}$.

$\rho_1\rho_2-\rho\rho_2=4\rho_1\rho_2-4\rho_1\rho$. Звідси $\rho=\dfrac{3\rho_1\rho_2}{4\rho_1-\rho_2}$.

Оскільки не відомо де саме підвісити мідне, а де алюмінієве тіло то можливі два розв'язки ρ=2,19 г/см^3 або ρ=37,94 г/см^3. Оскільки найбільша густина у ртуті (13,6 г/см^3), то очевидно, що другий розв'язок нереальний.

134. На один кінець легенького стрижня довжиною 20 см нанизано намистину із слонової кістки (густина ρ_1=2 г/см^3). На відстані 3 см від іншого кінця розміщена друга намистинка. Середина стрижня підвішена до нитки і стрижень займає горизонтальне положення у повітрі. Якщо систему опустити у воду, то для збереження рівноваги другу намистину необхідно перемістити на кінець стрижня. Яка густина другої намистини? Густина води $\rho_в$=1 г/см^3. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Умова рівноваги в повітрі: $m_1 g\dfrac{l}{2} = m_2 g\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$. Але $m_1 = \rho_1 V_1$, а $m_2 = \rho_2 V_2$, то відношення об'ємів кульок: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\rho_1 l}{\rho_2 (l - 2x)}$ (1). Умова рівноваги у воді: $(m_1 g - F_{A1})\dfrac{l}{2} = (m_2 g - F_{A2})\dfrac{l}{2}$. Відношення об'ємів кульок $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\rho_1 - \rho_в}{\rho_2 - \rho_в}$ (2). Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), отримаємо:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 \rho_в l}{\rho_в (l - 2x) + 2\rho_1 x} = 1{,}53\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

135. На кінцях легенького стрижня довжиною l=20 см закріплено дві кульки зі свинцю та алюмінію. Стрижень шарнірно закріплено посередині й опущено у воду, де він перебуває в рівновазі. На яку відстань треба пересунути по стрижню другу кульку, щоб рівновага відновилася в повітрі? Густина свинцю ρ_1=8,9 г/см^3 , алюмінію ρ_2=2,7 г/см^3, води ρ_0=1 г/см^3 (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

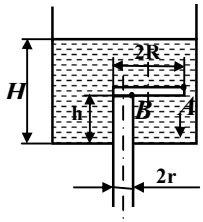
Запишемо умову рівноваги стрижня у воді:

$$(\rho_1 g V_1 - \rho_0 g V_1)\frac{l}{2} = (\rho_2 g V_2 - \rho_0 g V_2)\frac{l}{2} \quad (1);$$

у повітрі: $\rho_1 g V_1 \dfrac{l}{2} = \rho_2 g V_2\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$ (2), де V_1, V_2 – об'єми кульок.

Визначивши з першого рівняння $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0}$, і підставивши в друге рівняння, дістанемо: $x = \dfrac{l\rho_0(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_2(\rho_1 - \rho_0)} \approx 3{,}1$ см.

136. Із посудини, заповненої водою виходить трубка радіусом r і висотою h. Трубка закрита круглою пластиною радіусом R і масою M, яку притискує до трубки вода. З якою силою F треба подіяти на пластину в точці А (в напрямку стрілки), щоб вона повернулася і відкрила трубку. Посудину заповнено водою до висоти H. Густина води ρ. Товщиною пластини знехтувати. (2002 р. II е. 8 к.)

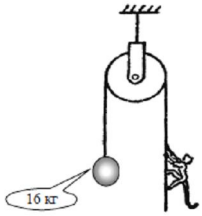


Розв'язок

Пластина повертатиметься навколо точки В. Оскільки товщиною пластини нехтують, то тиски води з обох боків пластини

зрівноважуються скрізь, крім площини над трубкою. Тут сила тиску води $F_т=\rho g(H-h)\pi r^2$. Її момент відносно точки В: $\rho g(H-h)\pi r^3$. Пластина повертатиметься, якщо $\rho g(H-h)\pi r^3<Mg(R-2r)+F(2R-2r)$.

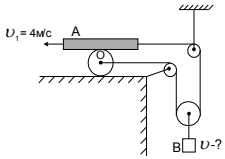
Тоді $F>\dfrac{\rho(H-h)\pi r^3-M(R-2r)}{2(R-r)}g$.



137. Через легкий блок перекинута мотузка, на якій зрівноважені мавпа і тягар так, як показано на малюнку. Яку роботу виконає мавпа, якщо вона підніметься по мотузці вгору на 1 м? (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

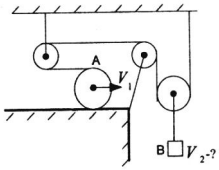
При підніманні мавпи тягар теж підніметься на 1 м. Тому мавпа виконає роботу $A=2mgh=320$ Дж.



138. У системі тіл дошка А рухається зі швидкістю υ_1 = 4 м/с, циліндр О котиться без проковзування. Яка швидкість тіла В? (2007 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

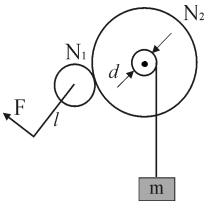
Швидкість осі циліндра О υ_2=2 м/с. Нехай за час t верхня нитка перемістилась на $\upsilon_1 t$, а нижня нитка – на $\upsilon_2 t$. Тоді нитка, до якої підвішено вантаж за цей час переміститься на відстань $\upsilon t=\dfrac{\upsilon_1 t_1+\upsilon_2 t}{2}$. Звідси $\upsilon=\dfrac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}=3\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.



139. В механічній системі, зображеній на рисунку, циліндр А котиться без проковзування зі швидкістю υ_1=2 м/с і намотує на себе нитку. Яка швидкість υ_2 тягарця В? (2007 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Точка А циліндра і нитки має швидкість $\upsilon_3=2\upsilon_1$= 4 м/с. Верхня нитка має таку саму швидкість, що і точка А, але напрямлену вліво. Це означає, що тіло В піднімається вверх зі швидкістю $\upsilon_2=0{,}5\upsilon_3$=2 м/с.



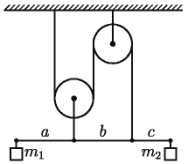
140. Механізм складається з двох шестерень, які мають 12 і 60 зубців. До меншої шестерні прикріплено рукоятку довжиною l=40 см, до осі більшої – вал діаметром d=4 см, на який намотано трос з підвішеним вантажем. Якої маси вантаж можна підняти, прикладаючи до рукоятки силу 200 Н? (2007 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Щоб більша шестерня зробила 1 оберт, меншій потрібно

60/12=5 обертів. Вантаж при цьому підніметься на відстань πd, а рука пройде шлях $5 \cdot 2\pi l$. Тоді програш в шляху і відповідно виграш в силі буде $\frac{10\pi l}{\pi d} = 100$. Отже $mg = 100F$; m=2000 кг.

141. Важіль підвішений до системи блоків так, що точки підвісу ділять його у відношенні $a : b : c$. Блоки, важіль і нитки невагомі, тертя немає. Яке відношення мас вантажів m_1 і m_2, якщо система знаходиться в рівновазі? (2011 р. III е. 8 к.)

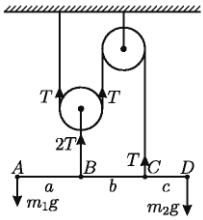


Розв'язок

На вантаж m_1 діє сила тяжіння рівна m_1g.

На вантаж m_2 діє сила тяжіння рівна m_2g.

Нехай в точці С з боку нитки, до якої підвішений важіль, діє сила реакції T. Блок 1 – рухомий, а блок 2 – нерухомий, тому в точці В з боку нитки, до якої підвішений важіль діє сила реакції $2T$.

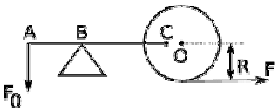


Запишемо правило моментів відносно осі, що проходить через точку В (обертання за годинниковою стрілкою беремо за додатнє):

$m_2g \cdot (c+b) - T \cdot b - m_1g \cdot a = 0$ (1);

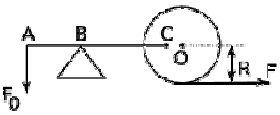
через точку С: $m_2g \cdot c + 2T \cdot b - m_1g \cdot (a+b) = 0$ (2). З рівняння (1) виражаємо Tb і підставляємо в (2). Після спрощень отримаємо: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{2b+3c}{3a+b}$.

142. На блок радіусом R = 12 см, що закріплений на осі О, намотана мотузка, яку тягнуть з силою F = 10 Н. В точці С до блока приироблено легкий стержень АС, який спирається на нерухому опору в точці В. При цьому ВС = 30 см, АВ = 15 см, ОС = 4 см. Яку силу F_0 потрібно прикласти до лівого кінця стержня, щоб вся конструкція знаходилась в рівновазі? (2012 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

Розглянемо блок, закріплений на осі О. Цей блок можна вважати важелем з віссю обертання в точці О. СО і R – це плечі сил F_1 і F відповідно. (F_1–сила, прикладена в точці С вертикально вниз)

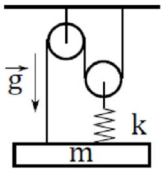


Отож, умова рівноваги запишеться: $F_1 \cdot OC = F \cdot R$. Звідси $F_1 = \frac{F \cdot R}{OC}$.

$F_1 = \frac{10 \cdot 12}{4} = 30$ Н. Розглянемо важіль АС, який спирається на нерухому

опору в точці В. Умова рівноваги важеля для даного випадку:

$F_0 \cdot AB = F_1 \cdot BC$. Звідси $F_0 = \dfrac{F_1 \cdot BC}{AB}$. $F_0 = \dfrac{30 \cdot 30}{15} = 60$ Н.

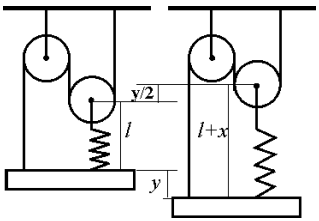


143. В системі блоків, зображеній на малюнку, балку утримують в горизонтальному положенні так, що пружина не розтягнута. Жорсткість пружини k=200 Н/м, маса балки m=9 кг, нитки і блоки ідеальні. Балку відпускають і система знову приходить в стан рівноваги так, що балка горизонтальна. Визначте, на скільки розтягнеться пружина і на яку відстань зміститься балка від початкового положення. (2015 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай видовження пружини x, а в нитці виникає сила натягу T. Тоді в пружині виникає сила пружності $F=kx$. На правий блок діє ця сила пружності і сила натягу з боку ниток $2T$ (блок рухомий).

$2T=kx$, звідки $T = \dfrac{kx}{2}$.



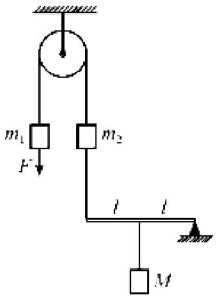
Розглянемо тепер сили, які діють на балку: Сила тяжіння mg донизу, сила пружності kx і сила нятягу T доверху. Отже $mg=kx+T$.

$mg = \dfrac{3kx}{2}$, звідки $x = \dfrac{2mg}{3k}$=0,3 м.

Нехай довжина нерозтягнутої пружини l, а балка опустилась на y.

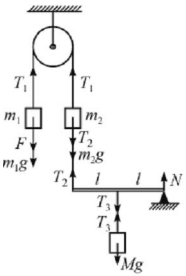
Тоді центр рухомого блока піднявся на $y/2$, оскільки нитка нерозтяжна, а нова довжина пружини стала $l+x$.

Отже $l + x = \dfrac{y}{2} + l + y$. Звідси $y = \dfrac{2}{3}x$. y=0,2 м.



144. З якою вертикально направленою силою F потрібно утримувати вантаж масою m_1 для того, щоб зображена на малюнку конструкція з невагомого блока, невагомих ниток, легкого стрижня і вантажів знаходилась у рівновазі? Маси вантажів m_1=1 кг, m_2=2 кг, M=3 кг. (2016 р. ІІІ е. 8 к.)

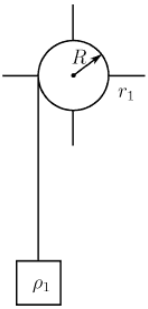
Класичний розв'язок .



Зобразимо на малюнку сили, діючі на вантажі та на стрижень. На вантаж m_1 діють сила тяжіння m_1g і сила натягу T_1 з боку перекинутої через блок нитки. Оскільки тертя в осі блоку немає, то на вантаж m_2 з боку цієї ж нитки діє така ж сила натягу T_1, а також сила тяжіння m_2g і сила натягу T_2 з боку нитки, що з'єднує вантаж m_2 і лівий кінець стрижня. На лівий кінець стрижня з боку нитки діє сила її

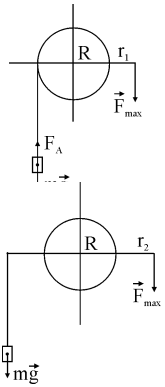
натягу T_2, на середину стрижня – сила натягу іншої нитки T_3, а на правий кінець стрижня – сила реакції опори N. Оскільки всі вантажі знаходяться в рівновазі, то для кожного з них сума прикладених сил дорівнює нулю: $m_1g+F= T_1$ (1); $m_2g+ T_2= T_1$ (2); $Mg = T_3$ (3).
Крім того, оскільки стрижень знаходиться в рівновазі, для нього справедливе правило важеля, записане відносно точки опори: $T_2\cdot 2l= T_3\cdot l$ (4). З рівнянь (3) і (4) $T_2 = \frac{Mg}{2}$ =15 Н. З рівняння (2) T_1=35 Н. З рівняння (1) F=25 Н.

Аналітичний розв'язок.
Оскільки нерухомий блок не дає виграшу в силі, то на лівий кінець стрижня (важеля) буде діяти сила ($m_2g–m_1g$) направлена донизу. Нерухомий блок змінює напрям дії сили, отже сила F, прикладена до вантажу m_1 буде діяти на лівий кінець стрижня (важеля) вгору. Запишемо правило моментів відносно точки опори. $(m_2g– m_1g)\cdot 2l+ Mg\cdot l = F\cdot 2l$. Звідси F=25 Н.



145. До блока радіуса R=40 см, закріпленого на осі, прироблені ручки. На блок намотана міцна нитка. За допомогою цього пристрою людина піднімає вантаж з води. Виявилося, що при довжині ручок r_1=20 см людина, прикладаючи максимальні зусилля, може підняти вантаж тільки до поверхні води (вантаж при цьому цілком занурений у воду). Якою повинна бути довжина ручок, щоб людина могла повністю витягнути вантаж з води? Густина вантажу ρ_1=5000 кг/м^3, води $\rho_в$=1000 кг/м^3. Нитку вважати невагомою і нерозтяжною. (2011 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

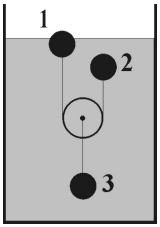


Правило моментів при довжині ручок $r_1 = 0{,}2$ м: $(mg - F_A)R = F_{\max}(R + r_1)$; $(\rho_1 - \rho_в)gVR = F_{\max}(R + r_1)$ (1).
Правило моментів при довжині ручок r_2 (вантаж піднімають у повітрі, максимальні зусилля $F_{\max}$, які прикладає людина, не змінились): $mgR = F_{\max}(R + r_2)$; $\rho_1 VgR = F_{\max}(R + r_2)$ (2).
Поділимо рівняння (1) на рівняння (2):

$$\frac{(\rho_1 - \rho_в)gVR}{\rho_1 VgR} = \frac{F_{\max}(R + r_1)}{F_{\max}(R + r_2)};\ \rho_1(R + r_1) = (\rho_1 - \rho_в)(R + r_2),$$

$$r_2 = \frac{\rho_1(R + r_1)}{\rho_1 - \rho_в} - R,\ r_2 = 0{,}35 \text{ м}.$$

146. В посудині з водою (ρ_0=1000 кг/м^3) перебувають у рівновазі три кульки однакового радіуса, з'єднані нитками через рухомий блок (блок невагомий, об'ємом знехтувати). Кулька 1 занурена у воду на ¾ об'єму і її густина



ρ_1=500 кг/м^3. Визначити густину кульок 2 і 3. Поверх води наливають шар бензину так, що він повністю покриває кульку 1. Яка частина об'єму цієї кульки буде при цьому занурена у воду, а яка в бензин? Густина бензину $\rho_б$= 700 кг/м^3. (2013 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки кульки перебувають в рівновазі то рівнодійна сил, що діє на кожну кульку, рівна нулю.

І кулька: $m_1 g + T = \rho_0 g \cdot \frac{3}{4} V$ (1); ІІ кулька: $m_2 g + T = \rho_0 g V$ (2);

ІІІ кулька: $m_3 g = 2T + \rho_0 g V$ (3).

Із першого та другого рівнянь маємо: $\rho_0 g \cdot \frac{3}{4} V - \rho_1 g V = \rho_0 g V - \rho_2 g V$;

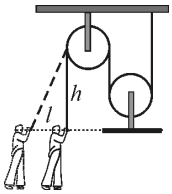
$\frac{3}{4}\rho_0 - \rho_1 = \rho_0 - \rho_2$. Звідси $\rho_2 = \frac{1}{4}\rho_0 + \rho_1 = \frac{1}{4} \cdot 1000 + 500 = 750 \frac{кг}{м^3}$. З рівняння 2 і 3 маємо: $2\rho_0 g V - 2\rho_2 g V = \rho_3 g V - \rho_0 g V$; $2\rho_0 - 2\rho_2 = \rho_3 - \rho_0$.

Звідси $\rho_3 = 3\rho_0 - 2\rho_2$. $\rho_3 = 3 \cdot 1000 - 2 \cdot 750 = 1500 \frac{кг}{м^3}$.

Якщо на воду налити бензин, то сила натягу мотузки, що діє на першу кульку не зміниться, бо не зміняться сили, що діють на інші кульки. Тоді умова рівноваги першої кульки: $\rho_0 g V_1 + \rho_б g (V - V_1) = \rho_1 g V + T$ (4).

З рівнянь (1) і (4) слідує, що: $\rho_0 g V_1 + \rho_б g (V - V_1) = \frac{3}{4}\rho_0 g V$.

Звідси $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{3}{4}\rho_0 - \rho_б}{\rho_0 - \rho_б} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$.



147. Робітник піднімає трубу масою m=20 кг за допомогою системи невагомих блоків так, як показано на малюнку. У початковий момент руки робітника, які тримають невагому мотузку знаходяться на одному рівні по горизонталі з трубою, яка підвішена за свою середину до рухомого блока. Довжина мотузки від рук до нерухомого блока h=4 м. Яку роботу виконає робітник, піднявши трубу, якщо він відійде по горизонталі на відстань l=3 м, утримуючи мотузку на тому ж горизонтальному рівні? (2016 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Після того як робітник відійшов на відстань l, довжина мотузки від його рук до блока стала $L = \sqrt{h^2 + l^2}$ =5 м. Отже мотузка витягнулася на $\Delta h = L - h$=1 м.

Блок, до якого під'єднана труба рухомий, отже він піднявся на висоту $\Delta h/2$=0,5 м. Робота по підняттю труби $A = mg\frac{\Delta h}{2}$ = 100 Дж. Оскільки прості механізми не дають виграшу в роботі, то робітник виконав роботу 100 Дж.

148. Вантаж піднімають за допомогою системи простих механізмів – блока і важеля. ККД блока 40 %, важеля – 30 %. Який ККД системи? (2002 р. з. 8 к.)
Розв'язок

Оскільки $\eta_1 = \frac{E_1}{E}$, $\eta_2 = \frac{E_2}{E_1}$, то

$\eta_{сист,} = \frac{E_2}{E} = \frac{\eta_2 E_1}{E} = \frac{\eta_2 \eta_1 E}{E} = \eta_1 \eta_2 = 0{,}12 = 12\ \%$, де E – повна енергія, E_1 і E_2 - корисні енергії після використання відповідно блока і важеля.

149. Вантаж масою 200 кг піднімають на висоту 15 м за допомогою рухомого блока, ККД якого 80 %. Яку силу прикладають до кінця мотузки? (2011 р. ІІІ е. 9 к.)
Розв'язок

Коефіцієнт корисної дії $\eta = \frac{A_к}{A_з} \cdot 100\%$.

Корисна робота $A_к = mg\Delta h$. Затрачена (повна) робота $A_{з(п)} = F \cdot 2\Delta h$.

$\eta = \frac{mg\Delta h}{2F \cdot \Delta h} \cdot 100\%$. Тоді $F = \frac{m \cdot g \cdot 100\%}{2\eta} = 1250$ Н.

Теплові явища

150. Автомобіль, маса якого 1,5 т, перевозить по горизонтальній дорозі 500 кг вантажу, витрачаючи по 15 г бензину щохвилини. Визначте швидкість рівномірного руху автомобіля, якщо ККД двигуна 30 %, а сила опору становить 0,01 від ваги автомобіля. $q_б$=46 МДж/кг. (2003 р. ІІ е. 8 к.)
Розв'язок

При рівномірному русі сила тяги автомобіля $F_Т$ дорівнює силі опору F_0,

$F_T = F_0 = 0{,}01mg$. Тоді $\eta = \frac{A_{кор}}{A} = \frac{F_T \upsilon t_0}{q_б m_0}$, звідки $\upsilon = \frac{\eta q_б m_0}{0{,}01mgt_0}$=17,25 м/с.

151. У 4 л води за температури кипіння вкинули 2,1 кг перлової крупи і зварили на газовій плиті. Скільки газу витрачено на випаровування води, якщо вважати, що температура води після всипання крупи помітно не змінилася, а вода або випаровується або поглинається крупою. Густина

сухого перлового зерна 1,4 г/см^3, вареного 1,2 г/см^3, питома теплота згоряння газу 44·10^6 Дж/кг. (2003 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

$\rho_c = \dfrac{m_c}{V_c}$, $\rho_{вар} = \dfrac{m_c + m_в}{V_c + V_в} = \dfrac{m_c + m_в}{\dfrac{m_c}{\rho_c} + \dfrac{m_в}{\rho_в}}$. Маса води в перловці

$m_в = \dfrac{m_c(\rho_{вар} - \rho_c)\rho_в}{\rho_c(\rho_в - \rho_{вар})} = \dfrac{3}{2}$ *кг*. Маса води, яка випарувалася

m = 4 кг –1,5 кг = 2,5 кг. $Q=mq$=1,1·10^8 Дж.

152. З якої висоти повинна падати вода, початкова температура якої 20 ^{0}С, щоб при ударі об землю вона нагрілась до температури 100 ^{0}С. Вважати, що на нагрівання води йде 50 % механічної енергії. $c_в$= 4200 Дж/(кг·^{0}С). (2001 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Оскільки 50 % механічної енергії перетворюється у внутрішню, то

$\eta mgh = c_в m(t_2 - t_1)$. Звідси $h = \dfrac{c_в m(t_2 - t_1)}{\eta mg} = \dfrac{c_в(t_2 - t_1)}{\eta g} = 67200$ м.

153. У верхній частині вертикальної труби (стояка) висотного будинку, по якій стікає дощова вода, взимку утворився корок з льоду масою m_1=8 кг за температури 0 ^{0}С. Коли у трубу налили m_2=6,26 кг води за температури 100 ^{0}С, корок відірвався і впав вниз. Чому дорівнює висота стояка, якщо після падіння весь лід розтанув? Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·^{0}С), питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг. Теплоємністю труби стояка і тертям при русі знехтувати. Густина води 1000 кг/м^3. (2005 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Танення льоду відбувається за рахунок зміни потенціальної енергії льоду та гарячої води і охолодження гарячої води до 0^{0}С.

$(m_1+m_2)gh+m_2c\Delta t=m_1\lambda$. Звідси $h = \dfrac{m_1\lambda - m_2 c\Delta t}{(m_1 + m_2)g} \approx 75{,}7$ м.

154. В неповній каструлі знаходиться 4 л гарячої води, а в неповному відрі – 6 л холодної. Квартою кілька разів переливають частину води з однієї посудини в іншу і навпаки, щоразу зачерпуючи різні її маси, але так, що в кінці в обох посудинах залишається попередня кількість води. Виявилось, що температура в каструлі знизилась на 30 ^{0}С. На скільки теплішою стала вода у відрі? Тепловими втратами знехтувати. (2003 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Зміна внутрішньої енергії в посудинах буде однаковою:

$cm_1\Delta t_1 = cm_2\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{m_1}{m_2}\cdot\Delta t_1$. $\Delta t_2 = \frac{4}{6}\cdot 30 = \frac{120}{6} = 20\ ^0$C.

155. Два тіла мають температуру 20 ^{0}C. Якщо перше тіло нагріти до 100 ^{0}C і привести у контакт з другим тілом, то встановиться температура 80 ^{0}C. Яка температура встановиться, якщо до 100 ^{0}C нагріти друге тіло і привести його в контакт з першим? (2006 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Запишемо рівняння теплового балансу для першого і другого випадків:
$m_1c_1(100^0\text{C}–80^0\text{C})=m_2c_2(80^0\text{C}–20^0\text{C})$ (1); $m_1c_1(t–20^0\text{C})=m_2c_2(100^0\text{C}–t)$ (2).
Поділимо перше рівняння на друге: $\frac{20}{t-20}=\frac{60}{100-t}$. Звідси t=40 ^{0}C.

156. Термометр, який знаходився у повітрі за температури 20 ^{0}C, після занурення у склянку з водою об'ємом 200 см^3 показав 78 ^{0}C. Яка справжня температура води у склянці, якщо теплоємність термометра 25 Дж/^{0}C? Теплоємність посудини не враховувати. $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}C) (2005 р. з. 8 к.)

Розв'язок

З рівняння теплового балансу $C(t-t_0)=m_вc_в(t_x-t)$; $t_x-t=\frac{C(t-t_0)}{m_вc_в}$;

$t_x=t+\frac{C(t-t_0)}{m_вc_в}$. Маса води $m_в$=200 г, отже t_x=79,72 ^{0}C.

157. Визначити питому теплоємність механічної суміші, яка складається з порошка міді (m_1=150 г) і порошка алюмінію (m_2=300 г). $c_м$=380 Дж/(кг·^{0}C), c_a=920 Дж/(кг·^{0}C). (2005 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Для нагрівання на Δt порошка міді необхідно затратити кількість теплоти $Q_1=m_1c_м\Delta t$, а порошка алюмінію $Q_2=m_2c_a\Delta t$. Для нагрівання суміші порошків на Δt необхідно затратити $Q=Q_1+Q_2=(m_1+m_2)c_x\Delta t$, де c_x – питома теплоємність суміші. Тоді $c_x=\frac{m_1c_м\Delta t+m_2c_a\Delta t}{(m_1+m_2)\Delta t}=\frac{m_1c_м+m_2c_a}{m_1+m_2}=740\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^0\text{C}}$.

158. В термос з водою, яка має температуру 40 ^{0}C опускають пляшечку. Вона нагрівається до 36 ^{0}C. Потім її виймають і в термос опускають другу таку ж пляшечку. До якої температури вона нагріється? Перед опусканням пляшечки мали температуру 18 ^{0}C. (2007 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Нехай теплоємність води в термосі дорівнює C_T ,а теплоємкість пляшечки дорівнює $C_П$. Запишемо рівняння теплового балансу для обох випадків:

$C_T(t-t_1)=C_П(t_1-t_0)$; $C_T(t_1-t_2)=C_П(t_2-t_0)$. Звідси $\frac{t-t_1}{t_1-t_2}=\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}$.

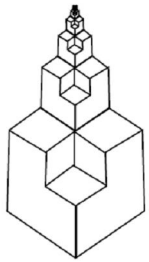
Тоді $t_2=\frac{t_1(t_1-t_0)+t_0(t-t_1)}{t-t_0}\approx 32{,}7\ ^0\text{C}$.

159. Змішали воду: 1 кг при 10 ^{0}C, 2 кг при 20 ^{0}C, 3 кг при 30 ^{0}C, 4 кг при 40 ^{0}C, 5 кг при 50 ^{0}C, 6 кг при 60 ^{0}C, 7 кг при 70 ^{0}C, 8 кг при 80 ^{0}C. Яка встановиться температура суміші? (2004 р. з. 8 к.)

Розв'язок

При змішуванні першої і другої порцій води: $m_1c(t-t_1)=m_2c(t_2-t)$. Звідси $t=\frac{m_1t_1+m_2t_2}{m_1+m_2}$. При змішуванні цієї води з третьою порцією: $(m_1+m_2)(t_x-t)=m_3(t_3-t_x)$; $t_x(m_1+m_2+m_3)=(m_1+m_2)t+m_3t_3$. Звідси $t_x=\frac{m_1t_1+m_2t_2+m_3t_3}{m_1+m_2+m_3}$. За аналогією під час змішування всіх порцій: $t=\frac{m_1t_1+m_2t_2+...}{\sum m}\approx 56{,}6\ ^0\text{C}$.

160. Майстер Вася виготовив крижану скульптуру, зображену на малюнку: він узяв кубик з льоду із стороною l=1 м і вирізав з його кута куб з стороною, вдвічі меншою. З вирізаним кубиком він повторив ту ж процедуру, і так далі. Сьомий кубик видався йому дуже маленьким, і він його просто викинув. Потім він охолодив 1-й, 3-й і 5-й кубики до t_1=–40 ^{0}C, а 2-й, 4-й і 6-й – до t_2=–13 ^{0}C і зібрав з них свою скульптуру. Визначте температуру скульптури після встановлення теплової рівноваги. Тепловтратами нехтувати. (2014 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

Позначимо масу першого кубика m. Кожен наступний кубик має об'єм рівно у вісім разів менший, ніж попередній. Отже, маса сусідніх кубиків також відрізняється в 8 разів, зокрема, маса другого кубика дорівнює m/8. Розіб'ємо тепер кубики на пари: 1 і 2 , 3 і 4, 5 і 6. У кожній парі великий кубик має температуру t_1=–40 ^{0}C, менший – температуру t_2=–13 ^{0}C, а маси їх відрізняються у вісім разів. Отже, температура теплової рівноваги буде однакова в кожній такій парі і дорівнюватиме загальній температурі всієї скульптури.

Для кожної пари: $mc(t-t_1)=\frac{m}{8}c(t_2-t)$. Звідси $t=\frac{t_2+8t_1}{9}=-37\ ^0\text{C}$.

161. В калориметр з холодною водою вкидають золоту та срібну обручки, які знаходилися в окропі. Спочатку вкидають одну, а після встановлення теплової рівноваги її виймають і вкидають іншу. Порівняйте кінцеві температури в калориметрі у випадках, коли спочатку вкидали золоту, а потім срібну обручки і навпаки. Відповідь обґрунтуйте математично. (2008 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Нехай m – маса води, m_1 – маса золотої обручки, m_2 – маса срібної обручки, t – початкова температура води, t_0 – температура окропу.

Рівняння теплового балансу після вкидання у воду золотої обручки:

$mc_в(t_1 - t) = m_1c_з(t_0 - t_1)$ (1), де t_1 – температура води після вкидання золотої обручки. Після виймання золотої обручки і вкидання срібної:

$mc_в(t_2 - t_1) = m_2c_c(t_0 - t_2)$ (2), де t_2 – температура води після вкидання срібної обручки. З (2) $mc_вt_2 - mc_вt_1 = m_2c_ct_0 - m_2c_ct_2$, $t_2 = \dfrac{m_2c_ct_0 + mc_вt_1}{mc_в + m_2c_c}$ (3).

Визначимо з рівняння (1) температуру t_1 і підставимо у рівняння (3):

$$mc_вt_1 - mc_вt = m_1c_зt_0 - m_1c_зt_1; \quad t_1 = \frac{m_1c_зt_0 + mc_вt}{mc_в + m_1c_з};$$

$$t_2 = \frac{m_2c_ct_0 + \dfrac{mc_в(m_1c_зt_0 + mc_вt)}{mc_в + m_1c_з}}{mc_в + m_2c_c}; t_2 = \frac{mc_вt_0(m_2c_c + m_1c_з) + m_2c_cm_1c_зt_0 + m^2c_в{}^2t}{(mc_в + m_1c_з)\cdot(mc_в + m_2c_c)}.$$

Проаналізувавши вирази, які входять в чисельник і знаменник бачимо, що при зміні m_1 і $c_з$ на m_2 і c_c і навпаки вираз не змінюється, отже немає різниці як вкидати обручки. Кінцева температура буде однакова.

162. У Миколи і Петра є по три склянки: червона, зелена і синя. Кожна склянка містить по M = 50 г води. Температура води в червоних склянках t_1=10 ^{0}С, в зелених t_2=30 ^{0}С, в синіх t_3=50 ^{0}С. Микола виливає з червоної склянки m=10 г води, а потім зливає всю свою воду в синю склянку і перемішує. Петро переливає всю воду з червоної склянки в зелену, перемішує і виливає деяку кількість води. Воду, що залишилася, він переливає в синю склянку. Виявилося, що після всіх цих операцій температури води в синій склянці у Миколи і Петра однакові. Скільки води вилив Петро? Теплообміном води з навколишнім середовищем і з склянками знехтувати. Об'єм склянок достатній, щоб вмістити всю наявну воду. (2011 р. III е. 9 к)

Розв'язок

Коли Микола вилив з червоної склянки m = 10 г води, рівняння теплового балансу при змішуванні рідини в його склянках матиме вигляд:

$c(M - m)(t - t_1) + cM(t - t_2) = cM(t_3 - t)$,

де t – кінцева температура суміші; c – питома теплоємність води.

Після спрощень і підстановки відповідних значень $t = \frac{M(t_1 + t_2 + t_3) - mt_1}{3M - m}$,

$t = 31\frac{3}{7}$ ^{0}C . Коли Петро переливає воду з червоної склянки в зелену, то встановлюється температура t_4=20 ^{0}C. Якщо частина води вилита, то рівняння теплового балансу має вигляд: $c(2M - m_1)(t - t_4) = cM(t_3 - t)$, де m_1 – маса води, яку вилив Петро, t – кінцева температура. Згідно умови $t = 31\frac{3}{7}$ ^{0}C . Після перетворень $m_1 = \frac{M(t_3 - 3t + 2t_4)}{(t_4 - t)}$. $m_1 = 18{,}75$ г.

163. Експериментатор має в своєму розпорядженні дві однакові теплоізольовані посудини, в які налита однакова кількість невідомої рідини. В першу посудину він налив деяку кількість води такої ж температури і насипав нагрітих металевих ошурок так, що посудина заповнилася доверху. Після встановлення теплової рівноваги виявилося, що температура в посудині підвищилася на Δt_1=2 ^{0}C, а ошурки охололи на Δt_2=60 ^{0}C. В другу посудину він насипав ошурок в 10 разів більше і посудина теж виявилась заповненою доверху, причому після встановлення теплової рівноваги температура в посудині підвищилася на стільки, на скільки понизилася температура ошурок. Визначити питому теплоємність ошурок, якщо їх густина ρ_o=1,72 г/см^3. Густина води $\rho_в$=1 г/см^3, питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·^{0}C). (2016 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Запишемо рівняння теплового балансу для першого і другого випадків:

$C\Delta t_1 + c_в\rho_в V_в\Delta t_1 = c_o\rho_o V_o\Delta t_2$ (1); $C\Delta t = c_o\rho_o V_o{}'\Delta t$ (2), де C – теплоємність посудини з рідиною, Δt – зміна температури ошурок і посудини в другому випадку. З умови $V_o{}' = 10\ V_o$ і $V_в + V_o = V_o{}'$, тобто $V_в = 9\ V_o$.

З рівняння (2) підставимо теплоємність посудини з рідиною в рівняння (1), використавши зв'язок між об'ємами: $10c_o\rho_o V_o\Delta t_1 + 9c_в\rho_в V_o\Delta t_1 = c_o\rho_o V_o\Delta t_2$.

Звідси $c_o = \frac{9c_в\rho_в\Delta t_1}{\rho_o(\Delta t_2 - 10\Delta t_1)}$ ≈1100 Дж/(кг·^{0}C).

164. До якої температури повинен бути охолоджений шматок ебоніту, щоб після занурення його у воду при температурі 0 ^{0}C він почав спливати внаслідок обмерзання льодом? $\rho_л$=900 кг/м^3, $\rho_е$=1100 кг/м^3, $\rho_в$=1000 кг/м^3, $\lambda_л$=330 кДж/кг, $c_е$=1200 Дж/(кг·^{0}C). (2006 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

В умові задачі мова йде про шматок ебоніту, тобто він має фіксовану масу $m_е$ і воду, значить кількість її не обмежена. Ебоніт одержить певну кількість теплоти за рахунок кристалізації води. За законом збереження енергії:

$c_e m_e (t - 0^0 C) = \lambda_л m_л$ або $c_e m_e t = \lambda_л m_л$ (1).

Умова зринання ебоніту з льодом: $m_e + m_л \le \rho_в \left(\frac{m_e}{\rho_e} + \frac{m_л}{\rho_л} \right)$ (2)

Розв'язок системи рівняння (1) і нерівності (2): $t \le \frac{\lambda}{c_e} \frac{\rho_л}{\rho_e} \frac{\rho_e - \rho_в}{\rho_в - \rho_л}$.

Умова виконується при охолодженні ебоніту до температури не вище -225^0 С.

165. До якої температури слід охолодити шматок алюмінію, щоб після занурення його у воду з температурою 0 ^{0}С він піднявся з дна внаслідок обмерзання льодом? $\rho_л$=900 кг/м^3, ρ_a=2700 кг/м^3, $\rho_в$=1000 кг/м^3, $\lambda_л$=330 кДж/кг, c_a=920 Дж/(кг·^{0}С). (2002 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

При опусканні алюмінію у воду з температурою 0 ^{0}С почнеться теплообмін. Алюміній приймає кількість теплоти $Q_1 = c_a \rho_a V_a t_a$, а вода при кристалізації віддає $Q_2 = \lambda \rho_л V_л$. Оскільки $Q_1 = Q_2$, то $c_a \rho_a V_a t_a = \lambda \rho_л V_л$ (1). Щоб система алюміній-лід почала спливати, повинна виконуватися умова рівноваги: $F_{Aa} + F_{Aл} = m_a g + m_л g$, звідки $\rho_в g(V_a + V_л) = \rho_a g V_a + \rho_л g V_л$ (2)

Розв'язавши систему рівнянь (1) та (2), отримаємо:

$t_a = \frac{\lambda \rho_л (\rho_a - \rho_в)}{c_a \rho_a (\rho_в - \rho_a)} = -2100$ ^{0}С. Температури t=–2100 ^{0}С досягти неможливо.

166. У посудину із сумішшю 1 кг води і 1 кг льоду впустили 0,1 кг водяної стоградусної пари. Що буде в посудині після встановлення теплової рівноваги? Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·^{0}С), питома теплота плавлення льоду 340 кДж/кг, питома теплота пароутворення води 2,3 Мдж/кг. (2005 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

Кількість теплоти, яка потрібна для плавлення 1 кг льоду $Q_1 = m_1 \lambda = 0{,}34 \cdot 10^6$ Дж. Кількість теплоти, яка виділяється під час конденсації пари: $Q_2 = m_2 L = 0{,}23 \cdot 10^6$ Дж. Кількість теплоти, яка виділяється під час охолодження води, утвореної з пари від 100^{0}С до 0^{0}С: $Q_3 = m_2 c \Delta t = 0{,}042 \cdot 10^6$ Дж. $Q_2 + Q_3 = 0{,}272 \cdot 10^6$ Дж. Оскільки $Q_1 > Q_2 + Q_3$, то після встановлення теплової рівноваги в посудині буде лід і вода при 0^{0}С. Розтане маса льоду $m = \frac{Q_2 + Q_3}{\lambda}$ =0,8 кг.

167. В теплоізольовану посудину, в якій міститься 1 кг льоду за 0^0 С впускають 1 кг водяної пари при температурі 105 ^{0}С. Якою буде температура в посудині після встановлення теплової рівноваги? Питома теплоємність води

4200 Дж/(кг ºС), пари 2200 Дж/(кг ºС), питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг, питома теплота пароутворення води 2,3 Мдж/кг. (2002 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

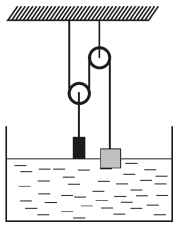
Для плавлення 1 кг льоду і нагрівання його до 100 ^{0}С потрібна кількість теплоти $Q_1 = m\lambda + mc_в\Delta t_1 = 7{,}5\cdot 10^5$ Дж. При охолодженні пари до 100 ^{0}С виділиться кількість теплоти $Q_2 = mc_п\Delta t_2 = 11000$ Дж. При повній конденсації пари виділиться кількість теплоти $Q_3 = mL = 2{,}3\cdot 10^6$ Дж. Можна зробити висновок, що температура в посудині буде 100 ^{0}С. При цьому весь лід розтане і вода нагріється до 100 ^{0}С. Пара охолоне і деяка її частина сконденсується. Маса сконденсованої пари $m_1 = \dfrac{Q_1 - Q_2}{L} \approx 321$ г.

168. В склянку об'ємом 200 мл, яка до половини наповнена водою за температури 15 ^{0}С з висоти 20 см вкидають (без поштовху) кубик льоду. Визначте температуру води після того, як увесь лід розтане і в склянці встановиться теплова рівновага. Початкова температура льоду –5 ^{0}С, довжина ребра кубика 2 см. Густина води 1000 кг/м^3, льоду 900 кг/м^3, питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·^{0}С), льоду 2100 Дж/(кг·^{0}С), питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг. (2006 р. ІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Під час падіння кубик льоду нагрівається: $m_лgh = m_лc_л\Delta t$. $\Delta t = \dfrac{gh}{c_л} \approx 0{,}001$ ^{0}С. Це нагрівання незначне і ним можна знехтувати. Запишемо рівняння теплового балансу: $Q_1+Q_2+Q_3=Q_4$, де $Q_1=c_лm_л(t_{пл}-t_л)$ –кількість теплоти, необхідна для нагрівання льоду до 0 ^{0}С. $Q_2=\lambda m_л$ – кількість теплоти, необхідна для плавлення льоду. $Q_3 = c_вm_л(t - t_{пл})$– кількість теплоти, необхідна для нагрівання утвореної з льоду води. $Q_4 = c_вm_в(t_в - t)$– кількість теплоти, яку віддає вода в склянці, охолоджуючись. Маса льоду $m_л=\rho_лV=\rho_лa^3 = 7{,}2\cdot 10^{-3}$ кг. Q_1=75,6 Дж; Q_2 =2376 Дж. $2451{,}6+30{,}24t=420(15-t)$. Звідси $t\approx 8{,}5$ ^{0}С.

169. В системі, зображеній на малюнку, до рухомого блока підвішено алюмінієвий тягарець масою 270 г, який дотикається до поверхні води. До кінця нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвішено шматок льоду, масою 485 г, який частково занурений у воду. Система перебуває у рівновазі. Яку кількість теплоти необхідно надати шматку льоду, щоб алюмінієвий тягар повністю занурився у воду? Нитки довгі і нерозтяжні, тертя в блоках відсутнє. Температура системи 0 ^{0}С. $\rho_в$=1 г/см^3, $\rho_а$= 2,7 г/см^3, $\lambda_л$=330 кДж/кг. (2006 р. ІІІ е. 10 к.)



Розв'язок

Оскільки шлях, який пройде алюмінієвий тягарець до повного занурення вдвічі менший, ніж шлях пройдений шматком льоду, то після занурення тягарця лід повністю знаходиться у повітрі. З умови рівноваги

$$m_a g = F_{нат} + F_в \Rightarrow F_{нат} = m_a g - \rho_в g V = m_a g - \rho_в g \frac{m_a}{\rho_a}$$

Враховуючи властивість рухомого і нерухомого блока

$$m_л g = \frac{F_{нат}}{2} = \frac{m_a g}{2}\left(\frac{\rho_a - \rho_в}{\rho_a}\right) \Rightarrow m_л \approx 85 \text{ г}.$$

Отже повинно розтанути $\Delta m = m - m_л = 400$ г. $Q = \Delta m \lambda_л = 132000$ Дж.

170. У каструлю, площа дна якої 300 см^2, налили 2 л води при 8 ^{0}С і вкинули 160 г льоду при температурі 0 ^{0}С. Якою буде температура і рівень води у каструлі після встановлення теплової рівноваги? Теплоємністю каструлі і теплообміном з навколишнім середовищем знехтувати. $\lambda_л$=330 кДж/кг, $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}С), $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2003 р. з. 8 к.)

Розв'язок

Для плавлення льоду необхідна кількість теплоти $Q=m_1\lambda=5{,}44\cdot10^4$ Дж, де m_1 – маса льоду. При охолодженні води від 8 ^{0}С до 0 ^{0}С виділиться кількість теплоти $Q=m_2c\Delta t=6{,}72\cdot10^4$ Дж, де m_2 – маса води. Отже, після встановлення теплової рівноваги весь лід розтане і в каструлі буде вода. Тоді рівняння теплового балансу: $m_1\lambda+m_1c(t-t_0)=m_2c(t_1-t)$, де t_1 – початкова температура води, t_0=0 ^{0}С. Звідси $t = \dfrac{m_2ct_1 - m_1\lambda}{m_1c + m_2c} \approx 1{,}59$ ^{0}С. Рівень води в каструлі:

$$h = \frac{V_1 + V_2}{S} = \frac{\dfrac{m_2}{\rho_в} + \dfrac{m_1}{\rho_в}}{S} = 7{,}2 \text{ см}.$$

171. У герметично закритій посудині у воді за 0 ^{0}С плаває шматок льоду маси M, в який вмерзла свинцева дробина маси m. Яку кількість теплоти необхідно надати системі, щоб дробина почала тонути? Густина свинцю ρ_c, льоду $\rho_л$, води $\rho_в$, питома теплота плавлення льоду λ. (2007 р. з. 11 к.)

Розв'язок

Щоб дробина почала тонути не обов'язково повинен розтанути весь лід. Задля цього необхідно, щоб густина системи «шматок льоду-дробина» стала рівною або більшою густини води. Розглянемо граничний випадок: $\dfrac{M_1 + m}{V} = \rho_в$, де M_1 – маса льоду, що залишилася після танення. Враховуючи, що сумарний об'єм льоду і дробини дорівнює сумі їхніх об'ємів

$V = \frac{M_1}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_c}$, умова танення запишеться так: $M_1 + m = \rho_в\left(\frac{M_1}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_c}\right)$.

Звідси $M_1 = \frac{m(\rho_c - \rho_в)\rho_л}{(\rho_в - \rho_л)\rho_c}$. Тоді $\Delta m = M - M_1 = M - \frac{m(\rho_c - \rho_в)\rho_л}{(\rho_в - \rho_л)\rho_c}$.

Кількість теплоти, яка необхідна для цього $Q = \Delta m\lambda$.

172. У теплоізольовану циліндричну посудину помістили шматок льоду масою M при $t = 0\ ^0$С і міцно прикріпили до дна. Потім залили цей лід водою такою ж маси M. Вода повністю покрила лід і досягла рівня H=20 см. Визначте початкову температуру води, якщо після встановлення теплової рівноваги рівень води в посудині опустився на h=0,4 см. $\lambda_л$=330 кДж/кг, $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}С), $\rho_л$=900 кг/м^3, $\rho_в$=1000 кг/м^3. (2008 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Початкова висота рідини в посудині визначається умовою: $\frac{M}{\rho_л} + \frac{M}{\rho_в} = HS$ або

$M\left(\frac{\rho_в + \rho_л}{\rho_л\rho_в}\right) = HS$ (1). Припустимо, що розтав весь лід. Рівень води у посудині повинен зменшитись на висоту h_0, значення якої знайдемо із співвідношення: $\frac{M}{\rho_л} - \frac{M}{\rho_в} = h_0 S$ або $M\left(\frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л\rho_в}\right) = h_0 S$ (2).

Поділимо рівняння (2) на (1): $\frac{h_0}{H} = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в + \rho_л}$; $h_0 \approx 1{,}05$ см. Оскільки згідно умови рівень води опустився на 0,4 см, то це означає, що не весь лід розтав, а отже в посудині встановилась температура 0 ^{0}С. Нехай розтав лід масою m. Тоді: $Mc_в(t - 0) = \lambda m$, звідки $t = \frac{\lambda m}{c_в M}$.

Ще раз запишемо рівняння (2), з врахуванням того, що розтав лід масою m:

$m\left(\frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л\rho_в}\right) = hS$ (3). Поділимо (3) на (1): $\frac{m}{M} = \frac{h}{H} \cdot \frac{\rho_в + \rho_л}{\rho_в - \rho_л}$.

Отже $t = \frac{\lambda \cdot h}{c_в \cdot H} \cdot \frac{\rho_в + \rho_л}{\rho_в - \rho_л} \approx 29{,}8\ ^0$С.

173. В циліндричній посудині висотою 17 см і площею перерізу 100 см^2, знаходиться вода масою 1,6 кг при температурі 10 ^{0}С. У воду акуратно опускають шматок льоду масою 200 г при температурі 0 ^{0}С. Визначте

температуру, яка встановиться в посудині. Скільки води буде в посудині після встановлення теплової рівноваги? Питома теплоємність води c=4200 Дж/(кг·^{0}С), питома теплота плавлення льоду λ=330 кДж/кг. Густина води 1000 кг/м^3, льоду 900 кг/м^3. Тепловими втратами на нагрівання посудини та оточуючого середовища знехтувати. (2012 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Визначимо висоту води в посудині: $m = \rho_в \cdot S \cdot h_в \Rightarrow h_в = \dfrac{m}{\rho_в \cdot S} = 0{,}16$ м .

Склянка заповнена водою до висоти 16 см. У ній над водою є вільний об'єм: $V = S(h - h_в) = 0{,}0001$ м^3 . Опустимо в склянку з водою кусок льоду. При рівновазі лід буде плавати за умови: $m_л g = \rho_в g V_з$. Лід витіснить воду об'ємом $V_з = \dfrac{m_л}{\rho_в} = 0{,}0002$ м^3 . Відповідно, з склянки виллється об'єм води $\Delta V = V_з - V = 0{,}0002 - 0{,}0001 = 0{,}0001$ м^3 . Це відповідає масі води 0,1 кг.
Отже, в посудині залишиться вода масою 1,5 кг і лід масою 0,2 кг.
Для плавлення льоду потрібна енергія $Q_{пл} = \lambda m_л = 66000$Дж .
Максимальна кількість енергії, яка може виділитись при охолодженні води $Q_{ох} = c m_в (t - 0) = 63000$ Дж . Цієї енергії недостатньо, щоб весь лід розтав, тому кінцева температура буде 0 ^{0}С і розтане лід масою $m_л = \dfrac{Q_{ох}}{\lambda} \approx 0{,}191$ кг .
В посудині залишиться 0,009 кг льоду і 1,691 кг води при температурі 0 ^{0}С.

174. Для заповнення басейна водою можна використати два крани, через які поступає однакова кількість води за рівні інтервали часу. Температура води, що поступає з першого крана t_1=70 ^{0}С, з другого t_2=40 ^{0}С. Під час заповнення басейна помітили, що коли відкритий тільки перший кран, температура у басейні t_3=50 ^{0}С. Якщо відкритий тільки другий кран, температура у басейні t_4=30 ^{0}С. Яка температура повітря у приміщенні басейна? Кількість теплоти, яка випромінюється теплою водою прямо пропорційна різниці температур води і повітря, а рівень води у басейні однаковий в обох випадках. Яка температура води в басейні, якщо відкриті обидва крани? (2005 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Коли відкритий перший кран, то рівняння теплового балансу:
$\alpha(t_3 - t_x) = mc(t_1 - t_3)$ (1). Аналогічно, коли відкритий другий кран:
$\alpha(t_4 - t_x) = mc(t_2 - t_4)$ (2). Звідси $\dfrac{t_3 - t_x}{t_4 - t_x} = \dfrac{t_1 - t_3}{t_2 - t_4}$ або

$t_3t_2 - t_3t_4 - t_x(t_2 - t_4) = t_1t_4 - t_3t_4 - t_x(t_1 - t_3)$, $t_x((t_2 - t_4) - (t_1 - t_3)) = t_3t_2 - t_1t_4$. $t_x = 10\ ^0$C.

Якщо відкрити обидва крани, то $\alpha(t_5 - t_x) = \frac{m}{2}c(t_1 - t_5) + \frac{m}{2}c(t_2 - t_5)$.

Поділимо на рівняння (1): $\frac{t_5 - t_x}{t_3 - t_x} = \frac{t_1 - t_5}{2(t_1 - t_3)} + \frac{t_2 - t_5}{2(t_1 - t_3)}$.

$2t_5(t_1 - t_3) - 2t_1t_x + 2t_xt_3 = (t_1 + t_2)(t_3 - t_x) - 2t_5(t_3 - t_x)$, звідки $t_5 = 40\ ^0$C.

175. Для підтримування в кімнаті температури 20 ^{0}C за температури на вулиці –10 ^{0}C доводиться щодня спалювати 0,1 м^3 сухих дров. Скільки дров доведеться спалювати щодня для підтримання в кімнаті тієї ж температури, якщо температура на вулиці знизиться до –20 ^{0}C? (2006 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Між вулицею і кімнатою відбувається теплообмін. Кількість теплоти, що втрачає кімната за добу $Q_1 = \alpha(T_0 - T_1)$ (1), де T_0 – температура в кімнаті, T_1 – температура на вулиці, α – коефіцієнт теплообміну. При спалюванні дров виділяється теплота $Q_2 = \eta m_1 q$ (2), де η – коефіцієнт корисної дії печі, m – маса дров, q – питома теплота згоряння дров. Якщо температура в кімнаті стала, то $Q_1 = Q_2$, тобто $\alpha(T_0 - T_1) = \eta m_1 q$ (3). У другому випадку $\alpha(T_0 - T_2) = \eta m_2 q$ (4). Поділивши (4) на (3), отримаємо:

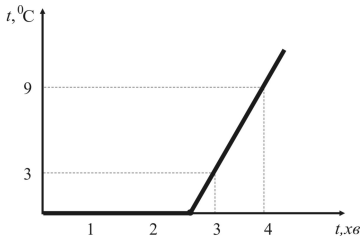
$m_2 = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} m_1$, або $V_2 = \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} V_1 = 0{,}13$ м^3.

176. У калориметр з водою, у якій плаває шматок льоду, опускають нагрівник потужністю 340 Вт і щохвилини вимірюють температуру. На протязі першої і другої хвилини температура не змінювалась. На кінець третьої хвилини температура зросла на 3 ^{0}C, а на кінець четвертої ще на 6 ^{0}C. Нехтуючи теплоємністю калориметра і втратами тепла, оцінити початкові маси води і льоду в калориметрі. $\lambda_л$=340 кДж/кг, $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}C). (2007 р. III е. 8 к.)

Розв'язок

Побудуємо графік залежності температури від часу.

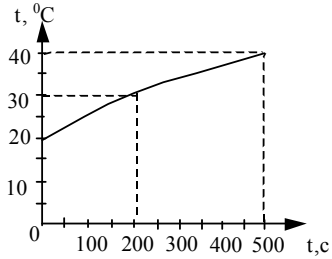
Згідно умови початкова температура 0 ^{0}C. Від третьої до четвертої хвилини нагрівалася вода, отже графік – пряма лінія. Провівши його до перетину з віссю часу, отримаємо точку, коли весь лід розтав. З графіка видно, що t=2,5 хв =150 с.



Отже $Pt=\lambda\cdot m_л$. $m_л = \dfrac{P\cdot t}{\lambda} = 0{,}15$ кг. Оскільки нагрівник працює однаково то при нагріванні всієї води на 3 ^{0}С за час 0,5 хв можна записати: $P\cdot t_1 = mc\Delta t$.

$m = \dfrac{P\cdot t_1}{c\Delta t} \approx 0{,}8$ кг. Отже початкова маса води була $m-m_л$=0,65 кг.

177. У калориметр, в якому знаходилася вода при 20 ^{0}С, із шприца наливають з незмінною швидкістю гарячу воду. Графік залежності температури води від часу зображено на малюнку. Знайти температуру гарячої води, вважаючи, що при її попаданні в калориметр, теплова рівновага встановлюється миттєво. (2003 р. з. 9 к.)

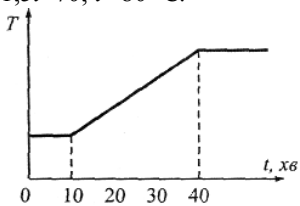


Розв'язок

З графіка бачимо, що за 200 с вода нагрілася від 20^0 С до 30^0 С і за наступні 300 с – від 30 ^{0}С до 40 ^{0}С. Оскільки швидкість наливання гарячої води незмінна, то за 300 с потрапить води в 1,5 разів більше, ніж за 200 с.

Запишемо два рівняння теплового балансу: $m_1c(t_2-t_1)=m_2c(t-t_2)$ і $(m_1+m_2)c(t_3-t_2)=1{,}5m_2c(t-t_3)$, де m_1 – маса холодної, m_2 – маса гарячої води, t_1=20 ^{0}С, t_2=30 ^{0}С, t_3=40 ^{0}С, t –температура гарячої води. $10m_1=m_2(t-30)$; $(m_1+m_2)10=1{,}5m_2(t-40)$. Після перетворень: $t-30=1{,}5t-70$; t=80 ^{0}С.

178. У калориметр помістили суміш води й льоду і рівномірно її нагрівають. Графік зміни температури в калориметрі зображено на малюнку. Визначте початкове співвідношення мас води і льоду. Оцініть інтервал часу, через який температура знову почне змінюватись? $\lambda_л$=330 кДж/кг, $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}С), $L_в$=2,3 МДж/кг (2006 р. з. 9 к.)



Розв'язок

Нехай: t_1=10 хв., t_2=40 хв., t_3 – час, коли температура знову почне змінюватись, ΔT=100 ^{0}С. Якщо потужність нагрівника стала, то кількість теплоти, що йде на плавлення льоду $Q_{пл.} = m_л\lambda = Pt_1$ (1). Кількість теплоти, що йде на нагрівання води від 0 до 100 ^{0}С $Q_{в.} = c_в(m_л + m_в)\Delta T = P(t_2 - t_1)$ (2). Кількість теплоти, що йде на випаровування води

$Q = L(m_л + m_в) = P(t_3 - t_2)$ (3). Поділимо (2) на (1): $\dfrac{m_в}{m_л} = \dfrac{(t_2 - t_1)\lambda}{t_1 c_в \Delta T} - 1 = 1{,}35$.

Поділивши (3) на (2), отримаємо: $t_3 = t_2 + \dfrac{L(t_2 - t_1)}{c_в \Delta T} = 202$ хв.

179. Молоді люди вирішили почастувати своїх друзів коктейлем з льодом і поставили ванночку з водою в морозильник. Через t_1=15 хв вони заглянули в морозильник і виявили, що за цей час температура води понизилася з 16 ^{0}С до 4 ^{0}С. Через який час від того моменту, коли ванночку ставили у морозильник буде готовий лід? $\lambda_л$=330 кДж/кг, $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}С). (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Для охолодження води на ΔT_1=12 ^{0}С від неї було відведено кількість теплоти $Q_1=cm\Delta T_1$, де m – маса, c – питома теплоємність води. Морозильник працює неперервно і швидкість тепловідводу в ньому постійна. Швидкість тепловідводу $q=\frac{Q_1}{t_1}=\frac{cm\Delta T_1}{t_1}$. Час, необхідний для подальшого охолодження води від 4 ^{0}С до 0 ^{0}С $t_2=\frac{Q_2}{q}=\frac{cm\Delta T_2}{cm\Delta T_1}t_1=t_1\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}$.

$t_2=15\cdot\frac{4}{12}=5$ хв. Час, необхідний для перетворення в лід всієї маси води, яка знаходиться при 0 ^{0}С $t_3=\frac{Q_3}{q}=\frac{m\lambda}{cm\Delta T_1}t_1=t_1\frac{\lambda}{c\Delta T_1}$. $t_3\approx 98$ хв. Таким чином шуканий час $t=t_1+t_2+t_3$=15+5+98=118 хв≈2 год.

180. Дві однакові посудини А і В, що містять суміш води і льоду однакової маси помістили на дві однакові плитки, і відразу стали вимірювати температуру вмісту за допомогою термометрів. Через 30 хв. після початку вимірювань термометр в посудині А показав температуру 2 ^{0}С, а ще через 15 хв. – температуру 5 ^{0}С. Визначте покази другого термометра в ті ж моменти часу, якщо відомо, що в посудині В льоду було в два рази більше, ніж в посудині А. Теплоємністю посудин і теплообміном з навколишнім середовищем знехтувати. (2009 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Введемо позначення: P_0 – потужність плиток, λ – питома теплота плавлення льоду, c – питома теплоємність води, $m_л$ – маса льоду в посудині А, m – маса суміші води та льоду в посудинах. Тоді в посудині В маса льоду рівна $2m_л$. Оскільки в посудинах знаходиться суміш води та льоду, то їх початкова температура t_0=0 ^{0}С . Тепло, отримане посудиною А за час τ_1 =30 хв. іде на плавленння льоду і нагрівання води до температури t_1=2 ^{0}С. $Q_1=P_0\tau_1=m_л\lambda+2mc$ (1). За час $\tau_2=\frac{1}{2}\tau_1=15$ хв. тепло іде на нагрівання води від температури t_1=2 ^{0}С до температури t_2=5 ^{0}С (Δt=3^{0}С). $Q_2=P_0\tau_2=3mc$ (2). З системи рівнянь 1 та 2, врахувавши, що $\frac{\tau_1}{\tau_2}=2$,

отримаємо: $m_л\lambda = mc(\frac{3\tau_1}{\tau_2} - 2) = 4mc$. Тоді з врахуванням рівняння 1: $m_л\lambda = \frac{2}{3}Q_1$, а також $Q_1 = 6mc$.

Оскільки в посудині В льоду вдвічі більше, ніж в посудині А, тому на його плавлення необхідно тепла $2m_л\lambda = \frac{4}{3}Q_1 > Q_1$, тобто більше ніж виділяється плитою за час τ_1=30 хв. Таким чином весь лід в посудині В за цей час не розтане і температура в посудині буде 0 ^{0}С. За час $\tau_1 + \tau_2 = 3\tau_2 = 45$ хв. плитою виділяється теплота $Q = Q_1 + Q_2 = 9mc$. Оскільки на плавлення всього льоду в посудині В потрібно тепла $\frac{4}{3}Q_1 = \frac{4}{3}\cdot 6mc = 8mc$, то на нагрівання води від 0 ^{0}С до температури t_{2_B} піде тепла $Q' = 9mc - 8mc = mc$. З іншого боку $Q' = mc\Delta t_1$ Таким чином $\Delta t_1 = 1^0$С. Отже термометр покаже температуру 1^{0}С.

181. З відра налили в каструлю деяку кількість води і поставили на нагрівник. Через 30 хв вода закипіла. Після того як з відра зачерпнули ще деяку кількість води і долили в каструлю, температура води в каструлі понизилася на Δt=12 ^{0}С, а через 5 хв вода знову закипіла. Яка температура води у відрі? Теплообміном води з навколишнім середовищем знехтувати. (2010 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Нехай маса першої порції води m_1, початкова температура води у відрі t. Тоді на нагрівання цієї води затратиться кількість теплоти $Q_1 = m_1c(100 - t)$ протягом часу τ_1 =30 хв. Нехай маса другої порції води m_2, тоді рівняння теплового балансу при змішуванні води запишеться так:

$m_1c\Delta t = m_2c(100 - \Delta t - t)$ або $\frac{m_1}{m_2} = \frac{100 - \Delta t - t}{\Delta t}$ (1).

Для спрощення математичних розрахунків проведемо такі міркування:

І. Вода масою m_1 знаходилася при температурі 100 ^{0}С, вода масою m_2 – при температурі t. В кінцевому підсумку при температурі 100 ^{0}С знаходиться вода масою $m_1 + m_2$ і на це витрачена енергія плитки за час τ=5 хв.

Отже, можемо вважати, що ця енергія йде на нагрівання води масою m_2 від температури t до100 ^{0}С. $Q_2 = m_2c(100 - t)$.

Оскільки тепловіддача плитки однакова, то $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{m_1c(100 - t)}{m_2c(100 - t)} = \frac{m_1}{m_2}$ (2).

Враховуючи рівняння (1) отримаємо $\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{100-\Delta t-t}{\Delta t}$, звідки

$\tau_1\cdot\Delta t=100\tau_2-\tau_2\Delta t-t\tau_2$. $t=\frac{100\tau_2-\tau_2\Delta t-\tau_1\cdot\Delta t}{\tau_2}$.

Після підстановки значень t =16 ^{0}C.

II. Або строго математично виведемо рівняння (2).

Протягом часу τ_2 виділяється тепло $Q_2=(m_1+m_2)c\cdot\Delta t$. Тоді

$$\frac{\tau_2}{\tau_1}=\frac{(m_1+m_2)\Delta t}{m_1(100-t)}=\frac{m_1\Delta t+m_2\Delta t}{m_1(100-t)}=\frac{m_2(100-\Delta t-t)+m_2\Delta t}{m_1(100-t)}=\frac{m_2(100-t)}{m_1(100-t)}=\frac{m_2}{m_1}$$

182. На плиті стоїть посудина з киплячою водою (температура $t_к$=100 ^{0}C), початкова маса якої m_0. Частина води випаровується, а третина утвореної пари конденсується на шматку льоду, розташованому над посудиною і стікає назад. Початкова маса льоду m, а його початкова температура t_0=0 ^{0}C. Якою стане маса води в посудині, коли весь лід розтане? Частка пари, що конденсується, весь час постійна. Питома теплоємність води c, питома теплота плавлення льоду λ, питома теплота пароутворення води L. Теплообміном води і льоду з навколишнім середовищем нехтувати. (2015 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Нехай Δm – маса води, що випарувалася з посудини. При цьому маса пари $\frac{\Delta m}{3}$ сконденсувалася на шматку льоду і стекла потім вниз разом з талою водою, що утворилася при таненні льоду. Отже, маса води в посудині стане $M=m_0+m-\frac{2\Delta m}{3}$. Під час конденсації і охолодженні до температури плавлення льоду пара віддає кількість теплоти $L\cdot\frac{\Delta m}{3}+c\cdot\frac{\Delta m}{3}\cdot t_к$, а лід одержує кількість теплоти λm. $L\cdot\frac{\Delta m}{3}+c\cdot\frac{\Delta m}{3}\cdot t_к=\lambda m$. Звідси $\Delta m=\frac{3\lambda m}{L+ct_к}$.

Тоді маса води в посудині стане: $M=m_0+m-\frac{2\lambda m}{L+ct_к}$.

Закон Кулона

183. Дві однакові металеві кульки заряджені однойменними зарядами так, що $q_2=3q_1$, знаходяться на деякій відстані одна від одної. Кульки приводять в дотик. У скільки разів потрібно змінити відстань між кульками, щоб сила взаємодії кульок залишилася такою ж самою? (2012 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Згідно умови задачі $F_1 = F_2 = F$. Після взаємодії заряди стануть однаковими: $q = \frac{3q_1 + q_1}{2} = 2q_1$. Запишемо закон Кулона для двох випадків. Отримаємо: $F_1 = k\frac{3q_1^2}{r_1^2}$; $F_2 = k\frac{2q_1 \cdot 2q_1}{r_2^2} = \frac{4q_1^2}{r_2^2}$; $r_1^2 = \frac{k3q_1^2}{F}$; $r_2^2 = \frac{k4q_1^2}{F}$. Тоді $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

184. Дві нерухомі кульки, заряди яких становлять q_1=0,2 мкКл і $q_2=2q_1$ знаходяться на деякій відстані одна від одної. Кульки привели в дотик і відвели на ту ж відстань. Як змінилася сила кулонівської взаємодії? (2014 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Кулонівська сила в першому випадку. $F_1 = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$. Після дотику заряди кульок рівні: $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$. Тоді кулонівська сила $F_2 = k\frac{q^2}{r^2}$. $\frac{F_2}{F_1} = \frac{q^2}{q_1 q_2}$. Підставивши дані, отримаємо, що $\frac{F_2}{F_1} = \frac{9}{8}$. Але можна зробити задачу в загальному вигляді. $\frac{F_2}{F_1} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4q_1 q_2} = \frac{q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_2^2}{4q_1 q_2} = \frac{q_1}{4q_2} + \frac{1}{2} + \frac{q_2}{4q_1}$. Оскільки $q_2=2q_1$, то $\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$. Отже значення заряду в умові зайве.

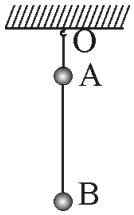
185. На шовковій нитці висить металева кулька масою 1 г, що має заряд 0,4 мкКл. Під нею на відстані 30 см по вертикалі знаходиться така ж за розмірами, але не заряджена кулька. Ці кульки на короткий час з'єднали провідником. Як змінилась сила натягу нитки після того як провідник забрали? $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$. (2010 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Сила натягу нитки $F_1 = mg = 10 \cdot 10^{-3}$ Н. Після з'єднання кульок їхні заряди

стали по 0,2 мкКл. Кулонівська сила взаємодії $F_k = k\dfrac{q^2}{r^2} = 4\cdot 10^{-3}$ Н. Кульки відштовхуються, отже сила натягу $F_2 = F_1 - F_k = 6\cdot 10^{-3}$ Н.

186. Однакові кульки масою по 0,2 г підвісили на нитках. Відстань між кульками АВ=30 см. Визначити силу натягу нитки на ділянці АВ, якщо кулькам надали однакові за модулем різнойменні заряди по 100 нКл. Яка сила натягу нитки на ділянці АО? $k = 9\cdot 10^9 \dfrac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$. (2015 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

На кульку В діє сила тяжіння mg вертикально вниз, кулонівська сила відштовхування F_k вертикально вниз, оскільки заряди однойменні і сила нятягу нитки T вертикально вгору. Кулька знаходиться в рівновазі, тому можемо записати: $T = mg + F_k$ (1). $F_k = k\dfrac{q^2}{r^2} = 10^{-3}$ Н, $mg = 2\cdot 10^{-3}$ Н. Отже сила натягу на ділянці АВ: $T = 3\cdot 10^{-3}$Н. Розглянемо сили, які діють на кульку А. Сила тяжіння mg вертикально вниз, кулонівська сила відштовхування F_k вертикально вгору, оскільки заряди однойменні, сила нятягу T нитки АВ вертикально вниз і шукана сила натягу T_1 нитки АО вертикально вгору. Кулька знаходиться в рівновазі, тому можемо записати $T_1 = mg + T - F_k$. Після підстановки виразу (1) отримаємо $T_1 = 2mg = 4\cdot 10^{-3}$ Н.

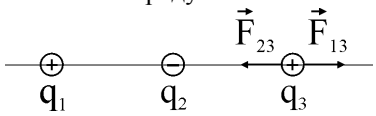
187. Заряди +40 нКл і –10 нКл розташували на відстані 10 см один від одного. Який треба взяти третій заряд і де треба його розташувати, щоб система перебувала в рівновазі? (2011 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Однозначно цей заряд повинен розташовуватися на лінії, яка з'єднує заряди і не може бути розташований між зарядами.

Нехай третій заряд позитивний. Щоб система перебувала в рівновазі, тобто рівнодійна сил, що діють на будь-який із зарядів була рівною нулю, третій заряд повинен бути розташований поблизу негативного заряду.

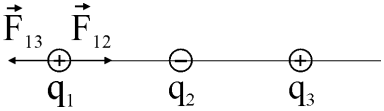
а) Сили, які діють на третій заряд з боку першого і другого повинні бути рівними: $F_{13} = F_{23}$. За законом Кулона: $F_{13} = \dfrac{kq_1q_3}{R_{13}^2}$,



$F_{23} = \dfrac{kq_2q_3}{R_{23}^2}$. $\dfrac{kq_1q_3}{R_{13}^2} = \dfrac{kq_2q_3}{R_{23}^2}$.

Підставивши значення q_1 q_2, отримаємо: $\frac{40\text{ нКл}}{R_{13}^2}=\frac{10\text{ нКл}}{R_{23}^2}$, $\frac{2}{R_{13}}=\frac{1}{R_{23}}$; $2R_{23}=R_{13}$. Це співвідношення вказує на те, що третій заряд має бути саме позитивним і розміщуватись так, як зображено на малюнку. З малюнка бачимо: $R_{13}=R_{12}+R_{23}$, $2R_{23}=R_{12}+R_{23}$, $R_{23}=R_{12}=10$ см.

б) Запишемо тепер умову рівноваги, наприклад, для першого заряду:

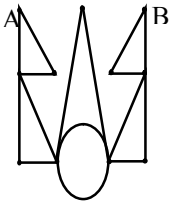


$F_{12}=F_{13}$. За законом Кулона: $F_{12}=\frac{kq_1q_2}{R_{12}^2}$,

$F_{13}=\frac{kq_1q_3}{R_{13}^2}$. $q_3=\frac{R_{13}^2}{R_{12}^2}q_2$, $q_3=4q_2=40$ нКл.

Закон Ома для ділянки кола. Розрахунок електричних кіл

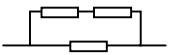
188. Розрахуйте опір R_{AB} фігури, скрученої з дроту за умови, що опір окремих ділянок дроту між з'єднаннями дорівнює R. (2002 р. II е. 9 к.)



Розв'язок

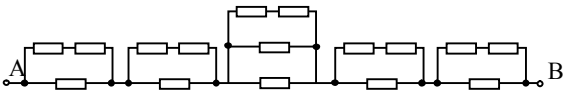
Еквівалентне коло:

Як видно з рисунка еквівалентне коло складається з таких ділянок:

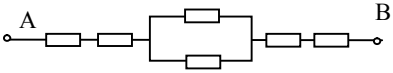


Знайдемо опір ділянки:

$R_1=\frac{2R}{3}$, тоді еквівалентне коло матиме вигляд:



Або:



Звідси $R_{AB}=4R_1+\frac{R_1R}{R_1+R}=\frac{46}{15}R$.

189. До дротяного кільця в двох точках приєднано підвідні проводи. В якому відношенні ділять точки приєднання довжину кола кільця, якщо загальний опір утвореного електричного кола в 4,5 рази менший від опору дроту, з якого зроблене кільце. (2005 р. II е. 9 к.)

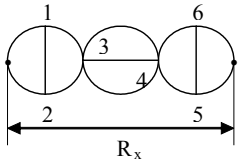
Розв'язок

Після під'єднання проводів кільце можна розглядати, як два паралельно з'єднані опори $R=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$. Опір всього дроту R_1+R_2. Згідно умови задачі

$4{,}5\cdot\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}=R_1+R_2$. Звідси $(R_1+R_2)^2=4{,}5R_1R_2$; $1+\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2-2{,}5\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)=0$.

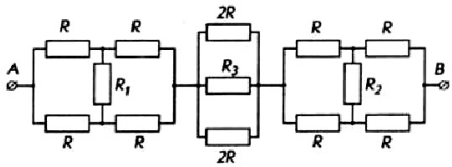
Розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо, що $\dfrac{R_2}{R_1}=2$, а отже і $\dfrac{l_2}{l_1}=2$.

190. З дротини опором R_0=4,14 Ом виготовили три однакові кільця з діаметральними перемичками. Кільця з'єднані між собою, як показано на малюнку. Визначте опір такої системи. (2005 р. II е. 9 к.)



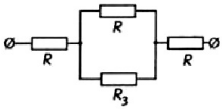
Розв'язок

Еквівалентна схема кола:



З міркувань симетрії резистори R_1 та R_2 можна викинути. Визначимо опір одиниці довжини провідника:

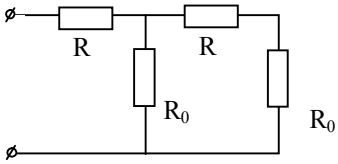
$r=\dfrac{R_0}{3(2\pi l+2l)}=\dfrac{R_0}{6l(\pi+1)}$, де l – радіус кола. Знайдемо опори R та R_3. $R=r\dfrac{\pi l}{2}=\dfrac{\pi R_0}{12(\pi+1)}$,



$R_3=2rl=\dfrac{R_0}{3(\pi+1)}$. Тоді опір електричного кола

$$R_x=2R+\frac{RR_3}{R+R_3}=R_0\frac{2\pi(\pi+6)}{12(\pi+1)(\pi+4)}=0{,}67\text{ Ом}.$$

191. Яким повинен бути опір R (мал.2), щоб загальний опір кола був R_0? (2002 р. III е. 8 к.)



Розв'язок

Загальний опір даного кола $\dfrac{(R_0+R)\cdot R_0}{2R_0+R}+R$.

Згідно з умовою він повинен дорівнювати R_0. Після спрощень отримаємо квадратне рівняння $R^2+2R_0R-R_0^2=0$, звідки $R=R_0(\sqrt{2}-1)$.

192. З однорідної дротини довжиною l і поперечним перерізом S виготовили квадрат з однією діагоналлю. Визначити опір квадрата при підключенні його різними вершинами. Питомий опір матеріалу дротини ρ.(2002 р. з. 10 к.)

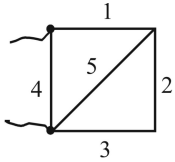
Розв'язок

Опір всієї дротини $R=\rho\dfrac{l}{S}$. Діагональ d із стороною a зв'язані

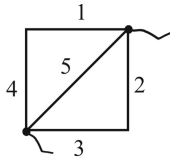
співвідношенням: $d = a\sqrt{2}$. Тоді $a\left(\sqrt{2}+4\right) = l$, опір сторони $R_1 = \dfrac{\rho l}{S\left(\sqrt{2}+4\right)}$.

Опір діагоналі $R_2 = R_1 \cdot \sqrt{2}$.

Розглянемо різні випадки під'єднання.

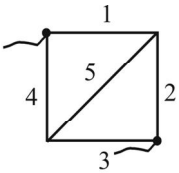


а) Ділянки 2 і 3 з'єднані послідовно: $R_{2,3} = 2R_1$. Діагональ до них під'єднана паралельно: $R_{2,3.5} = \dfrac{2R_1 \cdot R_2}{2R_1 + R_2}$. Ділянка 1 під'єднана послідовно: $R_{1,2,3,5} = \dfrac{2R_1^2 + 3R_1R_2}{2R_1 + R_2}$. Ділянка 4 під'єднана паралельно: $R_{заг.} = \dfrac{2R_1^3 + 3R_1^2R_2}{4R_1^2 + 4R_1R_2} = \dfrac{\dfrac{\rho l}{S\left(\sqrt{2}+4\right)} \cdot \left(2+3\sqrt{2}\right)}{4+4\sqrt{2}}$.



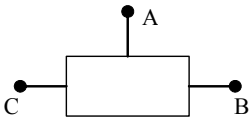
б) Ділянки 1,4 та ділянки 2,3 з'єднані послідовно: $R_{1,4} = R_{2,3} = 2R_1$. Між собою вони з'єднані паралельно: $R_{1,2,3,4} = R_1$ і з ділянкою 5 - теж паралельно:

$$R_{заг.} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho l \cdot \sqrt{2}}{S\left(\sqrt{2}+4\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$



в) Точки, з яких виходить діагональ – це точки рівного потенціалу, тому діагональ для загального опору ролі не грає. Отже, $R_{заг.} = \dfrac{2R_1}{2} = R_1 = \dfrac{\rho l}{S\left(\sqrt{2}+4\right)}$.

193. «Чорний ящик» має три клеми A, B, C . Відомо, що в ньому є тільки резистори. Опори «чорного ящика» при підключенні до різних пар клем такі: R_{AB}=5 Ом, R_{BC}=8 Ом, R_{AC}=9 Ом. Запропонуйте схему «чорного ящика», який містить мінімально можливе число резисторів. (2007 р. II е. 9 к.)

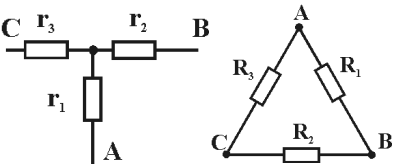


Розв'язок

Умову задачі задовільняють лише схеми, показані на малюнках.

Для схеми 1: $R_{AB} = r_1 + r_2$, $R_{BC} = r_2 + r_3$, $R_{AC} = r_1 + r_3$. $r_1 = 3$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $r_3 = 6$ Ом.

Для схеми 2 :



1 2

$$R_{AB}=\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}\ (1);\ R_{BC}=\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}\ (2);\ R_{AC}=\frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3}\ (3).$$

Додавши перші два рівняння і віднявши третє отримуємо:

$$2R_1R_2=(R_{AB}+R_{BC}-R_{AC})(R_1+R_2+R_3)\ \ (4).$$

Аналогічно отримаємо вираз для R_2R_3 та R_1R_3.

$$2R_1R_3=(R_{AB}+R_{AC}-R_{BC})(R_1+R_2+R_3)\ (5).$$

$$2R_2R_3=(R_{BC}+R_{AC}-R_{AB})(R_1+R_2+R_3)\ (6).$$

Почленно їх розділивши і підставивши значення R_{AB}, R_{BC}, R_{AC}, знаходимо: $\frac{R_2}{R_1}=2, \frac{R_3}{R_1}=3$. Виражаючи в будь-якому з рівнянь 4,5,6 R_2 і R_3 через R_1, знаходимо: $R_1=6$ Ом, $R_2=12$ Ом, $R_3=18$ Ом.

194. Через дріт проходить струм 2 А. Дріт пропустили через волочильний верстат, внаслідок чого його довжина зросла вдвічі. Якою буде сила струму в дроті, якщо його під'єднати до того ж джерела живлення? (2013 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки дріт пропустили через волочильний верстат і його довжина зросла вдвічі, то площа поперечного перерізу дроту зменшилася вдвічі.

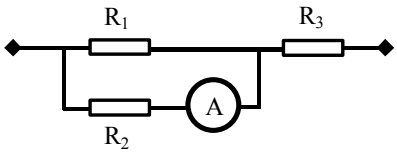
Аналізуючи формулу опору $R=\rho\frac{l}{S}$, робимо висновок, що опір дроту збільшився в 4 рази. Оскільки напруга джерела струму не змінилась, то згідно закону Ома $I=\frac{U}{R}$ збільшення опору в 4 рази призведе до зменшення сили струму в 4 рази. Отже I_2=0,5 А.

195. Електровимірювальний прилад з ціною поділки 1 мкА має 100 поділок. Як за допомогою цього приладу виміряти напругу 220 В? Внутрішній опір приладу 1 Ом. (2002 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Для вимірювання напруги U послідовно з вимірювальним приладом треба ввести додатковий опір R, який визначимо із співвідношення: $R=\frac{U-Ir}{I}=\frac{U}{I}-r$, де I – значення струму, який можна виміряти приладом, r – значення опору провідника. $R=\frac{220\text{ В}}{10^{-4}\text{ А}}-1\text{ Ом}=2199999$ Ом.

196. Амперметр у схемі, зображеній на малюнку, показує 0,25 А. Якими будуть покази амперметра, якщо опори R_1 і R_3



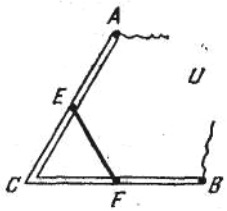
поміняти місцями, а напругу залишити незмінною? R_1=R_2=100 Ом, R_3=200 Ом. (2002 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

Знайдемо напругу на кінцях схеми. $U = 0{,}5\ \text{А} \cdot (50\ \text{Ом} + 200\ \text{Ом}) = 125\ \text{В}$. Коли опори переставимо: $R_{заг} = \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_1 = \dfrac{500}{3}\ \text{Ом}$,

$I_{заг} = \dfrac{U}{R_{заг}} = 0{,}75\ \text{А}$. Враховуючи, що в новій схемі $\dfrac{I_3}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_3}$, визначаємо, що через R_3 йде струм 0,25 А, а через R_2 – струм 0,5 А, отже амперметр показуватиме 0,5 А.

197. Дріт АСВ зігнутий так, що точки А, С і В знаходяться у вершинах правильного трикутника. До середин сторін АС і ВС під'єднана перемичка EF із дроту з вдвічі меншою площею перерізу. До точок А і В прикладено напругу U=3 В. Знайти спад напруги на перемичці. (2012 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

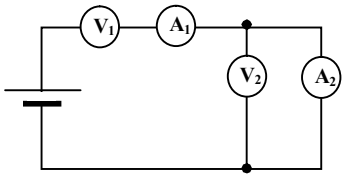
Очевидно, що опори ділянок CE, EA, CF, FB – рівні, оскільки дані провідники мають однакові площі поперечного перерізу і довжину. Позначимо їх R.

Якщо S – площа поперечного перерізу провідника АСВ, то площа поперечного перерізу перемички $\dfrac{S}{2}$, а її опір $R_x = 2R$.

Знайдемо загальний опір ділянки EF (R_{EF}): $\dfrac{1}{R_{EF}} = \dfrac{1}{R+R} + \dfrac{1}{2R} \Rightarrow R_{EF} = R$.

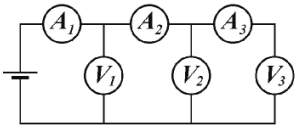
Отже, загальний опір ділянки АВ рівний: $R + R + R = 3R$. Загальна сила струму в колі $I = \dfrac{U_{заг}}{R_{заг}} = \dfrac{U_{заг}}{3R}$. Падіння напруги на ділянці EF і відповідно на перемичці $U_{EF} = I \cdot R = \dfrac{U_{заг}}{3R} \cdot R = \dfrac{U_{заг}}{3} = 1\ \text{В}$.

198. Схему збирають з батарейки, двох однакових амперметрів і двох однакових вольтметрів. Амперметри A_1 і A_2 показують відповідно, I_1=1,2 мА і I_2=1 мА; вольтметр V_2 показує $U_2 = 0{,}25$ В. Що показує вольтметр V_1? Чому дорівнює напруга батареї? (2003 р. III е. 10 к.)



Розв'язок

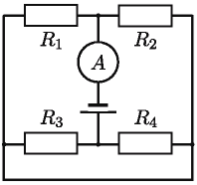
Опір амперметра A_2: $R_A = \frac{U_2}{I_2} = 250$ Ом. Напруга на амперметрі A_1: $U_3 = I_1 R_A = 0{,}3$ В. Струм через вольтметр V_2: $I = I_1 - I_2 = 0{,}2$ мА. Опір вольтметра V_2: $R_в = \frac{U_2}{I} = 1250$ Ом. Напруга на вольтметрі V_1: $U_1 = I_1 \cdot R_в = 1{,}5$ В. Напруга батареї $U = U_1 + U_2 + U_3 = 2{,}05$ В.



199. Електрична схема складається з трьох різних амперметрів і трьох однакових вольтметрів. Покази першого амперметра I_1 = 15 мА, другого – I_2 = 11 мА, третього – I_3 = 6 мА. Покази другого вольтметра U_2=10 В. Визначте покази першого і третього вольтметра. (2009 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

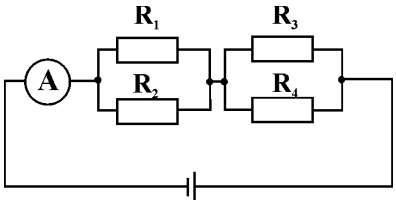
Через другий вольтметр протікає струм $I_{V2} = I_2 - I_3 = 5$ мА. Внутрішні опори вольтметрів однакові: $R = \frac{U_2}{I_{V2}} = 2$ кОм. Через перший вольтметр протікає струм $I_{V1} = I_1 - I_2 = 4$ мА. Тоді він показує значення напруги $U_1 = I_{V1} R = 8$ В. Через третій вольтметр протікає струм $I_{V3} = I_3 = 6$ мА, таким чином $U_3 = I_{V3} R = 12$ В.



200. Електричне коло складається з джерела живлення з напругою U = 4,5 В, ідеального амперметра і чотирьох резисторів з опорами R_1 = 40 Ом, R_2 = 60 Ом, R_3 = 80 Ом, R_4 = 20 Ом. Що показує амперметр? (2011 р. ІІІ е. 9 к.)

Розв'язок

Дану схему можна замінити еквівалентною:



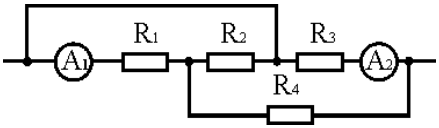
Опір І ділянки: $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; $R_{12} = 24$ Ом.

Опір ІІ ділянки: $R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$; $R_{34} = 16$ Ом.

Оскільки обидві ділянки з'єднані послідовно, то загальний опір: $R = R_{12} + R_{34}$. $R = 24$ Ом $+ 16$ Ом $= 40$ Ом. За законом Ома:

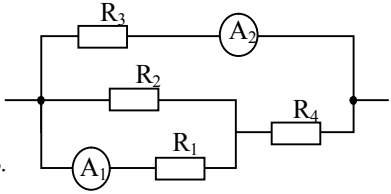
$I = \frac{U}{R}$; $I = \frac{4{,}5 \text{ В}}{40 \text{ Ом}} = 0{,}1125 \text{ А} = 112{,}5$ мА.

201. Покази першого амперметра у схемі I_1=0,6 А. Що покаже другий амперметр, якщо значення опорів резисторів відповідно дорівнюють R_1=20 Ом, R_2=30 Ом, R_3=80 Ом, R_4=8 Ом? Визначити загальний опір кола. (2005 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

Намалюємо еквівалентну схему:



$U_1=U_2=U_{1,2}= I_1 \cdot R_1$=0,6 А·20 Ом=12 В;

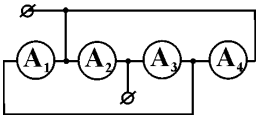
$I_2 = \dfrac{U_2}{R_2}$ =0,4 А; $I_{1,2}= I_4$=0,6 А+0,4 А=1 А.

$U_4= I_4 \cdot R_4$=1 А· 8 Ом=8 В; $U_{заг.}= U_{1,2}+ U_4$=20 В.

$I_3 = \dfrac{U_3}{R_3} = \dfrac{U_{заг}}{R_3}$ =0,25 А. Це якраз і будуть покази другого амперметра.

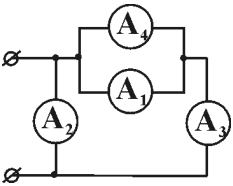
$I_{заг}= I_3+ I_4$=0,25 А+1 А=1,25 А. $R_{заг} = \dfrac{U_{заг}}{I_{заг}}$ =16 Ом.

202. З чотирьох однакових амперметрів склали коло, яке під'єднали до джерела з невисокою напругою. Визначте покази кожного амперметра, якщо сума показів всіх амперметрів 49 А. (2016 р. ІІІ е. 10 к.)

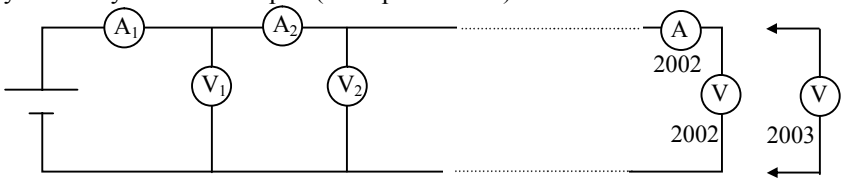


Розв'язок

Зобразимо еквівалентну схему. Оскільки амперметри однакові, то й однакові їхні внутрішні опори. Отже $I_1=I_4$. Виразимо всі струми через струм I_1. $I_1+I_4= I_3$, або $I_3=2I_1$. Для напруг можна записати: $U_{14}=U_1=U_4$; $U_{14}+U_3= U_2$. Нехай опір амперметра r. Тоді $I_1r+I_3r=I_2r$, або $I_2=3I_1$. Згідно умови $I_1+I_2+I_3+I_4=7I_1$=49 А. I_1=7 А. Тоді I_2=21 А, I_3=14 А, I_4=7 А.



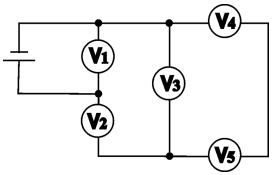
203. В електричній схемі ввімкнено 2002 різних амперметри і 2002 однакових вольтметри. Якщо до останнього вольтметра під'єднати паралельно ще один такий же вольтметр, то він покаже напругу 1,5 В, а покази першого і 2002 амперметра відповідно становитимуть I_1=100 мА, I_{2002}=10 мА. Знайти загальну суму показів усіх вольтметрів. (2002 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

Оскільки I_{2002}=10 мА, то через вольтметри V_{2002} і V_{2003} проходить струм 5 мА. Знаючи напругу, що показує вольтметр V_{2003}, знайдемо його опір: $R = \frac{1{,}5\ \text{В}}{0{,}005\ \text{А}} = 300\ \text{Ом}$. Амперметр I_{2002} показує струм, який проходить через вольтметри V_{2002} і V_{2003}. Аналізуючи послідовно покази амперметрів, приходимо до висновку, що амперметр I_1 покаже струм, який дорівнює сумі всіх сил струмів, що проходять через всі вольтметри. Тому $\sum U = R\left(I_{V1} + I_{V2} + \ldots + I_{V2003}\right) = R \cdot I_1 = 30\ \text{В}$.

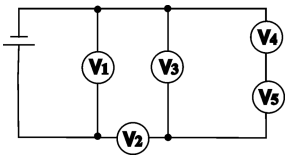
204. Із п'яти однакових вольтметрів, один з яких дає хибні покази, зібрана схема, зображена на малюнку. Покази вольтметрів становлять: U_1=15 В, U_2=8 В, U_3=6 В, U_4=3 В, U_5=3 В. Який з вольтметрів несправний і якими повинні бути реальні покази цього вольтметра? (2006 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

Перемалюємо схему. U_3=U_4+U_5. Перевіряємо умову 6 В=3 В + 3 В. Умова виконується.

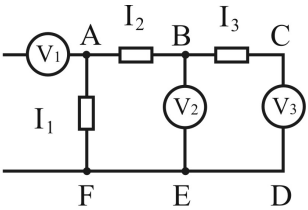
U_1=U_2+U_3. 15 В = 8 В + 6 В – не виконується. Отже несправний або 1, або 2 вольтметр. Запишемо ще одне рівняння I_2=I_3+$I_{4,5}$, або $\frac{U_2}{R_в} = \frac{U_3}{R_в} + \frac{U_4}{R_в}$;



U_2=U_3+U_4; 8 В = 6 В + 3 В – не виконується.

Бачимо, що другий вольтметр повинен показувати 9 В, тоді всі умови виконуватимуться. Отже, несправний другий вольтметр.

205. Електричне коло, схема якого зображена на малюнку, зібрано з однакових вольтметрів і резисторів. Визначити покази другого вольтметра, якщо покази першого і третього вольтметра відповідно становлять: U_1=152 В, U_3=10 В. (2006 р. з. 9 к.)



Розв'язок

$I_3 = \frac{U_3}{r}$ (r –опір вольтметра).

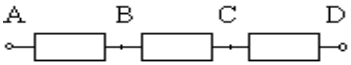
Напруга на ділянці BCD рівна напрузі на BE. Маємо $U_2 = I_3 R + U_3 = U_3 \frac{R}{r} + U_3$ (1), де R – опір резистора. $I_2 = \frac{U_2}{r} + I_3 = \frac{U_2 + U_3}{r}$.

Напруга на ABE рівна напрузі на AF: $I_1R = U_2 + (U_2 + U_3)\frac{R}{r}$.

$I_1 = \frac{U_1}{r} - I_2 = \frac{U_1 - U_2 - U_3}{r}$. $\left(U_1 - U_2 - U_3\right)\frac{R}{r} = U_2 + \left(U_2 + U_3\right)\frac{R}{r}$ (2). З рівняння (1) $\frac{R}{r} = \frac{U_2 - U_3}{U_3}$. $U_2 = \left(U_1 - 2(U_2 + U_3)\right)\frac{U_2 - U_3}{U_2}$.

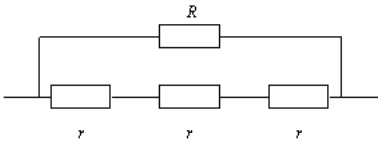
$2U_2^2 + (U_3 - U_1)U_2 - 2U_3^2 + U_1U_3 = 0$. Тут доцільно підставити значення, адже в такій формі запису не отримаємо раціональної відповіді.

$2U_2^2 - 142U_2 + 1320 = 0$. U_2=60 В або U_2=11 В.

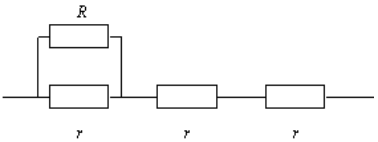


206. Юний фізик зібрав схему з трьох однакових резисторів, підключив її до джерела постійного струму (яке можна вважати ідеальним). Вимірюючи вольтметром напругу між точками A і D, а потім між точками A і B він одержав результати: U_1=3 В і U_2=0,9 В відповідно. Тоді юний фізик з'єднав точки B і D провідником (опором якого можна нехтувати) і виміряв напругу між точками A і C. Які покази зафіксував вольтметр? (2008 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

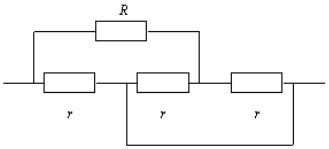


Оскільки напруги U_1 та U_2 відрізняється не в 3 рази, то вольтметр у юного фізика був не ідеальний. Нехай опір вольтметра R, а опір кожного резистора r. Перша схема:



В цій схемі вольтметр показує напругу на джерелі струму, отже напруга джерела U_1.

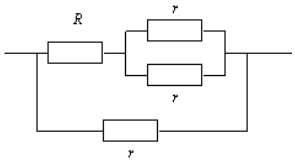
Друга схема: Загальний опір кола $\frac{R \cdot r}{R + r} + 2r$, струм в колі $I = \frac{U_1}{\frac{Rr}{R + r} + 2r}$, а напруга, яку показує вольтметр



$U_2 = \frac{U_1}{\frac{Rr}{R + r} + 2r} \cdot \frac{Rr}{R + r}$. $U_2 = U_1 \cdot \frac{Rr}{3Rr + 2r^2}$.

Звідси $\frac{U_1}{U_2} = 3 + 2\frac{r}{R}$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{6}$.

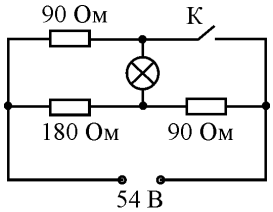
Третя схема і їй еквівалентна:



В цій схемі струм через вольтметр $I = \dfrac{U_1}{R + \dfrac{r}{2}}$. Тоді вольтметр покаже

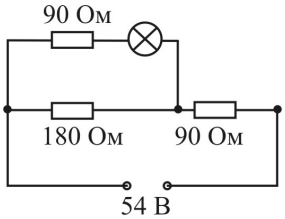
$U_3 = \dfrac{U_1 \cdot R}{R + \dfrac{r}{2}}$. $\dfrac{U_1}{U_3} = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{r}{R} = \dfrac{13}{12}$. $U_3 = \dfrac{12U_1}{13} \approx 2{,}77$ В.

207. В електричному колі, схема якого зображена на малюнку лампочка горить однаково яскраво як при замкнутому, так і при розімкнутому ключі К. Знайти напругу на лампочці і її опір. (2007 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

Якщо лампочка горить однаково, то у обох випадках напруга на лампочці однакова. Нехай опір лампочки R, а напруга на ній U. Розглянемо перший випадок, коли ключ незамкнутий. Сила струму в лампочці і відповідно у резисторі опором 90 Ом: $I = \dfrac{U}{R}$.

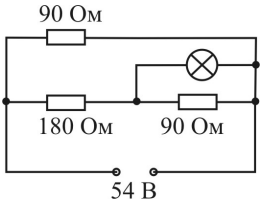


Напруга на резисторі і лампочці, а отже і на ділянці, що містить паралельне з'єднання: $U_1 = U + 90 \cdot \dfrac{U}{R}$.

Сила струму на цій ділянці становить $\dfrac{U}{R} + \dfrac{U_1}{180}$. Тоді для напруг можна записати:

$$U + 90 \cdot \frac{U}{R} + 90 \cdot \left(\frac{U}{R} + \frac{U + 90 \cdot \dfrac{U}{R}}{180} \right) = 54. \qquad U + 180\frac{U}{R} + \frac{U}{2} + 45\frac{U}{R} = 54.$$

$\dfrac{3}{2}U + 225\dfrac{U}{R} = 54$ (1).



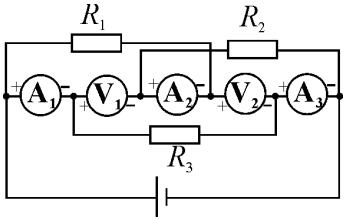
Після замикання ключа схему можна перемалювати так:

Сила струму на ділянці паралельного з'єднання лампочки і резистора становить $\dfrac{U}{R} + \dfrac{U}{90}$. Знову для напруг можна записати: $U + 180 \cdot \left(\dfrac{U}{R} + \dfrac{U}{90} \right) = 54$; $3U + 180\dfrac{U}{R} = 54$ (2).

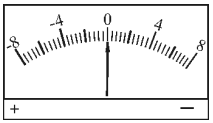
Розв'яжемо систему рівнянь 1 і 2:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}U + 225\frac{U}{R} = 54 \\ 3U + 180\frac{U}{R} = 54 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3U + 450\frac{U}{R} = 108 \\ 3U + 180\frac{U}{R} = 54 \end{cases}. \quad \frac{U}{R} = \frac{2}{10}.$$ Підставимо у (2):

$3U+36=54$. $U=6$В. $R=30$ Ом.

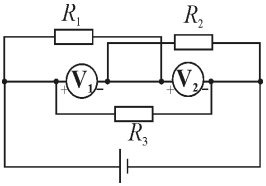


208. Експериментатор з'єднав послідовно ідеальні амперметри і вольтметри, а до них три опори так як показано на малюнку. Це коло він під'єднав до джерела струму напругою 12 В. Визначити покази вольтметрів та амперметрів, якщо R_1=1 Ом, R_2=3 Ом, R_3=2 Ом. В яку сторону відхиляться стрілки приладів, якщо при під'єднанні їхніх клем, позначених «+» до додатнього полюса джерела струму, а «–» до від'ємного полюса, стрілка приладу, зображеного на малюнку відхиляється вправо? (2016 р. ІІІ е. 9 к.)



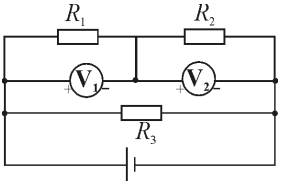
Розв'язок

Оскільки амперметри ідеальні, то їх опір дорівнює нулю і на схемі замість них можна поставити перемички. Отримаємо наступну схему (мал.1).



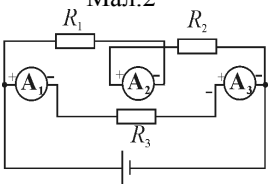
Мал.1

Або трохи перемалювавши (мал.2), бачимо, що вольтметр V_1 під'єднано паралельно до опору R_1, а вольтметр V_2 – паралельно до опору R_2. Струм через опори R_1, R_2: $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$ = 3 А. Тоді $U_1 = I \cdot R_1$ = 3 В, $U_2 = I \cdot R_2$ =9 В. Стрілка відхилиться вправо, бо полярність під'єднання правильна.



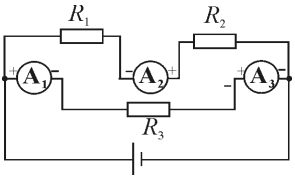
Мал.2

Тепер визначимо покази амперметрів. Оскільки вольтметри ідеальні, то їх опір нескінчений, отже з кола їх можна вилучити. Отримаємо схему (мал.3) .



Або перемалювавши амперметр A_2, отримаємо схему (мал.4). Бачимо, що $I_1 = I_3 = \frac{U}{R_3}$ = 6 А.

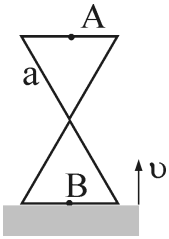
$I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = -3$ А. Стрілка амперметра A_2 відхилиться вліво, бо порушена полярність під'єднання.



Мал.4

209. Дротяний каркас у вигляді двох однакових рівносторонніх трикутників стороною a складається з фотоопорів, опір яких залежить від освітлення. В тіні одиниця довжини має опір $2r$, а на сонці r. Тінь рухається рівномірно з швидкістю υ. Побудувати графік залежності опору R між точками А і В від часу t. На початку вся система освітлена і межа тіні знаходиться біля точки В. (2014 р. ІІІ е. 11 к.)

Розв'язок



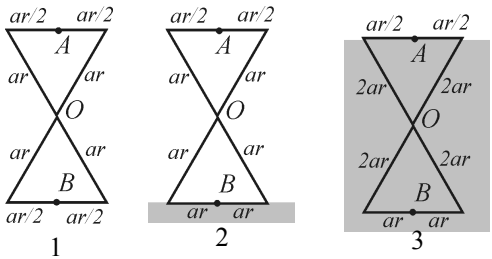
Опір освітленої сторони трикутника ar, неосвітленої – $2ar$.

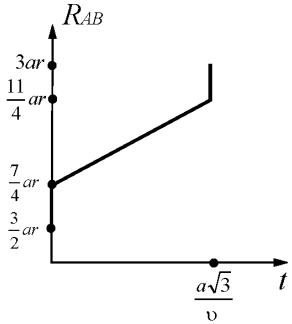
Знайдемо опір освітленого трикутника між точками А і О: $\dfrac{ar+\dfrac{ar}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}ar$. Опір між точками О і В такий самий, отже загальний опір освітленого каркасу: $R_1=\dfrac{3}{2}ar$ (мал.1).

Тоді загальний опір неосвітленого каркасу вдвічі більший, тобто $3ar$.

Тінь відразу накриває нижню сторону і опір скачкоподібно збільшується.

Опір між точками О і В буде ar (мал.2), отже опір каркасу $R_2=\dfrac{3}{4}ar+ar=\dfrac{7}{4}ar$. Потім тінь рухається рівномірно і в момент часу $t=\dfrac{a\sqrt{3}}{\upsilon}$ накриє весь каркас крім верхньої сторони. $R_3=\dfrac{3}{2}ar+\dfrac{5}{4}ar=\dfrac{11}{4}ar$ (мал.3). І нарешті тінь накриє верхню сторону і опір знову збільшиться стрибком і стане рівним загальному опору неосвітленого каркасу. $R_4=3ar$. Будуємо графік:





Робота і потужність електричного струму

210. Електродвигун трамвая працює під напругою 600 В, споживаючи силу струму 100 А. Опір обмотки двигуна 3 Ом. Визначити силу тяги двигуна, якщо трамвай рухається рівномірно зі швидкістю 36 км/год. (2005 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Споживана потужність двигуном трамвая $N=UI-I^2R=3\cdot10^4$ Вт. Сила тяги $F=\dfrac{N}{\upsilon}=3\cdot10^3$ Н.

211. Електрична лампочка потужністю 60 Вт занурена в прозорий калориметр, в якому міститься 600 г води. За 5 хв. вода нагрілася на 4 ^{0}С. Нехтуючи теплоємністю калориметра, визначте енергію лампочки, яка виділилася у виді випромінювання. $c_в$=4200 Дж/(кг·^{0}С). (2002 р. з. 9 к.)

Розв'язок

У виді випромінювання виділиться кількість теплоти $\Delta Q = Pt - cm\Delta t = 7920$Дж, де Pt – кількість теплоти, яку виділяє лампочка, а $cm\Delta t$ – теплота на нагрівання води. Після підстановки даних ΔQ=7920 Дж.

212. Алюмінієвий провідник діаметром d=2,5 мм покритий льодом. Загальний діаметр провідника і льоду D=3,5 мм, температура провідника і льоду 0 ^{0}С. По провіднику пропускають струм I=5 А. За який час лід розтане? $\rho_л$=900 кг/м^3, $\lambda_л$=330 кДж/кг, питомий опір алюмінію ρ=0,028·10^{-6} Ом·м. (2010 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

При проходженні струму через провідник в ньому виділяється тепло згідно закону Джоуля-Ленца: $Q = I^2R\tau$, де τ – час плавлення льоду, а R – опір провідника. Цей опір $R=\dfrac{\rho l}{S}=\dfrac{4\rho l}{\pi d^2}$, де l – довжина провідника, S – площа його поперечного перерізу. Ця кількість теплоти йде на плавлення льоду: $Q=\lambda m$. Маса льоду $m=\rho_л V=\rho_л\dfrac{\pi\left(D^2-d^2\right)}{4}l$. Прирівнявши отримані рівняння для кількості теплоти, отримаємо: $\tau=\dfrac{\lambda\rho_л\pi^2d^2\left(D^2-d^2\right)}{16I^2\rho}\approx166$ хв.

213. Через спіраль електричного чайника, увімкненого в мережу з напругою 220 В, проходить струм 5 А. В чайнику закипіла вода. Скільки википить води, якщо протягом 2,5 хв чайник не вимикати з мережі? ККД чайника 75%. $L_в$=2,3·10^6 Дж/кг. (2011 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Так, як вода доведена до температури кипіння (100 ^{0}C) то визначимо затрачену енергію за 2,5 хв – час протягом якого в чайнику кипить вода:

$Q_з = I^2Rt$ або враховуючи, що $R = \frac{U}{I}$, $Q_з = IUt$. $Q_з = 165$ кДж.

Враховуючи, що $\eta = 75\%$, корисна енергія $Q_к = 0{,}75Q_з$. $Q_к = 123750$ Дж. З іншого боку $Q_к = Lm$. Звідси визначимо масу води, що википить з чайника за 2,5 хв або 150 с. $m = \frac{123750 \text{ Дж}}{2300000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = 0{,}0538$ кг.

214. Дві однакові електроплитки з'єднані послідовно і ввімкнуті в електромережу. При тривалій роботі спіралі плиток нагріваються до температури 120 ^{0}C. До якої температури нагріваються спіралі плиток, якщо їх ввімкнути паралельно? Температура повітря в кімнаті 20 ^{0}C. Зміною опору при нагріванні знехтувати. (2001 р. II е. 9 к.)

Розв'язок

При послідовному з'єднанні плиток закон збереження енергії можна записати: $\frac{U^2}{2R}t = mc\Delta t_1$, де $2R$ – загальний опір спіралей плиток, Δt_1=100 ^{0}C.

При паралельному з'єднанні цей закон запишеться $\frac{U^2}{\frac{R}{2}}t = mc\Delta t_2$, де $R/2$ – загальний опір спіралей. Поділивши одне рівняння на друге, отримаємо $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{4}$. Звідси $\Delta t_2 = 4\Delta t_1 = 400^0$C. Отже, спіралі плиток при паралельному з'єднанні нагріються до 400 ^{0}C +20 ^{0}C =420 ^{0}C.

215. Електроплитка підключена до незмінної напруги послідовно з реостатом. Коли опір плитки збільшили в 2 рази, її потужність зменшилась і становила $n_1 = \frac{169}{200}$ початкової. Як зміниться потужність плитки, коли її опір зменшити в 2 рази? (2003 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Початкова потужність плитки $P_0 = \frac{U^2}{(R_0 + R)^2} \cdot R$, де R_0 – опір реостата, R – опір плитки. Після збільшення і зменшення опору:

$$P_1 = \frac{U^2}{(R_0+2R)^2}\cdot 2R;\quad P_2 = \frac{U^2}{\left(R_0+\frac{1}{2}R\right)^2}\cdot\frac{1}{2}R.\quad n_1 = \frac{P_1}{P_0} = 2\cdot\left(\frac{R_0+R}{R_0+2R}\right)^2.$$

$$\frac{169}{400} = \left(\frac{R_0+R}{R_0+2R}\right)^2.\quad R = \frac{7}{6}R_0.\ \text{Тоді}\ n_2 = \frac{P_2}{P_0} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{R_0+R}{R_0+0{,}5R}\right)^2 = \frac{338}{361} \approx 0{,}936.$$

216. Електроплитка має три спіралі опором R=120 Ом кожна, які з'єднані паралельно. Плитка вмикається в мережу послідовно з резистором, опір якого r=20 Ом. Як зміниться час, необхідний для нагрівання на цій плитці чайника з водою до кипіння, якщо одна із спіралей перегорить? (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Опір плитки з трьома паралельно з'єднаними спіралями $R_1 = \frac{R}{3} = 40$ Ом. Після перегоряння однієї спіралі опір плитки $R_2 = \frac{R}{2} = 60$ Ом. До перегоряння спіралі у колі йде струм $I_1 = \frac{U}{R_1+r}$, де U - напруга мережі. Після перегоряння спіралі у колі йде струм $I_2 = \frac{U}{R_2+r}$. Кількість теплоти, яка необхідна для нагрівання чайника з водою до кипіння у першому випадку, виділяється за час $t_1 = \frac{Q}{I_1^2 R_1} = \frac{Q(R_1+r)^2}{U^2 R_1}$,

у другому випадку за час $t_2 = \frac{Q}{I_2^2 R_2} = \frac{Q(R_2+r)^2}{U^2 R_2}$. Знайдемо відношення часів t_1 і t_2: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{(R_1+r)^2 R_2}{(R_2+r)^2 R_1} = \frac{27}{32} \Rightarrow t_2 \approx 1{,}2t_1$. Час збільшиться в 1,2 раза.

217. За допомогою нагрівача потужністю 500 Вт нагрівають воду в посудині за 2 хв на 1 ^{0}С . Ця ж вода в посудині без нагрівача охолоджується за 1 хв також на 1 ^{0}С. Знайдіть масу води в посудині, якщо втрати кількості теплоти за рахунок теплопередачі навколишньому середовищу пропорційні часу. Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг·^{0}С). (2002 р. II е. 8 к.)

Розв'язок

Частина енергії електричного струму ($A = Pt_1$) йде на нагрівання води $cm\Delta T$, частина на випромінювання у навколишнє середовище αt_1 (α - коефіцієнт тепловіддачі). $Pt_1 = cm\Delta T + \alpha t_1$ (1).

Після вимкнення нагрівника вода охолоджується і енергія йде у навколишнє середовище. Тому $cm\Delta T = \alpha t_2$ (2).
З розв'язку системи рівнянь теплового балансу одержимо:

$$\alpha = \frac{Pt_1}{t_1 + t_2},\ m = \frac{\alpha t_2}{c\Delta T} = \frac{Pt_1 t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} \approx 4{,}8 \text{ кг.}$$

218. Кип'ятильник нагріває воду від 80 ^{0}C до 82 ^{0}C за 10 с, а два таких кип'ятильники – за 4 с. Обчисліть ККД у випадках нагрівання одним і двома кип'ятильниками. (2003 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

Потужність теплових втрат $P_{втр.}$ в обох випадках однакова, і її можна вважати сталою. Зміна внутрішньої енергії однакова. Тому $Pt_1 - P_{втр.}t_1 = 2Pt_2 - P_{втр.}t_2$. Звідси $P_{втр.} = \frac{P(t_1 - 2t_2)}{t_1 - t_2}$

$$\eta_1 = \frac{P - P_{втр.}}{P} = \frac{t_2}{t_1 - t_2} \approx 67\%,\quad \eta_2 = \frac{2P - P_{втр.}}{2P} = \frac{t_1}{2(t_1 - t_2)} = \frac{5}{6} \approx 83\%.$$

219. При напрузі 220 В кип'ятильник нагріває воду від 90 ^{0}C до 92 ^{0}C за 10 с. Коли напруга зменшилася на 20 %, час нагрівання зріс до 20 с. При якій напрузі кип'ятильник не зможе нагріти воду до 92 ^{0}C? (2008 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Потужність теплових втрат $P_{втр.}$ залежить від різниці температур і для заданого діапазону її можна вважати сталою. В обох випадках зміна внутрішньої енергії води однакова, тому $P_1 t_1 - P_{втр.} \cdot t_1 = P_2 t_2 - P_{втр.} \cdot t_2$.

Звідси $P_{втр.} = \frac{P_2 t_2 - P_1 t_1}{t_2 - t_1}$.

Оскільки $P_1 = \frac{U_1^2}{R}$, а $P_2 = \frac{U_2^2}{R}$ і згідно умови $U_2 = 0{,}8U_1$,

то $P_2 = \frac{U_2^2}{U_1^2} \cdot P_1 = 0{,}64P_1$. Тоді $P_{втр.} = \frac{0{,}64P_1 t_1 - P_1 t_1}{t_2 - t_1} = 0{,}28P_1$.

Зростання температури припиниться, коли вся потужність піде на теплові втрати:

$$P_3 = P_{втр.} = \frac{U_3^2}{R};\qquad \frac{U_3^2}{R} = 0{,}28\frac{U_1^2}{R};\qquad U_3 = \sqrt{0{,}28}U_1 \approx 116 \text{ В}.$$

220. Дві спіралі електрочайника з опорами відповідно R_1 і R_2 з'єднані послідовно. У скільки разів може змінитися потужність електрочайника при заміні послідовного з'єднання спіралей на паралельне? (2003 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Опір спіралей при послідовному з'єднанні R_1+R_2, при паралельному – $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Оскільки потужність визначається формулою $P=\frac{U^2}{R}$, то відношення потужностей обернено пропорційне відношенню опорів.

$\frac{P_{пар.}}{P_{посл.}}=\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1R_2}=\frac{R_1}{R_2}+2+\frac{R_2}{R_1}$. Найменше значення виразу $\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_2}{R_1}$ становить 2 у випадку рівності R_1 і R_2. Тоді $\frac{P_{пар.}}{P_{посл.}}\geq 4$. Отже потужність може збільшитись в 4 рази і більше.

221. В електричному чайнику потужністю 300 Вт і електричному самоварі потужністю 600 Вт при ввімкненні їх у мережу з напругою 220 В вода закипає одночасно через 20 хв. Через який час закипить ця ж вода у самоварі і чайнику, якщо їх з'єднати послідовно і ввімкнути у мережу? (Зміною маси при випаровуванні нехтувати.) (2004 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Кількість теплоти, необхідна для закипання води в чайнику і самоварі відповідно $Q_1=P_1t$, $Q_2=P_2t$. Опір нагрівника чайника і самовара відповідно $R_1=\frac{U^2}{P_1}$, $R_2=\frac{U^2}{P_2}$. При послідовному з'єднанні кількість теплоти необхідна для закипання води в чайнику і самоварі відповідно $Q_1'=I^2\frac{U^2}{P_1}t_1$, $Q_2'=I^2\frac{U^2}{P_2}t_2$, де $I=\frac{U}{\frac{U^2}{P_1}+\frac{U^2}{P_2}}=\frac{P_1P_2}{U(P_1+P_2)}$. Оскільки $Q_1=Q_1'$, $Q_2=Q_2'$, то отримаємо: $t_1=\frac{(P_1+P_2)^2t}{P_2^2}=45$ хв, $t_2=\frac{(P_1+P_2)^2t}{P_1^2}=180$ хв.

222. Електронагрівник має три однакові спіралі. Дві паралельно з'єднані спіралі під'єднані послідовно з третьою. Нагрівник опущено в посудину з водою. Через τ_0 = 9 хв, коли вода нагрілась від температури t_1 = 20 ^{0}C до температури t_2 = 50 ^{0}C, спіраль в паралельному з'єднанні перегоріла. На

скільки більше часу із-за цього доведеться чекати, поки вода закипить? Втрати теплоти не враховувати, напруга на клемах стала. (2012 р. ІІІ е. 10 к.)

Розв'язок

Нехай опір спіралі *r*. До перегоряння спіралі загальний опір $R = \frac{3}{2}r$.

Кількість теплоти, яка виділиться $Q = \frac{U^2}{R} \cdot \tau_0 = cm(t_2 - t_1)$. Або $\frac{2U^2}{3r} \cdot \tau_0 = cm(t_2 - t_1)$. Якщо б спіраль не перегоріла, то час нагрівання води від t_2 до температури кипіння $\tau_1 = \frac{cm(t_к - t_2)}{U^2} \cdot \frac{3}{2}r$.

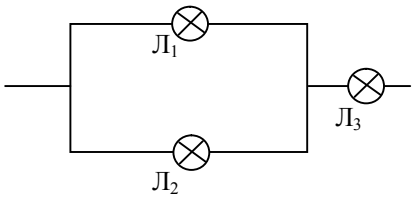
Після перегоряння спіралі загальний опір $R' = 2r$. Для нагріву води до кипіння в цьому випадку знадобиться час $\tau_2 = \frac{cm(t_к - t_2)}{U^2} \cdot 2r$.

Тоді: $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{(t_к - t_2)\tau_0}{3(t_2 - t_1)} = 5$ хв.

223. Чи можливо, маючи у розпорядженні тільки три електричні лампочки з потужностями P_1=P_2=25 Вт і P_3=50 Вт, розрахованих на напругу 110 В, ввімкнути їх в мережу з напругою *U*=220 В так, щоб кожна з них споживала встановлену потужність? Якщо можливо, то як? (2004 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Розглянемо таке з'єднання лампочок, як на малюнку. Опір лампочок Л$_1$ і Л$_2$ $R_1 = R_2 = \frac{U_1^2}{P_1}$. Опір лампочок, з'єднаних паралельно $R_{12} = \frac{U_1^2}{2P_1}$. Опір лампочки Л$_3$ $R_3 = \frac{U_1^2}{P_3}$. Загальний опір кола $R = \frac{U_1^2(P_3 + 2P_1)}{2P_1P_3}$. Сила струму $I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot 2P_1P_3}{U_1^2(P_3 + 2P_1)}$. Для даних значень опір лампочок, з'єднаних параллельно дорівнює опору третьої лампочки, тому напруга на них розподілиться порівну і становитиме $\frac{U}{2}$.



Тоді $P_3' = \frac{U}{2} \cdot \frac{U \cdot 2P_1P_3}{U_1^2(P_3 + 2P_1)} = 50$ Вт $= P_3$.

$$P_1' = P_2' = \frac{U}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{U \cdot 2P_1P_3}{U_1^2(P_3 + 2P_1)} = 25 \text{ Вт} = P_1 = P_2 .$$

Отже, лампочки споживають номінальну потужність. Якщо з'єднання буде іншим, то потужності споживані лампочками не будуть відповідати номінальним (переконайтеся самостійно).

224. Два студенти А і Б, які живуть в сусідніх кімнатах вирішили зекономити, з'єднавши свої світильники послідовно. Вони домовились, що встановлять лампочки по 100 Вт і будуть платити за електроенергію порівну. Однак, кожен вирішив отримати краще освітлення за рахунок іншого: студент А встановив лампочку потужністю 200 Вт, а студент Б – лампочку потужністю 50 Вт. Який студент отримає краще освітлення і який з них платитиме за іншого? (2006 р. з. 11 к.)

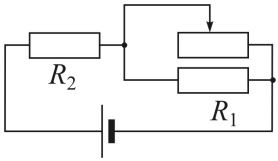
Розв'язок

За договором студенти повинні були ввімкнути послідовно дві однакові лампочки потужністю P_0 і опором $R_0 = \frac{U^2}{P_0}$ кожна. У цьому випадку кожний студент одержував би потужність $\frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{\frac{U^2}{P_0}} = \frac{P_0}{4} = 25 \text{ Вт}$. Світла при цьому було б явно мало для роботи над конспектами. Але студенти ще й схитрували, вкрутивши різні лампочки: $P_A = 2P_0$ і $P_Б = P_0/2$, що привело до перерозподілу напруги. Так як опір лампочок тепер $R_A=R_0/2$ і $R_Б=2R_0$, то сила струму в лампочках: $I = \frac{U}{\frac{5}{2}R_0}$, а напруги на лампочках стали: $U_A = \frac{U}{\frac{5}{2}R_0}\frac{R_0}{2} = \frac{U}{5}$ і $U_Б = \frac{U}{\frac{5}{2}R_0} \cdot 2R_0 = \frac{4U}{5}$. В результаті потужності, які виділяються в кімнатах, виявилися: $P_A = \frac{\left(\frac{U}{5}\right)^2}{\frac{R_0}{2}} = \frac{2}{25}P_0 = 8 \text{ Вт}$.

$$P_Б = \frac{\left(\frac{4U}{5}\right)^2}{2R_0} = \frac{16}{50}P_0 = 32 \text{ Вт}.$$

Сумарна потужність тепер 40 Вт, що менше, ніж за договором. Але студент А взагалі нічого не бачить (8 Вт істотно менше 25 Вт), але платить за 20 Вт. Студент Б може вважатися подвійним переможцем: він одержує 32 Вт (32 більше 25), але платить тільки за 20 Вт.

225. До джерела постійного струму з напругою U=4 В під'єднано два однакові резистори R_1 і R_2, опір яких R=10 Ом і реостат, опір якого можна змінювати від 0 до 5 Ом. При якому положенні повзунка реостата потужність, що виділяється на резисторі R_1 максимальна? Яке її значення? (2014 р. III е. 9 к.)

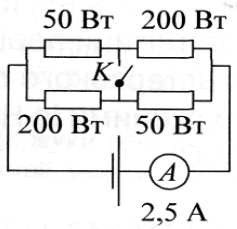


Розв'язок

Нехай r – опір реостата, R_1=R_2=R. Загальний опір паралельної ділянки $R_{пар} = \dfrac{Rr}{R+r}$. Загальний опір кола $R_{заг} = \dfrac{R(R+2r)}{R+r}$. Струм у колі $I = \dfrac{U(R+r)}{R(R+2r)}$. Напруга на паралельній ділянці $U_{пар} = IR_{пар} = \dfrac{Ur}{R+2r}$.

Поділимо чисельник і знаменник на r. $U_{пар} = \dfrac{U}{\dfrac{R}{r}+2}$ (1). Потужність, що виділяється на резисторі R_1: $P = \dfrac{U_{пар}^2}{R}$. Потужність максимальна, коли максимальний чисельник, а як бачимо із співвідношення (1), це буде тоді, коли r максимальне, тобто r=5 Ом. Тоді $P_{\max} = \dfrac{U^2}{R\left(\dfrac{R}{r}+2\right)^2} = 0{,}1$ Вт.

226. У схемі з чотирьох резисторів амперметр показує силу струму 2,5 А. На двох резисторах виділяється потужність 50 Вт, на двох – 200 Вт. Ключ К замикають, а напругу джерела змінюють так, щоб амперметр знову показував 2,5 А. Які потужності будуть виділятися на резисторах в цьому випадку? (2007 р. з. 9 к.)



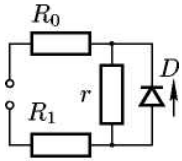
Розв'язок

Оскільки до замикання ключа сила струму через усі резистори однакова і дорівнює $I/2$, то опір резисторів, на яких виділяється однакова потужність,

рівні. Потужність, виділена на резисторах: $P_1 = \frac{I^2}{4}R_1,\ P_2 = \frac{I^2}{4}R_2$. Опір резисторів: $R_1 = \frac{4P_1}{I^2} = 32$ Ом, $R_2 = \frac{4P_2}{I^2} = 128$ Ом.

Після замикання ключа напруга на всіх резисторах однакова. Визначимо силу струму через них: $I_1R_1 = I_2R_2,\ I_1 + I_2 = I$. Звідси $I_1 = \frac{IR_2}{R_1+R_2} = \frac{IP_2}{P_1+P_2} = 2$ А, $I_2 = \frac{IP_1}{P_1+P_2} = 0{,}5$ А. Потужності, що виділяються: $P_1^{/} = I_1^2R_1 = \frac{4P_1P_2^2}{(P_1+P_2)^2} = 128$ Вт; $P_2^{/} = \frac{4P_2P_1^2}{(P_1+P_2)^2} = 32$ Вт.

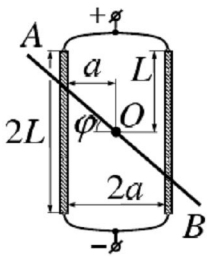
227. В електричному колі опір резисторів R_0=4 Ом, r=6 Ом. Паралельно резистору r приєднаний електронний ключ D (діод). Обчисліть опір резистора R_1, якщо сумарна потужність, що виділяється на резисторах R_1 і r, не залежить від полярності прикладеної напруги. (2015 р. ІІІ е. 9 к.)



Розв'язок

Коли електронний ключ замкнутий (резистор r закорочено), сила струму в колі $I_1 = \frac{U}{R_0+R_1}$. На резисторі r потужність не виділяється, отже сумарна потужність, що виділяється на резисторах R_1 і r становить: $P_1 = I_1^2 \cdot R_1$. Коли ключ відкритий (струм через діод не проходить), $I_2 = \frac{U}{R_0+R_1+r}$, а потужність $P_2 = I_2^2 \cdot (R_1+r)$. Оскільки за умовою P_1=P_2, одержимо: $\frac{U^2 \cdot R_1}{(R_0+R_1)^2} = \frac{U^2 \cdot (R_1+r)}{(R_0+R_1+r)^2}$. Для спрощення розрахунків підставимо значення опорів. Отримаємо $\frac{R_1}{(4+R_1)^2} = \frac{(R_1+6)}{(10+R_1)^2}$. Після спрощень $R_1^2 + 6R_1 - 16 = 0$. Розв'язавши квадратне рівняння отримаємо, що R_1=2 Ом.

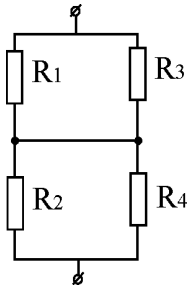
228. Електричний нагрівник складається з двох паралельних стрижнів завдовжки 2L=40 см, розташованих на відстані 2a=20см і регулятора АВ, здатного обертатися навколо точки О. Опір кожного стрижня R=100 Ом, регулятор має нульовий опір. Стрижні під'єднані до джерела постійного струму з напругою U=220 В, як показано на малюнку. За



допомогою цього нагрівника воду масою m=2 кг доводять від температури $t_0 = 20\ ^0$C до кипіння.
Визначити час, за який вода закипить, за різних значень кутів, які регулятор утворює з горизонталлю: φ=0; φ=45^0; φ=90^0.
Встановити залежність опору нагрівника від кута φ.
Питома теплоємність води c = 4200 Дж/(кг·^{0}C). Тепловтратами і опором дротів нехтувати. (2012 р. III е. 10 к.)

Розв'язок

Нехай $Q = cm(100 - t_0)$. Час роботи нагрівника визначається з рівності $Q = \frac{U^2}{R'}\tau$, де R' - регульований опір нагрівника. Звідси $\tau = \frac{cm(100 - t_0)}{U^2}R'$.
Отже, задача зводиться до знаходження R' за різних значень кута φ. Схематично це можна зобразити так:
Очевидно, що $R_1 = R_4$, $R_2 = R_3$.



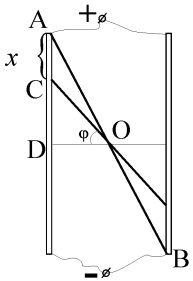
Якщо $R_1 = R_4 = x$, то $R_2 = R_3 = R - x$. Тоді загальний опір $R' = 2\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 2\frac{x(R-x)}{x + (R-x)}$, $R' = \frac{2(x(R-x))}{R}$.

Для випадків:

1) $\varphi = 0^0$ маємо $x = \frac{R}{2}$. Тоді $R' = \frac{R}{2} = 50$ Ом.

2) $\varphi = 45^0$, $x = \frac{1}{4}R$. Тоді $R' = \frac{3}{8}R = 37{,}5$ Ом.

3) $\varphi = 90^0$. Очевидно, що $R' = \frac{R}{2} = 50$ Ом.



Для випадку 1) і 3) $t \approx 694$ с.
Для випадку 2) $t \approx 520$ с.
Якщо регулятор знаходиться в точках А і В, то $R' = 0$, $tg\varphi = \frac{L}{a} = 2$. Тоді для довільного φ, такого, що $-2 < tg\varphi < 2$ знаходимо x та R'.
Довжина стрижня 40 см, його опір 100 Ом, то опір 1 см стрижня r=2,5 Ом.
Довжина АС=АD–10$tg\varphi$ = 20–10$tg\varphi$ (см). Тоді опір x=50–25$tg\varphi$ (Ом).

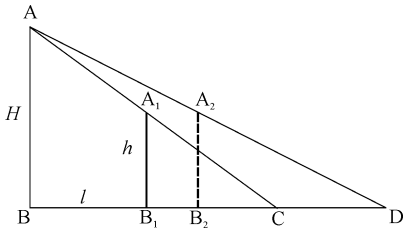
$$R' = 2\frac{(50 - 25tg\varphi)(50 + 25tg\varphi)}{100} = 50 - 12{,}5tg^2\varphi.$$

Світлові явища

229. На якій висоті висить лампа, якщо тінь від вертикально поставленої палиці заввишки 1 м має довжину 2 м, а якщо палицю перемістити на 1 м від лампи вздовж напрямку тіні, то її довжина стане 3 м? (2011 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок З подібності трикутників ABC і A_1B_1C:

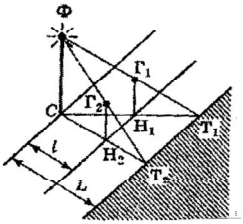
$\frac{H}{h}=\frac{l+2}{2}$ (1). З подібності трикутників ABD і A_2B_2D: $\frac{H}{h}=\frac{(l+1)+3}{3}$ (2). З рівностей (1) і (2) l=2 м. Тоді з рівності (1) H=2 м.



230. Людина, зріст якої h йде по тротуару з постійною швидкістю υ. На відстані l від краю тротуару стоїть стовп висотою H, зверху якого горить ліхтар. З якою швидкістю рухається по тротуару тінь голови людини? (2007 р. з. 9 к.)

Розв'язок

Відмітимо, що трикутник $ФСТ_1$ і $Г_1H_1T_1$ («ліхтар-основа ліхтарного стовпа-тінь голови» і «голова-ноги-тінь голови») завжди подібні. Голову людини і її тінь умовно вважаємо точками. Виходячи з цього легко бачити, що тінь голови рухається по прямій, паралельній краю тротуару і знаходиться на відстані L від стовпа. Це означає, що відстань T_1T_2 завжди в $\frac{L}{l}$ раз більша відстані H_1H_2. Отже, швидкість u тіні голови людини в ці ж $\frac{L}{l}$ разів більша швидкості самої людини υ: $u=\frac{L}{l}\upsilon$. Із подібності трикутників ФСТ та ГНТ знаходимо: $\frac{L}{H}=\frac{L-l}{h}$. Звідси $\frac{L}{l}=\frac{H}{H-h}$.Таким чином, швидкість тіні голови людини не залежить від відстані l. $u=\frac{\upsilon H}{H-h}$.

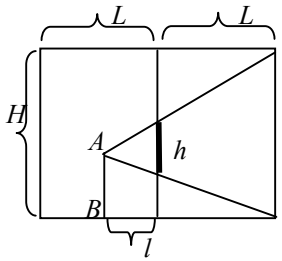


231. В кімнаті довжиною L і висотою H висить на стіні плоске дзеркало. Людина дивиться в нього, знаходячись на відстані l від тієї стіни, на якій воно висить. Якою має бути найменша висота дзеркала, щоб людина могла бачити стінку, яка знаходиться за її спиною, на всю висоту? (2002 р. ІІІ е. 9 к.)

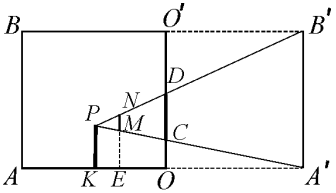
Розв'язок

Зобразимо на малюнку положення дзеркала на стіні так, щоб людина АВ могла бачити в дзеркалі всю стінку, яка знаходиться за її спиною. З подібності трикутників $\frac{H}{h}=\frac{L+l}{l}$.

Тоді $h=\frac{Hl}{L+l}$.



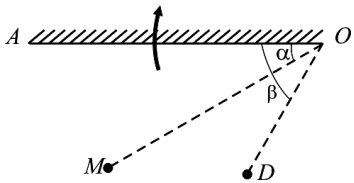
232. В центрі кімнати у формі куба стороною 4 м стоїть людина і бачить одним оком в дзеркалі, яке висить на одній з стін зображення протилежної стіни. Яких найменших розмірів непрозорий квадрат повинна розмістити людина перед собою на відстані 30 см від ока, щоб зображення стіни не бачити? (2014 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

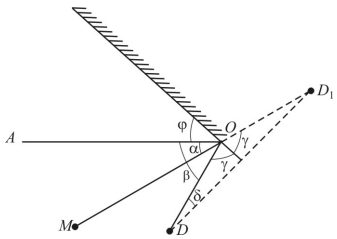
Розглянемо малюнок, на якому зображено визначення висоти (Оскільки це куб, то ширина буде така ж як і висота). A′B′ – це зображення стіни АВ в дзеркалі. CD – мінімальна висота дзеркала для людини КР, що стоїть посередині куба, щоб бачити всю протилежну стіну. Тоді MN – мінімальна висота непрозорого квадрата, який закриє зображення стіни. З подібності трикутників $\frac{A'B'}{MN}=\frac{KA'}{KE}$. A′B′=4 м, КА′=4 м+2 м=6 м, КЕ=0,3 м. Тоді MN=0,2 м. Отже, щоб не бачити протилежну стіну потрібен квадрат стороною 20 см.

233. Дзеркальні двері АО можуть обертатися навколо осі, яка перпендикулярна до площини малюнка і проходить через точку О. Хлопці Микола (М) і Дмитро (D) стоять перед дверима, як показано на малюнку, причому $\angle AOM=\alpha=30^0$. $\angle AOD=\beta=60^0$. На який кут в напрямі, вказаному стрілкою, потрібно повернути двері, щоб Микола перестав бачити в них зображення Дмитра? (2015 р. ІІІ е. 8 к.)



Розв'язок

Математичний. Побудова зображення Дмитра в повернутому дзеркалі представлена на малюнку. Видно, що граничний кут повороту дзеркала, при якому Микола ще бачить зображення Дмитра, відповідає

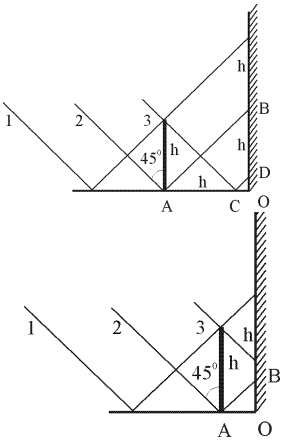


випадку, коли точки M, O і D_1 лежать на одній прямій. Використовуючи позначення для кутів, наведених на малюнку, маємо наступні рівності: $\varphi+\beta+\gamma=180^0$ (1), $2\gamma+2\delta=180^0$ (2), $2\gamma+\beta-\alpha=180^0$ (3). З рівностей (2), (3) одержимо: $2\delta=\beta-\alpha=30^0$; $\delta=15^0$. Тоді $\gamma=90^0-\delta=75^0$. З рівності (1) $\varphi=180^0-\beta-\gamma=45^0$.

Аналітичний. Кут між Миколою і перпендикуляром до дзеркала $90^0-\alpha=60^0$. Оскільки кут падіння дорівнює куту відбивання, то після повороту дзеркала перпендикуляр до нього в точці O буде бісектрисою кута MOD. Отже тепер кут між Миколою і перпендикуляром до дзеркала становитиме $\frac{\beta-\alpha}{2}=15^0$. Тоді перпендикуляр, а значить і дзеркало повернули на кут 45^0.

234. Сонячні промені падають на горизонтально розміщене плоске дзеркало під кутом $\alpha=45^0$. На дзеркалі розташований вертикальний непрозорий предмет висотою h. Визначити висоту тіні від предмета на вертикально розміщеному екрані, якщо відстань від предмета до екрана l. (2010 р. III е. 8 к.)

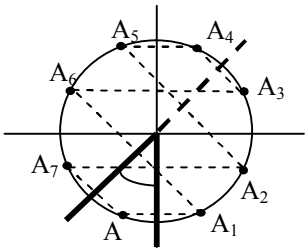
Розв'язок



Частина тіні на екрані утворюється за рахунок відбитих променів 1 і 2, на шляху яких знаходиться предмет. Оскільки падаючі промені 1 і 2 паралельні, то і відбиті від дзеркала теж паралельні. Площина екрана паралельна предмету, отже висота цієї частини тіні становить h.

Друга частина тіні утворюється за рахунок тіні від предмета на дзеркалі, яка утворюється променями 2 і 3. AC=h, оскільки кут падіння 45^0. Якщо $l>h$, то аналогічно відбиті промені паралельні, а оскільки кути падіння і відбивання 45^0, то AO=BO=l, CO=OD=$l-h$, отже AC=BD=h. Якщо $l=h$, точки C і D співпадають з точкою O. Отже, для $l \geq h$ довжина тіні буде $2h$. Якщо ж $l < h$ (другий малюнок), AO=BO=l і довжина тіні на екрані буде $l+h$.

235. Два плоскі дзеркала розміщені під кутом 45^0 одне до одного. Людина знаходиться між дзеркалами на однаковій відстані від кожного з них. Скільки своїх зображень бачить людина у дзеркалах? (2002 р. II е. 9 к.)



Розв'язок

Зрозуміло, що зображення, зображення зображеня і т.д. знаходяться на колі.

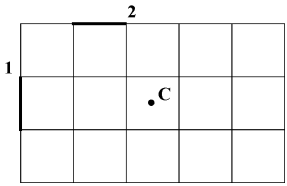
Якщо $\frac{360}{\alpha} = N_0$ – ціле число, то кількість зображень $N = \frac{360}{\alpha} - 1$. Для $\alpha = 45^0$, N=7.

236. В архіві Снеліуса знайшли малюнок, на якому зображено два дзеркала, які розміщені під кутом 800 одне до одного і точкове джерело світла. З часом малюнок «вицвів» і на ньому не видно ходу світлових променів. Відновіть малюнок і визначте, скільки зображень давала така система. (2002 р. з. 10 к.)

Розв'язок

Кількість зображень залежить від кута між площинами дзеркал. Так, при 180^0 – одне зображення, при 90^0 – три зображення. Якщо кут між дзеркалами α, кількість зображень визначається із співвідношення $n = \frac{360}{\alpha} - 1$, де n – ціле число, і у нашому випадку утвориться 3 зображення.

237. На двох стінах тренажерного залу висять два однакових плоских дзеркала (вид зверху). В центрі залу стоїть спортсмен. Побудувати всі його зображення в дзеркалах. Яку максимальну кількість своїх зображень він буде бачити? Яку максимальну кількість зображень спортсмена одночасно може бачити сторонній спостерігач, який знаходиться в залі? Зобразіть план залу і покажіть на ньому області, з яких можна бачити зображення спортсмена. (2016 р. III е. 8 к.)



Розв'язок

Побудуємо зображення спортсмена в дзеркалах. Предмет і зображення в дзеркалі рівновіддалені від площини дзеркала і лежать на перпендикулярі до дзеркала. Будуємо зображення C_1 і C_2. Зображення C_3 – це зображення зображення C_1 в дзеркалі 2, або зображення зображення C_2 в дзеркалі 1. Вони співпадають, тому зображень буде 3 (мал.1).

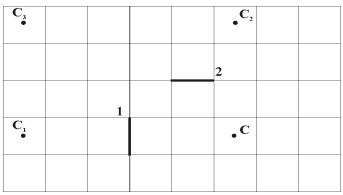
На малюнку 2 показано область залу, з якої видно зображення C_1 в дзеркалі 1;

На малюнку 3 показано область залу, з якої видно зображення C_2 в дзеркалі 2;

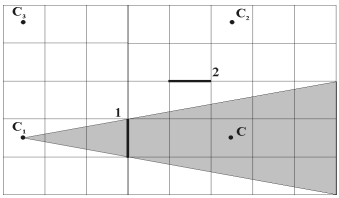
На малюнку 4 показано області залу, з яких видно зображення C_3.

Як бачимо, спортсмен може бачити лише одне своє зображення.

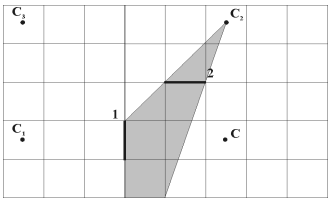
Всі три зображення буде видно з тієї області зала, де перекриваються всі три області. Це область, позначена буквою А на малюнку 5.



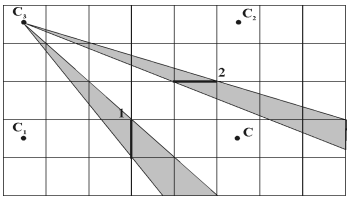
Мал.1



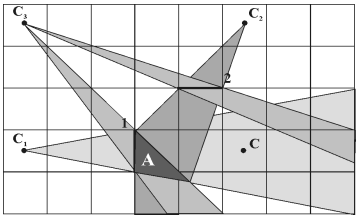
Мал.2



Мал.3



Мал.4

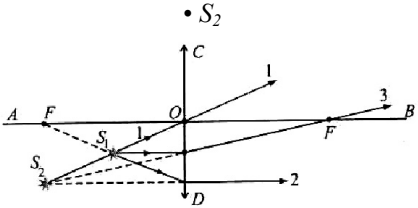


Мал.5

238. На рисунку зображено положення оптичної осі АВ лінзи, джерела світла S_1 і його зображення S_2. Знайдіть побудовою положення центра лінзи та її фокусів. (2005 р. ІІ е. 9 к.)

Розв'язок

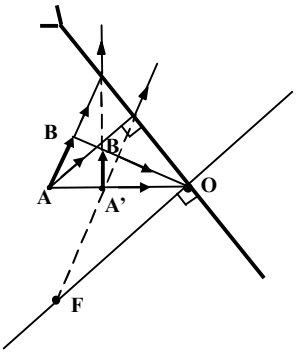
Проведемо промінь 1 через S_2S_1. Він перетне АВ в оптичному центрі лінзи О. Проведемо лінію лінзи CD як перпендикуляр до АВ. Проведемо промінь 3 з джерела світла паралельно АВ до лінзи. Після лінзи промінь заломлюватиметься так, що його продовження пройде через S_2. Його перетин з АВ є фокусом лінзи (точка F). Отже, лінза збірна. Проведемо промінь 2 з джерела світла так, щоб він за лінзою йшов паралельно АВ, а його продовження через S_2, тоді його перетин з АВ дасть положення іншого фокуса.



239. Відоме положення предмета АВ і його зменшеного зображення А′В′ (мал. 2). Визначити побудовою положення лінзи, її оптичного центру, фокуса і головної оптичної осі. (2003 р. ІІІ е. 9 к.)

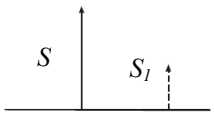
Розв'язок

Процес визначення положення лінзи, оптичного центра та фокуса зображено на малюнку. Оскільки зображене пряме і зменшене, то лінза розсіювальна. Перетин променів АА′ і ВВ′ дасть положення



оптичного центра лінзи. Промінь, який проходить через точки АВ після заломлення в лінзі піде таким чином, що його продовження пройде через точки А′В′, тому перетин променів АВ і А′В′ дасть ще одну точку лінзи. Побудувавши лінзу, проводимо перпендикуляр в точці О. Це буде головна оптична вісь. Проводимо з точки А промінь, паралельний головній оптичній осі, продовження якого після заломлення в лінзі перетне головну оптичну вісь у фокусі *F*.

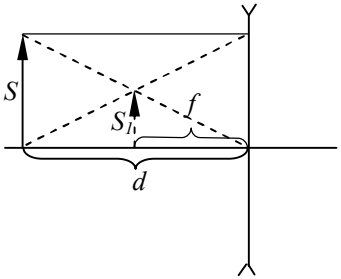
240. На малюнку зображено предмет *S* і його зображення у лінзі S_1. Висота предмета у 2 рази більша за висоту зображення, а відстань між предметом і зображенням 5 см. За цими даними побудуйте лінзу і визначте її оптичну силу. (2004 р. з. 9 к.)



Розв'язок

Оскільки зображення зменшене, уявне, то лінза розсіювальна. Згідно умови *d–f=5*, а з подібності трикутників $\frac{d}{f}=2$. Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо: *f*=5 см, *d*=10 см.

Тоді $D=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-10$ дптр.



241. Відстань між предметом і зображенням, одержаним за допомогою лінзи, дорівнює 25 см. Визначити оптичну силу лінзи, якщо зображення пряме і збільшене у 2 рази. (2005 р. з. 9 к.)

Розв'язок

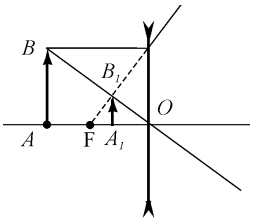
Оскільки зображення пряме і збільшене, то лінза збірна. Предмет розміщений між лінзою і фокусом, а зображення уявне.

Згідно умови *f*=2*d; f–d*=0,25. Тоді *d*=0,25 м, *f*=0,5 м. З формули лінзи $D=\frac{1}{d}-\frac{1}{f}$, $D=\frac{f-d}{df}=2$ дптр.

242. Предмет висотою 4 см розміщений на відстані 50 см від лінзи, фокусна відстань якої *F*= –30 см. Яка висота зображення цього предмета? Зробити схематичну побудову. (2012 р. ІІІ е. 8 к.)

Розв'язок

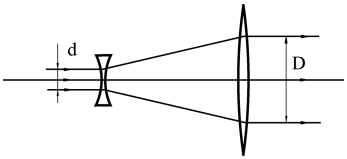
Оскільки *F*=–30 см, то лінза розсіювальна, зображення уявне. З подібності трикутників ОАВ і OA_1B_1: $\frac{H}{h}=\frac{OA}{OA_1}$, де $d=OA$, $F=OF$, $H=AB$. З формули



лінзи $-\frac{1}{F}=-\frac{1}{f}+\frac{1}{d}$ знаходимо f: $-\frac{1}{0,3}=-\frac{1}{f}+\frac{1}{0,5}$, $f=0,1875$ м $=18,75$ см.

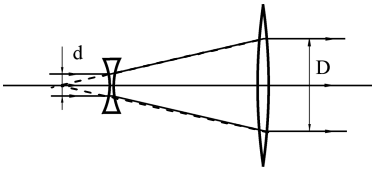
Тоді $\frac{4}{h}=\frac{50}{18,75}$, $h=1,5$ см.

243. Оптична система складається з двох співвісних лінз, одна з яких – розсіювальна з фокусною відстанню F_1, а інша – збірна з фокусною відстанню F_2. Паралельний пучок світла, який падає уздовж оптичної осі на розсіювальну лінзу, залишається паралельним і після виходу з системи. Знайти відстань між лінзами і відношення діаметрів пучків світла на вході і виході з системи. (2008 р. III е. 9 к.)



Розв'язок

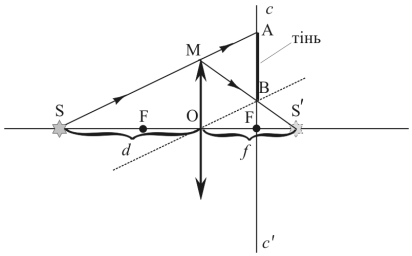
На збірну лінзу падає розбіжний пучок світла, який іде ніби з уявного фокуса розсіювальної лінзи (тому що на розсіювальну лінзу падав пучок, паралельний головній оптичній осі). Разом з тим, щоб пучок був паралельний після виходу зі збірної лінзи він повинен вийти з її фокуса. Отже фокуси лінз співпадають. Тому, відстань між лінзами $l=F_2-F_1$. З подібності трикутників $\frac{D}{d}=\frac{F_2}{F_1}$.



244. Збірну тонку лінзу з фокусною відстанню F освітлюють точковим джерелом, розташованим на оптичній осі на відстані $d = 2F$ від лінзи. За лінзою у фокальній площині розташований екран. Визначити площу світлої плями на екрані. Лінзу вважати кругом радіуса R. (2009 р. III етап. 8 клас)

Розв'язок

З малюнка бачимо, що світла пляма радіусом FB визначається ходом променів крізь збірну лінзу. Лінза створює дійсне зображення джерела S′ за екраном на відстані f від лінзи, яка знаходиться за формулою $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$,



отже $f=\frac{dF}{d-F}$. З подібності трикутників S′BF і S′MO: $\frac{BF}{MO}=\frac{S'F}{S'O}$.

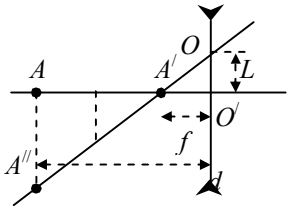
Отже радіус світлої плями $BF = \dfrac{R(f-F)}{f}$, а її площа

$S = \dfrac{\pi R^2}{f^2}(f-F)^2$. Оскільки $d=2F$, то $f=2F$ і площа світлої плями $S = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

245. Точкове джерело світла знаходиться на головній оптичній осі на відстані d = 60 см від розсіювальної лінзи з фокусною відстанню F = –15 см. Лінзу змістили вгору на L = 2 см в площині, перпендикулярній головній оптичній осі. На скільки і куди потрібно змістити джерело світла, щоб його зображення повернулося в попереднє положення? (2012 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Оскільки лінзу зміщують в площині, перпендикулярній головній оптичній осі лінзи, то відстань від точки A (попереднє зображення джерела) до площини лінзи зберігається. Щоб зображення A' залишилося в попередньому положенні, потрібно щоб оптичний центр лінзи О, зображення джерела А′ і нове положення джерела А″ лежали на одній прямій. На малюнку це пряма ОА″. Отже, джерело треба змістити вниз на відстань АА″.



За формулою лінзи знайдемо відстань f від зображення джерела до лінзи:

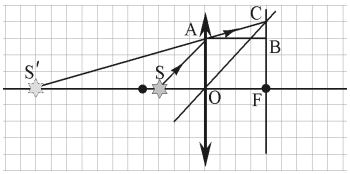
$\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{f} = -\dfrac{1}{F}$, $f = \dfrac{dF}{d+F}$. З подібності трикутників АА′А″ і А′ОО′:

$\dfrac{AA''}{L} = \dfrac{d-f}{f}$. Тоді шукана відстань: $AA'' = L\left(\dfrac{d}{f} - 1\right) = \dfrac{Ld}{F} = 8$ см .

246. Два промені симетрично перетинають головну оптичну вісь збірної лінзи на відстані 7,5 см від лінзи так, що кут між променями 90^0. Визначити кут між цими променями після проходження ними лінзи, якщо фокусна відстань лінзи 10 см. (2013 р. III е. 9 к.)

Розв'язок

Побудуємо хід одного з променів після заломлення в лінзі. Зображенням точки S буде точка S′. Кут OS′A буде половиною шуканого кута β. З малюнка видно, що він дорівнює куту ВАС. АВ=F=10 см. ∠OSA=∠FOC=45^0. Отже, ОА=ВF=7,5 см, а FC=10 см. Тоді



ВС=2,5 см. З трикутника САВ $tgCAB = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2{,}5}{10} = 0{,}25$. Тоді β=2$arctg$ 0,25.